TD n°1 : Fonctions trinômes

I] Trinôme n°1

On se propose d'étudier la fonction *f* définie par $f(x)=x^2+x-6$.

a) Écrire *f*(*x*) sous la forme canonique $\alpha(x-\beta)^2+\gamma$.

$f(x)=x^2+x-6=(x+\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2-6=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{25}{4}$

On a ici $\alpha=1\,;\beta=\frac{-1}{2}=-0{,}5\,;\gamma=\frac{-25}{4}=-6{,}25$.

b) En déduire que *f* admet un **minimum** *M*=*f*(x_0) pour une valeur x_0 de *x* que vous déterminerez.

Rappel : *M* est un minimum de *f* si $\forall x\in D_f, f(x)\geq M$.

Comme $(x+\frac{1}{2})^2\geq 0$, avec égalité pour $x=\frac{-1}{2}$, on a $(x+\frac{1}{2})^2-\frac{25}{4}\geq\frac{-25}{4}$ (on ajoute la même chose des deux côtés de l'inégalité) , soit $f(x)\geq\frac{-25}{4}$, avec égalité pour $x=\frac{-1}{2}$.

C'est bien la définition d'un minimum pour *f*.

On a donc x_0= $\frac{-1}{2}=-0{,}5$ et *M*= $\frac{-25}{4}=-6{,}25$. Noter que x_0= β . C'est pour avoir cette égalité que l'on choisit l'expression donnée pour la forme canonique du trinôme $\alpha(x-\beta)^2+\gamma$ (au lieu de $\alpha(x+\beta)^2+\gamma$).

c) En déduire aussi le sens de variation de *f* à l'aide du signe du taux d'accroissement τ de *f* entre x_1 et x_2 , deux valeurs de la variable contenues dans un même intervalle *I* où la fonction est définie.

Taux d'accroissement

$$\tau=\frac{(x_1+\frac{1}{2})^2-\frac{25}{4}-((x_2+\frac{1}{2})^2-\frac{25}{4})}{x_1-x_2}=\frac{(x_1+\frac{1}{2})^2-(x_2+\frac{1}{2})^2}{x_1-x_2}=\frac{(x_1+\frac{1}{2}-(x_2+\frac{1}{2}))(x_1+\frac{1}{2}+(x_2+\frac{1}{2}))}{x_1-x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1+\frac{1}{2}+x_2+\frac{1}{2})}{x_1-x_2}=x_1+\frac{1}{2}+x_2+\frac{1}{2}$$

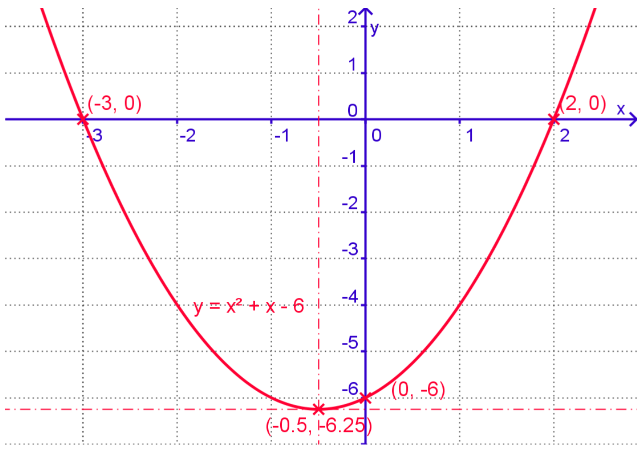
Sur quel intervalle, le signe de τ reste t-il positif ?

$x_1+\frac{1}{2}$ et $x_2+\frac{1}{2}$ sont positifs tous les deux si $x_1\geq\frac{-1}{2}$ et $x_2\geq\frac{-1}{2}$, soit si ils appartiennent à $[-\frac{1}{2}\ ;+\infty[$.

Donc sur $[-\frac{1}{2}\ ;+\infty[$, la fonction *f* est strictement croissante (son taux d'accroissement est positif).

d) Tableau de variation de *f* :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$-\infty$
$f(x)$	↘	$\frac{-25}{4}$	↗



e) Chercher les coordonnées des points d'intersection, si ils existent, de la courbe de *f* avec les axes.

Axe des ordonnées : $f(0)=0^0+0-6=-6$ donc la courbe passe par le point de coordonnées (0 ;-6)

Axe des abscisses : $f(x)=0$ pour $(x+\frac{1}{2})^2-\frac{25}{4}=0$, soit pour $(x+\frac{1}{2}+\frac{5}{2})(x+\frac{1}{2}-\frac{5}{2})=0$ (on a utilisé une identité remarquable pour factoriser), soit encore pour $(x+3)(x-2)=0$. Il y a deux solutions à cette équation, donc deux antécédents à 0 qui sont 2 et -3 .

