TD n°2 : Fonctions homographiques

I] Fonctions homographique n°1

On se propose d'étudier la fonction *f* définie par $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$.

a) Quel est la valeur de *x* interdite ? C'est 2, car on ne peut diviser par 0 et $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.
Quel est l'ensemble de définition de *f* ? (sous la forme d'une réunion d'intervalles)
$D_f=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

b) Écrire *f*(*x*) sous la forme canonique des fonctions homographiques $f(x)=\alpha+\frac{\beta}{x-\gamma}$.
(Montrer que $\alpha=1;\beta=1$ et $\gamma=2$)
On a $f(x)=\frac{x-1}{x-2}=\frac{(x-2)+2-1}{x-2}=1+\frac{1}{x-2}$.

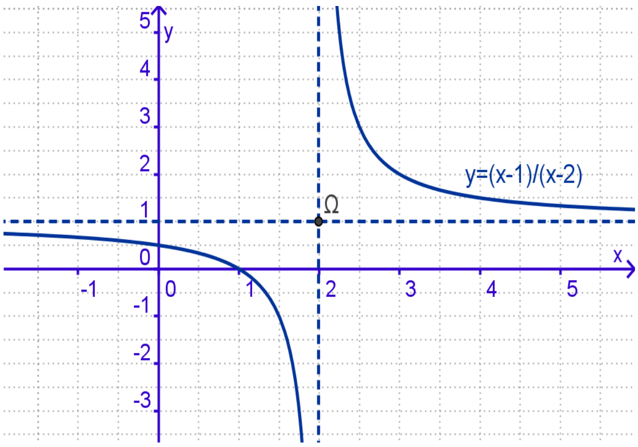
c) Déterminer le taux d'accroissement de *f* entre x_1 et x_2.
(Montrer que $\tau=\frac{-1}{(x_1-2)(x_2-2)}$)
Le taux d'accroissement de *f* entre x_1 et x_2 est $\frac{1+\frac{1}{x_1-2}-(1+\frac{1}{x_2-2})}{x_1-x_2}=\frac{\frac{1(x_2-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}-(\frac{1(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)})}{x_1-x_2}=\frac{(x_2-x_1)}{(x_1-2)(x_2-2)(x_1-x_2)}=\frac{-1}{(x_1-2)(x_2-2)}$.

d) Déduire de ce rapport le sens de variation de *f* sur chacun des intervalles composant D_f.
Sur chacun des intervalles constituant l'ensemble de définition $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$, le dénominateur de cette fraction est positif, et comme on multiplie un nombre positif par $-1<0$, le taux d'accroissement est négatif. La fonction est décroissante sur chacun de ces intervalles (sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$).

e) Dresser le tableau de variation de *f* qui résume cela :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

f) Déduire de ce rapport vers quelle valeur s'approche $f(x)$ quand *x* devient infiniment grand (ou petit) ?
Ajouter cette valeur dans le tableau.
Quand *x* devient très grand $\frac{1}{x-2}$ se s'approche de 0, et donc $1+\frac{1}{x-2}$ se s'approche de 1. De même, quand *x* devient très petit (l'infini négatif) $\frac{1}{x-2}$ se s'approche aussi de 0, et donc $1+\frac{1}{x-2}$ se s'approche aussi de 1.



g) Chercher les coordonnées des points d'intersection de la courbe de *f* avec les axes.
Avec l'axe des ordonnées : $f(0)=\frac{0-1}{0-2}=\frac{1}{2}$.
Avec l'axe des abscisses :
$f(x)=0$ pour $x-1=0$, donc pour *x*=1.

h) Tracer la courbe représentant *f*.
Les *asymptotes* sont tracées en pointillés bleus :

- l'asymptote horizontale est la droite d'équation *y*=1 vers laquelle s'approche la courbe pour les valeurs infinies
- l'asymptote verticale est la droite d'équation *x*=2 vers laquelle s'approche la courbe pour les valeurs proches de 2 (par valeurs inférieures ou supérieures)

Remarque :On a $y=1+\frac{1}{x-2}$, ou encore $y-1=\frac{1}{x-2}$.
En posant $X=x-2$ et $Y=y-1$, l'équation de la courbe devient $Y=\frac{1}{X}$. Les coordonnées de la nouvelle origine (*X*=0;*Y*=0) dans l'ancien système de coordonnées sont (*x*=2 ; *y*=1). Nous avons appelé Ω ce point sur le graphique. Ce changement de repère revient à effectuer une translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$. Dans ce nouveau repère, les asymptotes de la courbe sont les axes de coordonnées.

