2de Simulations et autres situations algorithmiques

1) QCM

Un QCM comporte cinq questions. Pour chacune d'entre elles, quatre réponses sont proposées mais une seule est exacte. Une réponse juste vaut 2 points, une réponse fausse enlève 1 point et <u>lorsque le résultat est négatif on met 0</u>. On veut simuler cette situation pour des candidats qui donnent une réponse au hasard pour chacune des cinq questions. L'algorithme suivant simule cette situation et calcule la note moyenne obtenue par N candidats sans tenir compte de la contrainte soulignée plus haut.

- Entrer N (le nombre de candidats) ; Affecter 0 à T.
- Pour I allant de 1 à N : Affecter 0 à S ;
  Pour J allant de 1 à 5 : Affecter *random*() à R
  Si R≤0,25 Alors Affecter S+2 à S Sinon Affecter S-1 à S
  Affecter T+S à T
- Afficher T÷N

a) Que doit-on corriger dans l'algorithme pour tenir compte de la contrainte soulignée ?
b) Expliquer l'instruction conditionnelle « Si R≤0,25 Alors Affecter S+2 à S Sinon Affecter S-1 à S ».
(Que réalise t-elle ? À quoi sert le test R≤0,25 ?)
c) Programmer l'algorithme corrigé pour tenir compte de la contrainte soulignée, puis lancer trois fois le programme pour N=5, pour N=50 et pour N=500. Noter à chaque fois la note moyenne obtenue.
d) Ajouter un compteur pour déterminer le pourcentage de candidats ayant 0 à ce QCM. Donner ce pourcentage pour N=5, pour N=50 et pour N=500.

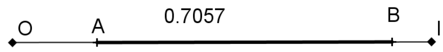
2) Inéquations

a) Déterminer à partir de quel entier n on a $1{,}01^n > 100$ (justifier en donnant $1{,}01^{n-1}$ et $1{,}01^n$ arrondis au dixième).
Déterminer, de même, à partir de quel entier n on a $\left(\frac{6}{7}\right)^n < 10^{-9}$ (justifier selon le même principe).
b) Déterminer à partir de quel entier n on a :

$$1{,}25+1{,}25^2+1{,}25^3+\ \dots\ +1{,}25^n>10^5$$

c) Quel algorithme, écrit en pseudo-langage (pas de syntaxe pour calculatrice), permet de répondre à la question b ?

3) Longueur au hasard



On choisit au hasard deux points A et B sur le segment $[OI]$ de longueur 1.
On veut déterminer la probabilité p d'obtenir une longueur AB supérieure ou égale à 0,5. Faute de savoir déterminer directement p, nous allons simuler cette expérience un grand nombre de fois et comptabiliser les fois où cet événement « $E_{0,5}$: obtenir une longueur AB supérieure ou égale à 0,5 » se réalise.
On va ainsi estimer $p=p(E_{0,5})$ à partir de la fréquence expérimentale f_e obtenue sur un échantillon de n tirages.

a) En notant a et b les abscisses de A et B, la distance AB se calcule par la formule $AB=\sqrt{(a-b)^2}$
>Programmer l'algorithme suivant sur votre calculatrice :

Saisir n (le nombre de tirages)
Affecter 0 à s
Pour i allant de 1 à n : Affecter un nombre aléatoire de l'intervalle [0;1[à a
  Affecter un nombre aléatoire de l'intervalle [0;1[à b ;
  Affecter $\sqrt{(a-b)^2}$ à d
  Si d≥0,5 alors affecter $s+1$ à s
Affecter $s÷n$ à s
afficher s

Noter que s comptabilise les fois où l'événement $E_{0,5}$ se réalise.
On affiche finalement $s÷n$ (affecté à s pour réduire le nombre de variables) qui est notre fréquence expérimentale f_e.

b) Lancer votre programme en prenant n=100, 1000, 10000 deux fois pour chaque valeur de n.
>Noter à chaque fois la valeur de f_e obtenue, puis calculer l'intervalle de confiance au seuil de 95%.

n	100	1000	10000
f_e pour le 1er tirage			
Intervalle de confiance 1			
f_e pour le 2ème tirage			
Intervalle de confiance 2			

c) Quelle taille doit avoir l'échantillon pour que l'intervalle de confiance ait une amplitude de 2×10^{-2} ? Noter qu'alors, la valeur estimée de p (le milieu de l'intervalle de confiance) est donnée avec une erreur maximale de 1×10^{-2}, c'est-à-dire 1%. Dans la pratique, on donnera la valeur la plus proche de p ayant 2 chiffres après la virgule.
Quelle est alors la meilleure estimation de p compatible avec vos données au seuil de 95% ?
Déterminer la taille N que doit avoir l'échantillon pour que l'intervalle de confiance ait une amplitude de 2×10^{-2} puis lancer votre programme avec cette valeur de N. En déduire la probabilité p au centième près.