Donc la courbe passe par les points (2 ;0) et (-3 ;0)

Tracer alors la courbe représentant *f* sur un intervalle qui contient ces points. Voir la courbe en rouge.

II] Trinôme n°2

Étudions, de la même façon, la fonction *g* définie par $g(x)=-x^2+2x+4$.

a) Forme canonique :

$g(x)=-x^2+2x+4=-(x^2-2x-4)=-((x-1)^2-(1)^2-4)=-((x-1)^2-5)=-(x-1)^2+5$

On a ici $\alpha=-1\,;\beta=1\,;\gamma=5$.

b) En déduire l'**extremum** (maximum ou minimum) de *g* :

Comme $(x-1)^2\geq 0$, avec égalité pour $x=1$, on a $-(x-1)^2\leq 0$ et donc $-(x-1)^2+5\leq 5$ (on ajoute la même chose des deux côtés de l'inégalité) , soit $g(x)\leq 5$, avec égalité pour $x=1$. C'est bien la définition d'un <u>maximum</u> pour *g*. On a donc x_0= 1 ; *M*= 5 et $\forall x\in D_g, g(x)\leq M$ (avec égalité pour x=x_0=1).

c) Taux d'accroissement τ de *g* :

$$\tau=\frac{-(x_1-1)^2+5-(-(x_2-1)^2+5)}{x_1-x_2}=\frac{-(x_1-1)^2+(x_2-1)^2}{x_1-x_2}=\frac{(x_2-1-(x_1-1))(x_2-1+(x_1-1))}{x_1-x_2}=\frac{(x_2-x_1)(x_2-1+x_1-1)}{x_1-x_2}=-(x_2-1+x_1-1)\,,$$

vous noterez ici la simplification qui fait apparaître un signe $-$.

Étude du signe de τ

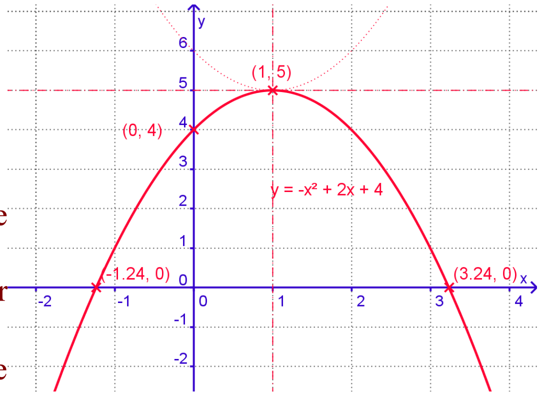
x_1-1 et x_2-1 sont positifs tous les deux si $x_1\geq 1$ et $x_2\geq 1$, soit si ils appartiennent à $[1\ ;+\infty[$.

Donc sur $[1\ ;+\infty[$, la fonction *g* est strictement <u>décroissante</u> (son taux d'accroissement est négatif).

Pour que le taux τ soit positif, il faut choisir x_1 et x_2 dans $]-\infty\ ;\ 1]$.

Tableau de variation de g :

x	$-\infty$	1	$-\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$



d) Points d'intersection de la courbe de g avec les axes.

Axe des ordonnées : $g(0)=-0^0+2\times 0+4=4$ donc la courbe passe par le point de coordonnées (0 ;4).

Axe des abscisses : $g(x)=0$ pour $-(x-1)^2+5=0$, soit pour $(\sqrt{5}-(x-1))(\sqrt{5}+(x-1))=0$,

ou pour $(\sqrt{5}+1-x)(\sqrt{5}-1+x)=0$. Il y a deux solutions à cette équation, donc deux antécédents à 0 qui sont $\sqrt{5}+1\approx 3{,}236$ et $-\sqrt{5}+1\approx -1{,}236$ donc la courbe passe par les points ($-\sqrt{5}+1$;0) et ($\sqrt{5}+1$;0).

Tracer alors la courbe représentant g sur un intervalle qui contient ces points. Voir la courbe en rouge.

III] Trinôme n°3

Refaire, de même, toutes les questions du I] pour la fonction h définie par $h(x)=9x^2-6x-4$.