II] Fonctions homographique n°2

La fonction *g* est définie par $g(x)=\frac{3x-1}{x-2}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de *g* ?
La valeur interdite est encore *x*=2 qui annule de dénominateur de $g(x)$.
Donc $D_g=D_f=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.

b) Écrire *g*(*x*) sous la forme canonique.
$g(x)=\frac{3x-1}{x-2}=\frac{3(x-2)+6-1}{x-2}=3+\frac{5}{x-2}$

c) Déterminer le taux d'accroissement de g entre x_1 et x_2 .

Le taux d'accroissement de g entre x_1 et x_2 est donc

$\frac{3+\frac{5}{x_1-2}-(3+\frac{5}{x_2-2})}{x_1-x_2}=\frac{\frac{5(x_2-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}-(\frac{5(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)})}{x_1-x_2}=\frac{5(x_2-x_1)}{(x_1-2)(x_2-2)(x_1-x_2)}=\frac{-5}{(x_1-2)(x_2-2)}$.

d) Déduire de ce rapport le sens de variation de g sur chacun des intervalles composant D_g .

Sur chacun des intervalles constituant l'ensemble de définition $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$, le dénominateur de cette fraction est positif, et comme on multiplie un nombre positif par $-5<0$, le taux d'accroissement est négatif. La fonction g est décroissante sur chacun de ces intervalles.

e)Déduire de ce rapport vers quelle valeur s'approche $g(x)$ quand x devient infiniment grand (ou petit) ?

Quand x devient très grand $\frac{5}{x-2}$ se s'approche de 0, et donc $3+\frac{5}{x-2}$ se s'approche de 3. De même, quand x devient très petit (l'infini négatif) $\frac{5}{x-2}$ se s'approche aussi de 0, et donc $3+\frac{5}{x-2}$ se s'approche aussi de 1.

f) Dresser le tableau de variation de g :

x	$-\infty$			$+\infty$
$g(x)$	3 ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3

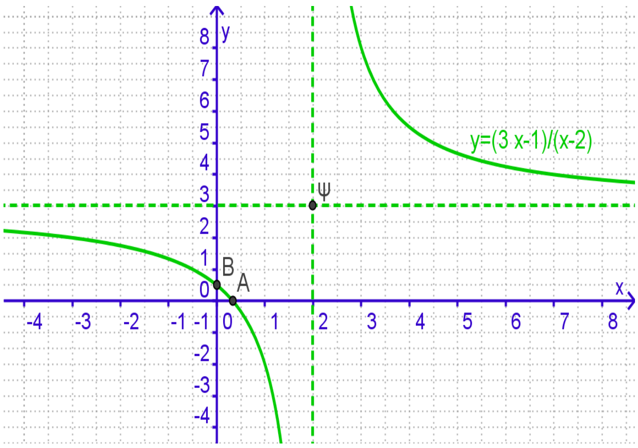
g) Chercher les coordonnées des points d'intersection de la courbe de g avec les axes.

Avec l'axe des ordonnées : $g(0)=\frac{3\times 0-1}{0-2}=\frac{1}{2}$ (point B).

Avec l'axe des abscisses :

$g(x)=0$ pour $3x-1=0$, donc pour $x=\frac{1}{3}$ (point A).

h) Tracer la courbe représentant g.



Les asymptotes sont tracées en pointillés verts : il y a l'asymptote horizontale (droite d'équation y=3) vers laquelle s'approche la courbe pour les valeurs infinies, et l'asymptote verticale (droite d'équation x=2) vers laquelle s'approche la courbe pour les valeurs proches de 2 (par valeurs inférieures ou supérieures).

