2de TD n°1 : Fractions

1) Simplifier des écritures factionnaires

Pour simplifier la fraction $\frac{a}{b}$, il faut trouver un réel $k\neq 0$ tel que $a=k\,a'$ et $b=k\,b'$; dans ce cas $\frac{a}{b}=\frac{ka'}{kb'}=\frac{a'}{b'}$.
Par exemple, $\frac{8}{12}=\frac{4\times 2}{4\times 3}=\frac{2}{3}$ (ici *k* vaut 4), mais aussi $\frac{2x+2}{x^2-1}=\frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2}{x-1}$ (ici *k* vaut *x*+1).

- Simplifier les expressions suivantes : $A=\dfrac{3x-x^2(2x-1)}{3x(x+1)}$; $B=\dfrac{a^2b+2ac}{3a(1-2a)}$

Si *a* et *b* sont des entiers, on trouve la fraction *irréductible* en simplifiant par PGCD(*a*;*b*).

- Simplifier au maximum les fractions suivantes : $C=\dfrac{280}{300}$; $D=\dfrac{12345}{54321}$

Pour simplifier une expression fractionnaire contenant des racines carrées, on utilise la *quantité conjuguée*.
Par exemple $\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\frac{2\sqrt{2}+2}{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}+1$. La quantité conjuguée de $a+b\sqrt{c}$ est $a-b\sqrt{c}$.

- Simplifier les fractions suivantes : $E=\dfrac{2-\sqrt{5}}{1+2\sqrt{5}}$; $F=\dfrac{3-\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}$

2) Mettre sous la forme d'une seule fraction

Pour additionner deux fractions, il faut qu'elles aient le même dénominateur. Au pire : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{db}=\frac{ad+bc}{bd}$.
Si les dénominateurs ne sont pas *premiers entre eux*, on peut faire plus simple : $\frac{1}{8}+\frac{5}{12}=\frac{3}{8\times 3}+\frac{5\times 2}{12\times 2}=\frac{3+10}{24}=\frac{13}{24}$.

- Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A=\dfrac{\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{7}}{\dfrac{2}{3}\times\dfrac{5}{7}}\ ;\quad B=\dfrac{5+\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{3}}{5-\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{3}}\ ;\quad C=\dfrac{\dfrac{6}{30}}{\dfrac{3}{8}}+\dfrac{\dfrac{2}{15}}{5}+\dfrac{6}{\dfrac{15}{4}}\ ;\quad D=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}}$$

- Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une seule fraction (préciser les valeurs interdites) :

$$E=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}$$

$$F=1-\frac{2+x}{1-x^2}-\frac{1+x}{1-x}$$

$$G=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\times\frac{2}{x-y}$$

$$H=\dfrac{1+\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x+y}{x-y}-1}$$

$$I=\dfrac{\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}}{x+\dfrac{x(x-1)}{x+1}}$$

3) Égalités

Une *identité* est une égalité vraie quelle que soit la valeur de la (des) variable(s) présente(s).

- Montrer que $ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$, puis en déduire 22×28 sans effectuer la multiplication.
- Montrer que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$, puis en déduire la valeur exacte de
$$S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ \dots\ +\frac{1}{2016\times 2017}\ .$$

Une *équation* est une égalité vraie seulement pour certaine(s) valeur(s) de la (des) variable(s) présente(s), éventuellement aucune valeur. Résoudre une équation c'est en déterminer toutes les valeurs.

- Résoudre l'équation $4x+x+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-x\right)=1$.

Ce texte est traduit du livre de Al-Khawarizmi, *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison* (820) : « Un homme meurt et laisse quatre fils et il fait, à un homme, une donation égale à la part d'un de ses fils et, à un autre, le quart de la différence entre le tiers de l'héritage et la première donation. »

- Quelle est le montant de la donation ?

- Résoudre les équations $3(2x+7)=4x^2+14x$; $\dfrac{3(2x+7)}{4x^2+14x}=\dfrac{5}{4x}$