TD n°3 de Statistiques : Mesures de la dispersion

Les paramètres qui mesurent la dispersion *absolue* d'une série :

		inconvénients
Étendue	*différence entre les 2 valeurs extrêmes (Max−min)*	les 2 valeurs extrêmes seulement
Écart-inter-quartile	*différence entre les quartiles 1 et 3 (= Q_3-Q_1)*	élimination de 50% de l'effectif
Écart-moyen	*moyenne des écarts à la moyenne*	n 'est pas donné par la calculatrice
Écart-type	*racine carrée de la moyenne des carrés des écarts à la moyenne*	formule compliquée à comprendre

I] Calculs de l'étendue, de l'écart-moyen et de l'écart-type

Tailles (en *cm*) de 15 élèves :

178 – 180 – 181 – 182 – 178 – 182 – 179 – 178 – 182 – 178 – 178 – 179 – 180 – 180 – 182

✪ Déterminer l'*étendue* : $e = 182 - 178 = 4$.

L'écart-type est défini par la formule $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma n_i(x_i-\overline{x})^2}{\Sigma n_i}}$ mais il se calcule aussi avec la formule équivalente $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma n_i x_i^2}{\Sigma n_i}-\overline{x}^2}$ (racine carrée de la différence entre la moyenne des carrés et le carré de la moyenne) qui a l'avantage de n'introduire $\overline{x}$ qu'à la fin des calculs : on calcule $T_1=\Sigma n_i x_i$ et $T_2=\Sigma n_i x_i^2$ et, de là, on en déduit $\overline{x}$ et σ .

✪ Compléter le tableau ci-dessous.

x_i	178	179	180	181	182	183	Total	Moyenne	
n_i	5	2	3	1	4	0	15		
$n_i x_i$	890	358	540	181	728	0	2697	179,8	Écart-type
$n_i x_i^2$	158420	64082	97200	32761	132496	0	484959	32330,6	1,600
|xi-m|	1,8	0,8	0,2	1,2	2,2	3,2			
ni|xi-m|	9	1,6	0,6	1,2	8,8	0	21,2	1,41	
ni(xi-m)²	16,2	1,28	0,12	1,44	19,36	0	38,4	2,56	1,600

On trouve $T_1=\Sigma n_i x_i=2697$, $T_2=\Sigma n_i x_i^2=484959$ et $T_3=\Sigma n_i|x_i-\overline{x}|=21,2$.

✪ Calculer la moyenne $\overline{x}=\frac{T_1}{N}$ = $\overline{x}=\frac{2697}{15}=179,8$, la moyenne des carrés $\frac{T_2}{N}=\frac{484959}{15}=32330,6$, la variance $\sigma^2=32330,6-(179,8)^2=2,56$ et enfin l'écart-type $\sigma=\sqrt{2,56}=1,6$.

NB : L'autre formule, la définition de l'écart-type, donne le même résultat (7ème ligne du tableau) :
$\sigma=\sqrt{\frac{5(178-179,8)^2+2(179-179,8)^2+...+4(182-179,8)^2}{15}}=\sqrt{\frac{38,4}{15}}=1,6$.

✪ Calculs de l'écart-moyen : $e_m=\frac{21,2}{15}\approx 1,4$

(la 6ème ligne du tableau fait la moyenne des écarts à la moyenne)

L'écart-moyen nécessite le calcul préalable de $\overline{x}$ et entraîne une erreur d'arrondi si on ne garde pas sa valeur exacte.

↗ Comparer les résultats de ces trois paramètres qui mesurent la dispersion absolue de cette série des tailles.

Les trois paramètres de dispersion calculés indiquent, de façon légèrement différente, la même chose. L'étendue est toujours le plus grand résultat. Il faudrait d'ailleurs prendre la moitié de l'étendue pour comparer aux autres valeurs (qui mesurent de deux façons différentes l'écart des valeurs par rapport à la moyenne) : soit 2 fois cette demi-étendue. Vient ensuite l'écart-type : 1,6 qui est plus sensible aux valeurs extrêmes car leur carré pèse plus dans la moyenne. La plus petite mesure de la dispersion est donnée ici par l'écart-moyen : 1,4 environ. Est-ce toujours dans cet ordre que l'on trouve ordonnées ces valeurs ? Laissons la question ouverte. Chacun peut y réfléchir...