Remarque : On a $y=3+\frac{5}{x-2}$, ou encore $y-3=\frac{5}{x-2}$.

En posant $X=x-2$ et $Y=y-3$, l'équation de la courbe devient $Y=\frac{5}{X}$.

Les coordonnées de la nouvelle origine (X=0;Y=0) dans l'ancien système de coordonnées sont (x=2 ; y=3). Nous avons appelé Ψ ce point sur le graphique. Ce changement de repère revient à effectuer une translation de vecteur $\overrightarrow{O\Psi}$. Dans ce nouveau repère, les asymptotes de la courbe sont les axes de coordonnées.

III] <u>Fonctions homographique n°3</u> :

Refaire le travail pour la fonction h définie par $h(x)=\frac{1}{2x-3}$.

Exprimons $h(x)$ sous la forme canonique. $h(x)=\frac{1}{2x-3}=\frac{1}{2(x-\frac{3}{2})}=\frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{3}{2}}$. Ici on a α=0, β= $\frac{1}{2}$ et γ= $\frac{-3}{2}$.

Le taux d'accroissement de h entre x_1 et x_2 est donc $\frac{\frac{\frac{1}{2}}{x_1-\frac{3}{2}}-(\frac{\frac{1}{2}}{x_2-\frac{3}{2}})}{x_1-x_2}=\frac{\frac{-1}{2}}{(x_1-\frac{3}{2})(x_2-\frac{3}{2})}$

(on ne refait pas forcément le calcul qui est similaire à celui que l'on vient d'effectuer pour f et g).

Sur chacun des intervalles constituant l'ensemble de définition $D_h=\mathbb{R}-\{\frac{3}{2}\}$, le dénominateur de cette fraction est positif, et comme on multiplie un nombre positif par $\frac{-1}{2}<0$, le taux d'accroissement est négatif. La fonction est décroissante sur chacun de ces intervalles.

Dressons le tableau de variation de h qui résume cela :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$h(x)$	0 ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

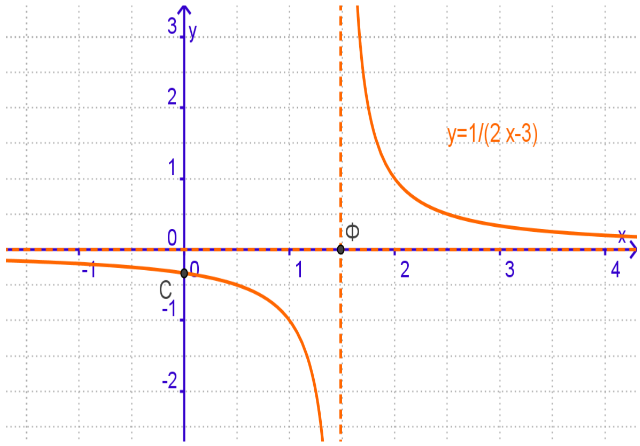
Quand x devient très grand, $\frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{3}{2}}$ s'approche de 0.

De même, quand x devient très petit $\frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{3}{2}}$ se s'approche aussi de 0.

Cherchons les coordonnées des points d'intersection de la courbe de h avec les axes.

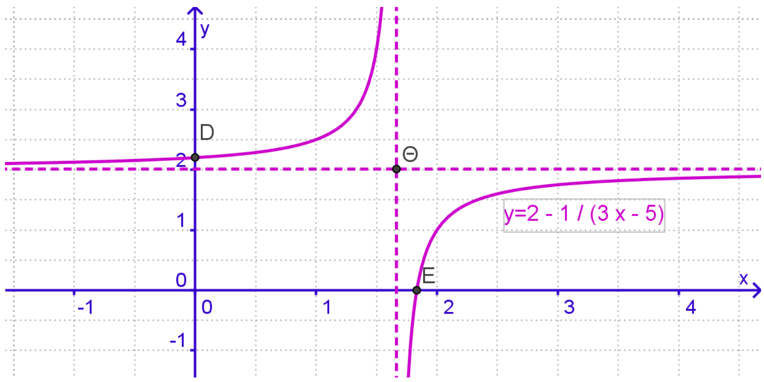
Avec l'axe des ordonnées : $h(0)=\frac{1}{2\times 0-3}=\frac{1}{2}$.