Nous voudrions utiliser ce programme pour explorer davantage cette situation.
d) Quelles sont les probabilités des événements $E_{0,4}$ « obtenir une longueur AB supérieure ou égale à 0,4 », $E_{0,3}$ « obtenir une longueur AB supérieure ou égale à 0,3 », $E_{0,2}$, etc. ?
$p(E_{0,4})=$; $p(E_{0,3})=$; $p(E_{0,2})=$
L'idée est, ici, de réunir des points pour tracer le graphique donnant l'évolution de $p(E_x)$ en fonction de $x\in[0\ ;\ 1]$.

e) Améliorer le programme afin de déterminer une estimation de la moyenne des longueurs AB.

4) Tirages au sort

On veut simuler avec un algorithme, N tirages d'une pièce de monnaie équilibrée, en notant « 1 » l'apparition d'une « face » et « 0 » l'apparition d'un « pile ».
a) Écrivez un algorithme en pseudo-langage qui réalise ces tirages et détermine la valeur de la fréquence F d'apparition d'un « pile » pour N tirages.
b) Pour N=10, est-il étonnant d'obtenir pour cette fréquence la valeur F=0,3 ?
Même question si on procède à 100 tirages. On répondra à ces questions après avoir déterminé l'intervalle de confiance au seuil de 95% correspondant à l'expérience considérée.

5) Décimales de pi

Si l'on ne dispose que des décimales du nombre π pour générer une suite de tirages aléatoires de notre pièce, on peut décider de noter 0 (pile) lorsque le chiffre est pair et 1 (face) lorsqu'il est impair. Voici les 200 premières décimales de π :

3.1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128
4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196...

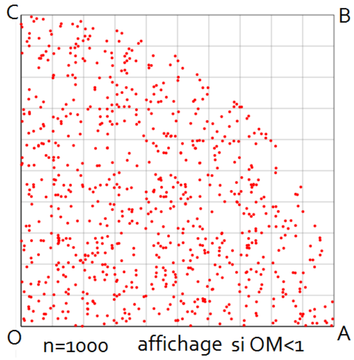
Les 10 premières décimales de la partie décimale (1415926535) contiennent ainsi 3 « piles » (les chiffres 4, 2 et 6). Complétez le tableau suivant qui donne la fréquence des piles dans les 20 premiers échantillons déterminés par cette série pseudo-aléatoire.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N.Pile	3																			
Fréq.	0,3																			

Calculer la fréquence moyenne de ces 20 échantillons.
Compléter le tableau qui présente la répartition de ces 20 fréquences et commenter cette répartition.

	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Effectif											
Fréq.											

6) Approcher π par la méthode de Monte-Carlo



On place un grand nombre de points aléatoires dans un carré $OABC$ de côté 1. On note $(x;y)$ les coordonnées du point aléatoire M.
a) Montrer qu'en réalisant n tirages aléatoires et en déterminant la fréquence des points dans le quart de disque OAC, on peut obtenir une approximation du nombre π (montrer pour cela que la fréquence des points M tels que $OM<1$ est une estimation du nombre $\frac{\pi}{4}$; en déduire l'approximation cherchée).
b) Écrire un algorithme permettant de simuler ces n tirages et d'en déduire l'approximation de π.
c) Programmer cet algorithme et lancer ce programme pour n=100, 1 000 et 10 000. On donnera l'intervalle de confiance pour chacun de ces échantillons.
d) Déterminer le nombre de tirages minimum qu'il faut réaliser pour obtenir une estimation de π à 10^{-4} près au seuil de 5%. Simuler cet échantillon à l'aide de votre programme et conclure.

7) Tirages au sort

On veut simuler avec un algorithme, N tirages d'une pièce de monnaie équilibrée, en notant « 1 » l'apparition d'une « face » et « 0 » l'apparition d'un « pile ».

a) Écrivez un algorithme en pseudo-langage qui réalise ces tirages et détermine la valeur de la fréquence F d'apparition d'un « pile » pour N tirages.

b) Pour N=10, est-il étonnant d'obtenir pour cette fréquence la valeur F=0,3 ?

Même question si on procède à 100 tirages. On répondra à ces questions après avoir déterminé l'intervalle de confiance au seuil de 95% correspondant à l'expérience considérée.