Maintenant, le commentaire que l'on peut faire : la moyenne des tailles est de 179,8 *cm* (ils sont plutôt grands) et la dispersion est faible, seulement 2 *cm* en plus ou en moins, et en moyenne environ 1,5 *cm* seulement (pour ne pas faire de jaloux on peut prendre la moyenne entre l'écart-type et l'écart-moyen) en plus ou en moins. Un Sherlock Holmes pourrait inférer qu'il s'agit d'une équipe de jeunes basketteurs vu la grande taille et la faible dispersion des valeurs (ils sont tous grands) mais sans doute manquons nous de certains éléments...

Utilisation du mode statistique de la calculatrice (voir pages 227-228 sur votre manuel) :

On entre les valeurs (x_i) et les effectifs (n_i) dans deux colonnes d'un tableau, puis on demande les statistiques à 1 variable (1Var) pour ces deux colonnes (onglet Stats sur la Numworks). On obtient tous les paramètres calculés ici plus quelques autres que vous reconnaîtrez comme Q_1, M et Q_3 (simplement déterminés, ne s'agissant pas de classe). On obtient Q_1=178, M=180 et Q_3=182 : ce sont des entiers car on a considéré qu'il ne s'agissait pas de classes réunissant tout le continuum des valeurs. En réalité la taille 180 *cm* par exemple est une classe d'amplitude 1 *cm*, que l'on pourrait prendre égale à [179,5 ; 180,5[ou bien]179,5 ; 180,5]. Dans ce cas, on trouverait une médiane M appartenant à la classe mais pas forcément entière.

II] Comparaison de séries statistiques

Calculs d'indicateurs *relatifs* de la dispersion : en divisant un indicateur absolu par une valeur centrale (moyenne, médiane ou mode) on obtient un indicateur relatif (sans unité) qui peut être utilisé pour comparer des séries très différentes. L'écart-type relatif $\frac{\sigma}{\bar{x}}$ est appelé *coefficient de variation*.

Voici les notes moyennes de maths et physique/chimie pour le 1er trimestre d'un groupe de douze élèves :

Maths	10	10,3	15	19	16,8	16,5	17,5	11	13,5	15,5	12,7	10,2
Phys./Ch.	9,2	10	10,8	14,6	12,6	14,1	15,2	8,9	12,1	12	12,7	7,4

✪ Déterminer la moyenne, l'écart-type et les coefficients de variation de ces deux séries

voir le tableau ci-contre.

NB : On peut utiliser la calculatrice en mode statistique pour cela : il faut entrer les deux colonnes de valeurs et aussi une 3ème colonne pour les effectifs (égaux à 1 pour chaque valeur).

	Σx_i	Σx_i^2	$\bar{x}$	σ
Maths	168	2461,66	14	3,02
Phys./Ch.	139,6	1688,72	11,63	2,32

Pour la Numworks, on peut entrer les couples de valeurs $(x_i ; y_i)$ dans le module « Régression » et obtenir les statistiques dans l'onglet Stats de ce module.

✍ Comparer ces deux séries.

La moyenne de maths est de 2,32 points supérieure à celle de physique. L'écart-type en maths est aussi plus élevé qu'en physique (de 0,7 points dans la série des 12 notes). En valeurs relatives, les coefficients de variation sont de 0,22 (en maths) et 0,20 (en physique) : les notes s'écartent en moyenne de 0,22 fois la moyenne en maths et de 0,20 fois la moyenne en physique. C'est quasiment la même dispersion relative.

Un commentaire sur ces notes :