Avec l'axe des abscisses : $h(x)=0$ pour $1=0$, ce qui n'arrive jamais.
La courbe ne coupe pas l'axe des abscisses car c'est une de ses asymptotes.
En posant $X=x-\frac{3}{2}$ et $Y=y$, l'équation de la courbe d'équation $y=\frac{1}{2x-3}$ ou bien $y=\frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{3}{2}}$ devient $Y=\frac{\frac{1}{2}}{X}=\frac{1}{2X}$. Les coordonnées de la nouvelle origine dans l'ancien système de coordonnées sont ($x=\frac{3}{2}$; y=0). Nous avons appelé Φ ce point sur le graphique. Nous avons aussi placé ici, le point *C* qui est l'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées calculée précédemment.



Traçons alors la courbe représentant *h*. Les asymptotes sont tracées en pointillés orange : il y a l'asymptote horizontale (droite d'équation *y*=0, l'axe des abscisses) vers laquelle s'approche la courbe pour les valeurs infinies, et l'asymptote verticale (droite d'équation $x=\frac{3}{2}$) vers laquelle s'approche la courbe pour les valeurs proches de $\frac{3}{2}$ (par valeurs inférieures ou supérieures).

Remarque : Nous n'avons envisagé dans ce travail sur les fonctions homographiques que des fonctions décroissantes sur les intervalles. Cela vient du fait que le coefficient β de l'expression homographique canonique $\alpha+\frac{\beta}{x-\gamma}$ a toujours été positif pour ces trois fonctions *f*, *g* et *h* étudiées.
Le coefficient β peut être négatif, même le jour du DS. Cela ne doit pas vous effrayer : le taux de variation est alors positif sur les deux intervalles, et la fonction est croissante. La courbe est toujours une hyperbole avec deux asymptotes, une horizontale et une verticale.
Voici un exemple de courbe d'équation $y=2-\frac{1}{3x-5}$ qui représente la fonction *i* définie par $i(x)=2-\frac{1}{3x-5}=\frac{2(3x-5)-1}{3x-5}=\frac{6x-11}{3x-5}$. Vous vérifierez facilement que la courbe coupe l'axe des ordonnées au point *D* d'ordonnée $\frac{11}{5}=2{,}2$ alors qu'elle coupe l'axe des abscisses au point E d'abscisse $\frac{11}{6}\approx 1{,}833$. L'asymptote verticale a pour équation $x=\frac{5}{3}\approx 1{,}67$ et l'asymptote horizontale a pour équation $y=2$ (cette valeur vient de la forme canonique).