$h(x)=9x^2-6x-4=(3x-1)^2-1^2-4=(3x-1)^2-5$ mais ce n'est pas la forme canonique attendue (car dans le carré, on n'a pas $x-\beta$ mais $3x-\beta$).

Il faut mettre α=9 en facteur : $h(x)=(3(x-\frac{1}{3}))^2-5=9(x-\frac{1}{3})^2-5$. On a ici $\alpha=9\,;\beta=\frac{1}{3}\,;\gamma=\frac{-5}{9}$.

Comme $(3x-1)^2\geq 0$, avec égalité pour $x=\frac{1}{3}$, on a $(3x-1)^2-5\geq -5$.

Donc $h(x)\geq -5$, avec égalité pour $x=\frac{1}{3}$. C'est bien la définition d'un minimum pour h.

On a donc x_0= $\frac{1}{3}$; M= -5 et $\forall x\in D_h, h(x)\geq M$ (avec égalité pour x= $\frac{1}{3}$). Remarquez qu'ici on s'est servi de la forme canonique incorrecte qui est, tout de même, plus simple à manipuler.

Taux d'accroissement :

$$\tau=\frac{9(x_1-\frac{1}{3})^2-5-(9(x_2-\frac{1}{3})^2-5)}{x_1-x_2}=\frac{9((x_1-\frac{1}{3})^2-(x_1-\frac{1}{3})^2)}{x_1-x_2}=\frac{9((x_1-\frac{1}{3}-(x_2-\frac{1}{3}))(x_1-\frac{1}{3}+(x_2-\frac{1}{3})))}{x_1-x_2}=\frac{9(x_1-x_2)(x_1-\frac{1}{3}+x_2-\frac{1}{3})}{x_1-x_2}=9(x_1-\frac{1}{3}+x_2-\frac{1}{3})$$

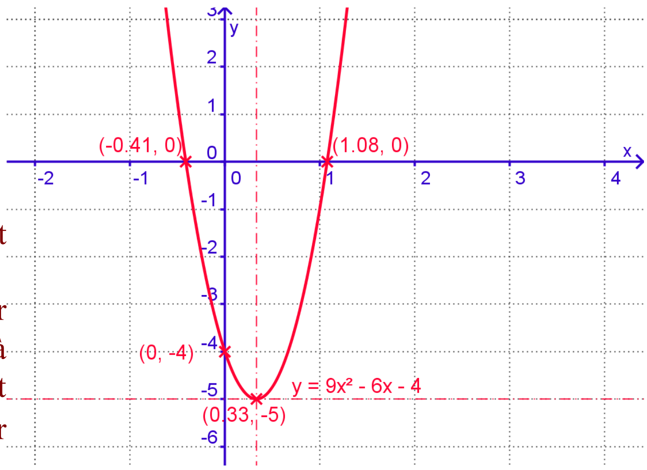
Sur quel intervalle, le signe de τ reste t-il positif ?

$x_1-\frac{1}{3}$ et $x_2-\frac{1}{3}$ sont positifs tous les deux si $x_1\geq\frac{1}{3}$ et $x_2\geq\frac{1}{3}$, soit si ils appartiennent à $[\frac{1}{3}\ ;\ +\infty[$.

Donc sur $[\frac{1}{3}\ ;\ +\infty[$, la fonction h est strictement croissante (son taux d'accroissement est positif).

Tableau de variation de h :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$-\infty$
$h(x)$	$\searrow$	-5	$\nearrow$



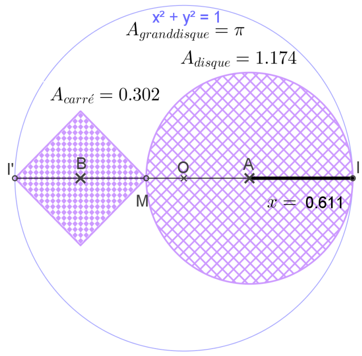
Intersection de la courbe de h avec les axes :

$h(0)=0^0+0-4=-4$ donc la courbe passe par le point de coordonnées (0 ;-4).

$h(x)=0$ pour $(3x-1)^2-5=0$, soit pour $(3x-1+\sqrt{5})(3x-1-\sqrt{5})=0$. Il y a deux solutions à cette équation, donc deux antécédents à 0 qui sont $\frac{1-\sqrt{5}}{3}\approx -0{,}412$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{3}\approx 1{,}079$ donc la courbe passe par les points ($\frac{1-\sqrt{5}}{3}$;0) et ($\frac{1+\sqrt{5}}{3}$;0).