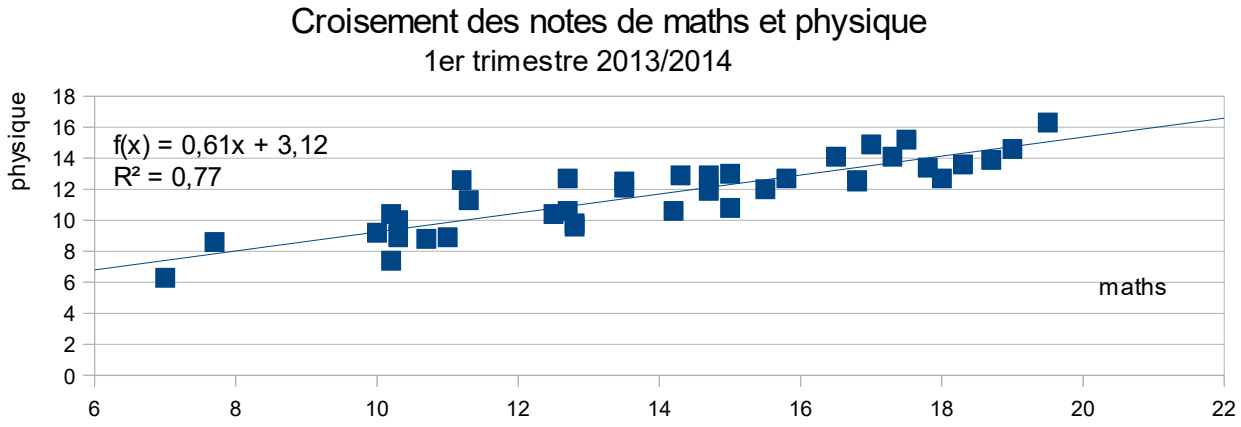
On ne va pas supposer des différences d'aptitudes différentes chez les élèves (mais cela peut exister individuellement) mais plutôt ici, une différence de notation des professeurs (c'est un parti-pris, quelque chose dont il faut se méfier en général car il peut orienter le jugement sur une fausse piste...). En maths, la notation est plus élevée, plus généreuse (plus de 2 points en moyenne c'est beaucoup) qu'en physique. On peut remarquer aussi que c'est essentiellement pour les meilleures notes que cet effet se fait ressentir, les moins bonnes moyennes sont quasiment égales dans les deux matières. Si on compare les écart-types, on s'aperçoit que la dispersion des notes est quasiment identique, si on se raisonne en valeurs relatives. Les valeurs absolues des écart-types donnent un écart moyen par rapport à la moyenne, or celle-ci est plus élevée en maths, donc un écart-type plus élevé est normalement attendu, même si les dispersions relatives étaient rigoureusement égales.

Prolongement : reporter les points de coordonnées $(m;p)$ où m est la note de maths et p la note de physique/chimie dans un graphique. Vous obtenez un nuage de points. Ce nuage vous semble t-il traduire une liaison entre les deux notes moyennes? Que signifie cette liaison éventuelle?

Les utilisateurs de la Numworks trouveront le résultat attendu sur l'onglet Graphique du module Régression. Je ne peux exactement copier l'écran obtenu, mais on y voit les points distribués dans un nuage allongé et une droite qui traverse ce nuage. L'équation de la droite est ici : $y = 0{,}678\,x + 2{,}141$.

Voici les résultats pour la série complète des 38 notes de la classe (il s'agissait d'une classe de 2de que j'ai eu en 2013), le tableau de calcul et le nuage de points. Nous remarquons que ce nuage est très fortement étiré en forme de droite. La droite tracée est appelée droite de régression (ce n'est pas au programme!). L'équation de cette droite, la meilleure possible qui s'ajuste au mieux à la série est donnée par le tableur :

$$y(\text{physique}) = 0{,}61 \times x(\text{maths}) + 3{,}12$$



Un élève qui aurait 0 en maths aurait 3,12 en physique.
Un élève qui aurait 0 en physique aurait $\frac{-3,12}{0,61} \approx -5,11$ en maths...
Un élève qui aurait 20 en maths aurait $0,61 \times 20 + 3,12 = 15,32$ en physique.
Un élève qui aurait 20 en physique aurait $\frac{20-3,12}{0,61} \approx 27,67$ en maths...
On mesure l'ajustement des données à cette droite par un coefficient appelé le coefficient de corrélation linéaire (pas, non plus, au programme!), noté R^2. Ici ce coefficient est de 0,77 ce qui indique une bonne corrélation (une corrélation parfaite serait obtenue pour R=1, une absence de corrélation pour R=0).
Ce genre de comparaison peut se poursuivre à l'infini. On peut introduire d'autres matières, étudier des groupements de matières ou d'élèves... On peut aussi étudier les évolutions dans le temps... On pourrait écrire un livre entier (pas très intéressant sans doute) sur les statistiques relatives aux élèves d'une classe mais on s'arrêtera aujourd'hui à la même étude entre les notes de maths et de français. En français, la moyenne est un peu comme en physique (11,29) mais l'écart-type est plus faible (1,95), l'écart-type relatif vaut 0,17. Le croisement maths/français donne le nuage de points suivant : On voit un alignement des points mais celui-ci est beaucoup moins marqué. Cela ne se voit pas forcément très bien mais lorsqu'on cherche la droite de régression, on s'aperçoit que celle-ci est presque horizontale (français=0,26maths+7,69) et surtout, le coefficient de corrélation est très faible (0,18) dénotant une quasi-indépendance des deux grandeurs. On aurait pu aussi bien tracer une droite complètement ou encore presque verticale, la corrélation n'aurait pas été beaucoup moins bonne. Le mieux à faire est sans doute de comparer les deux nuages avec des échelles identiques sur les axes.