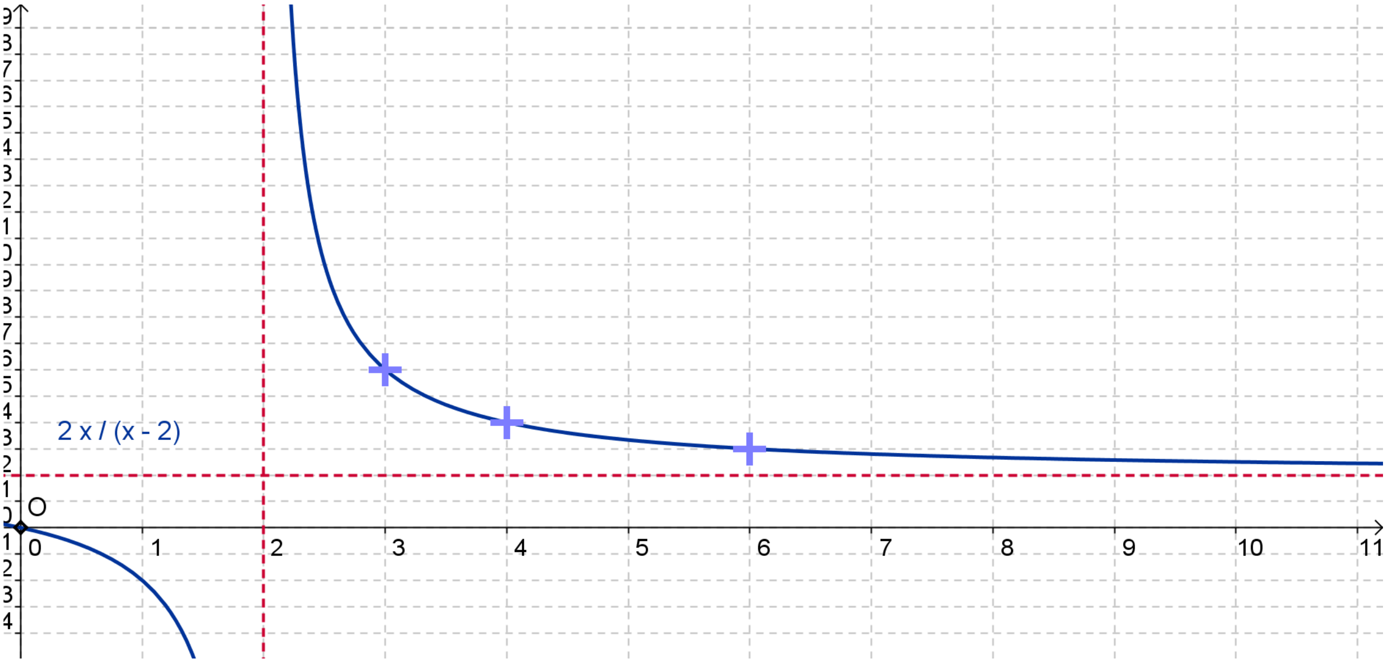
IV] <u>Hyperbole et rectangles à côtés entiers</u>
Soient *x* et *y* la largeur et la longueur d'un rectangle (en *m*).
Exprimer le périmètre $\mathcal{P}$ et l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle en fonction de *x* et *y*.
On s'intéresse aux rectangles tels que $\mathcal{A}$ (en m^2) égale $\mathcal{P}$ (en *m*).
Déterminer la fonction qui donne *y* à partir de *x* pour de tels rectangles.
Combien existe-t-il de tels rectangles dont les côtés sont des nombres entiers de *m* ?
Faire un graphique pour montrer les différentes solutions.
Le périmètre du rectangle : $\mathcal{P}=2(x+y)$; l'aire de ce même rectangle $\mathcal{A}=xy$.
Si on doit avoir $\mathcal{P}=\mathcal{A}$, il faut que $xy=2(x+y)$.
Comment déterminer *y* à partir de *x* ?
On écrit successivement des égalités équivalentes :

$$xy=2x+2y \;;\; xy-2y=2x \;;\; y(x-2)=2x \;;\; y=\frac{2x}{x-2} \text{ si } x\neq 2 .$$

Combien existe-t-il de tels rectangles dont les côtés sont des nombres entiers de *m* ?
Remarquons tout d'abord que *y* est une fonction homographique de *x*.
La forme canonique : $y=\frac{2(x-2)+4}{x-2}=2+\frac{4}{x-2}$.

La forme réduite après le changement de variable $Y=y-2$ et $X=x-2$ est $Y=\frac{4}{X}$.

Traçons la courbe d'équation $y=\frac{2x}{x-2}$.



On voit sur cette courbe, qu'il n'y a que trois points à coordonnées entières positives : les points de coordonnées (3;6), (4;4) et (6;3).

Le point de coordonnées $(1;\,-2)$ ne convient pas car y ne peut pas être négatif (c'est une longueur). Pouvons-nous prouver qu'il n'y a pas d'autres points à coordonnées entières positives ?

Pour x entre 0 et 2, non car alors y serait négatif ou nul.

Pour x entre 2 et 3, non il n'y a aucune valeur entière.

Pour x supérieur à 6, non car c'est y qui ne peut pas être entier alors (l'asymptote horizontale ayant pour équation y=2, la courbe se rapproche de la valeur entière 2 sans jamais l'atteindre).

Traçons les trois seuls rectangles de côtés entiers ayant une aire égale au périmètre.

En fait, il n'y en a que deux, car les couples (3;6) et (6;3) conduisent au même rectangle.