IV] Problème

Dans un disque de rayon R=1 on insère un disque et un carré dans la configuration ci-contre où les centres *O, A* et *B* sont alignés. On veut étudier les variations de l'aire globale des deux figures lorsqu'on déplace le centre *A* du disque. On note *AI*=*x*. Dans quel intervalle varie *x* ?

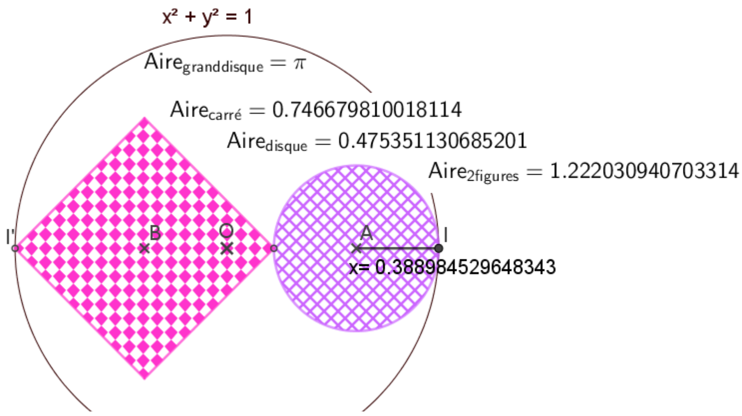


- Déterminer les aires des deux figures intérieures puis leur somme notée $A(x)$. Vérifier que l'on peut écrire $A(x)=x^2(\pi+2)-4x+2$.
- Mettre $A(x)$ sous la forme canonique. En déduire la valeur x_0 de x pour laquelle A passe par un minimum ainsi que la valeur $A(x_0)$ de ce minimum. Tracer le tableau de variation et la courbe de A.

Il faut limiter les variation de x à l'intervalle [0;1] car nous sommes dans une situation qui a ses propres contraintes. Si x<0 ou si x>1, le point A n'est plus sur le diamètre [*II'*] du cercle.

La diagonale du carré de centre B est $MI'=2-2x$ (le diamètre du cercle est 2R=2 et celui du petit est $2x$). D'après le théorème de Pythagore, son côté c est tel que $c^2+c^2=2c^2=(2-2x)^2=4(1-x)^2$. L'aire c^2 de ce carré mesure donc ½ de $4(1-x)^2$, soit $2(1-x)^2$.
L'aire du disque de centre A mesure : πx^2 .
La somme des aires des deux figures intérieures vaut donc : $A(x)=\pi x^2+2(1-x)^2=(\pi+2)x^2-4x+2$.
A est une fonction polynôme de degré 2 que l'on peut mettre sous la forme canonique :
$A(x)=(\pi+2)x^2-4x+2=(\pi+2)(x^2-\frac{4}{\pi+2}x+\frac{2}{\pi+2})=(\pi+2)((x-\frac{2}{\pi+2})^2-(\frac{2}{\pi+2})^2+\frac{2}{\pi+2})$, soit après simplification du dernier terme (après développement) : $A(x)=(\pi+2)(x-\frac{2}{\pi+2})^2+2-\frac{4}{\pi+2}$.
Le coefficient $\alpha=\pi+2$ étant positif, la fonction est décroissante puis croissante, le minimum étant atteint pour $x=\beta=\frac{2}{\pi+2}\approx 0{,}38898452965$. Le minimum est égal à $A(\beta)=\gamma=2-\frac{4}{\pi+2}=\frac{2\pi}{\pi+2}\approx 1{,}2220309407$.
L'aire globale des deux figures intérieures est minimale sur notre illustration.
Dans cette configuration, on a :

- l'aire du disque est égale à $\pi\beta^2=\frac{4\pi}{(\pi+2)^2}\approx 0{,}47535113069$
- l'aire du carrée est égale à $2(1-\beta)^2=2(\frac{\pi}{\pi+2})^2\approx 0{,}74667981002$



La courbe de la fonction est également donnée ci-dessous, l'abscisse du minimum étant déterminée par la fonction « calcul formel » de Geogebra.
Les valeurs de $A(0)$ et $A(1)$ sont les maxima de la fonction A sur cet intervalle, il faut les mettre dans le tableau.

- $A(0)=2$ (il n'y a alors qu'un grand carré de diagonale 2)
- $A(1)=\pi$ (il n'y a alors qu'un grand disque de rayon 1).

Voici le tableau de variation déduit de la forme canonique de A :

x	0		$\frac{2}{\pi+2}$		1
$A(x)$	2	↘	$\frac{2\pi}{\pi+2}$	↗	π