1) Simplifier des écritures factionnaires

Pour simplifier la fraction $\frac{a}{b}$, il faut trouver un réel $k\neq 0$ tel que $a=k\,a'$ et $b=k\,b'$; dans ce cas $\frac{a}{b}=\frac{ka'}{kb'}=\frac{a'}{b'}$.
Par exemple, $\frac{8}{12}=\frac{4\times 2}{4\times 3}=\frac{2}{3}$ (ici k vaut 4), mais aussi $\frac{2x+2}{x^2-1}=\frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2}{x-1}$ (ici k vaut $x+1$).

- Simplifier les expressions suivantes : $A=\frac{3x-x^2(2x-1)}{3x(x+1)}$; $B=\frac{a^2b+2ac}{3a(1-2a)}$

$A=\frac{3x-x^2(2x-1)}{3x(x+1)}=\frac{x(3-x(2x-1))}{3x(x+1)}=\frac{3-x(2x-1)}{3(x+1)}$.
On a simplifié par x, ce qui ne peut se faire que si $x\neq 0$.
$B=\frac{a^2b+2ac}{3a(1-2a)}=\frac{a(ab+2c)}{3a(1-2a)}=\frac{ab+2c}{3(1-2a)}$
On a simplifié par a, ce qui ne peut se faire que si $a\neq 0$.

Si a et b sont des entiers, on trouve la fraction *irréductible* en simplifiant par PGCD(a;b).

- Simplifier au maximum les fractions suivantes : $C=\frac{280}{300}$; $D=\frac{12345}{54321}$

$C=\frac{280}{300}=\frac{28}{30}=\frac{14}{15}$ en simplifiant directement, par 10 d'abord, par 2 ensuite donc par 10×2=20 finalement.
La recherche du PGCD avec l'algorithme d'Euclide :
300=1×280+20 ; 280=14×20+0 ; le dernier reste non nul étant 20, PGCD(300;280)=20.
Cherchons le PGCD de 12345 et 54321 avec l'algorithme d'Euclide :
54321=4×12345+4941 ; 12345=2×4941+2463 ; 4941=2×2463+15 ; 2463=164×15+3 ; 15=5×3+0
le dernier reste non nul étant 3, PGCD(54321;12345)=3. On ne peut simplifier que par 3 (ce qu'on aurait pu faire directement car on sait reconnaître les multiples de 3).
$D=\frac{12345}{54321}=\frac{3\times 4115}{3\times 18107}=\frac{4115}{18107}$, et c'est tout.

Pour simplifier une expression fractionnaire contenant des racines carrées, on utilise la *quantité conjuguée*.
Par exemple $\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\frac{2\sqrt{2}+2}{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}+1$. La quantité conjuguée de $a+b\sqrt{c}$ est $a-b\sqrt{c}$.

- Simplifier les fractions suivantes : $E=\frac{2-\sqrt{5}}{1+2\sqrt{5}}$; $F=\frac{3-\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}$

$E=\frac{2-\sqrt{5}}{1+2\sqrt{5}}=\frac{(2-\sqrt{5})(1-2\sqrt{5})}{(1+2\sqrt{5})(1-2\sqrt{5})}=\frac{2-\sqrt{5}-4\sqrt{5}+2\times 5}{1^2-(2\sqrt{5})^2}=\frac{12-5\sqrt{5}}{-19}=\frac{-12+5\sqrt{5}}{19}$, soit $\frac{-12}{19}+\frac{5\sqrt{5}}{19}$.
$F=\frac{3-\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}=\frac{(3-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}=\frac{3x-x\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3}{x^2-3}=\frac{x(3-\sqrt{3})+3(\sqrt{3}-1)}{x^2-3}$, le numérateur a été mis sous la forme $ax+b$ (forme développée standard d'une expression affine) ce qui n'est pas forcément utile.

2) Mettre sous la forme d'une seule fraction

Pour additionner deux fractions, il faut qu'elles aient le même dénominateur. Au pire : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{db}=\frac{ad+bc}{bd}$.
Si les dénominateurs ne sont pas *premiers entre eux*, on peut faire plus simple : $\frac{1}{8}+\frac{5}{12}=\frac{3}{8\times 3}+\frac{5\times 2}{12\times 2}=\frac{3+10}{24}=\frac{13}{24}$.

- Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A=\frac{\frac{2}{3}+\frac{5}{7}}{\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}}=\frac{\frac{14+15}{21}}{\frac{10}{21}}=\frac{29}{21}\times\frac{21}{10}=\frac{29}{10}=2{,}9$$

$$B=\frac{5+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{5-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5\times 12+3\times 3-4\times 1}{12}}{\frac{5\times 12-3\times 3+4\times 1}{12}}=\frac{\frac{60+9-4}{12}}{\frac{60-9+4}{12}}=\frac{60+9-4}{60-9+4}=\frac{65}{55}=\frac{13}{11}$$

$$C=\frac{\frac{6}{30}}{\frac{3}{8}}+\frac{\frac{2}{15}}{5}+\frac{6}{\frac{15}{4}}=\frac{1}{5}\times\frac{8}{3}+\frac{2}{15}\times\frac{1}{5}+6\times\frac{4}{15}=\frac{8\times5+2+24\times5}{5\times15}=\frac{42+120}{75}=\frac{162}{75}=\frac{54}{25}$$

$$D=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{2}{5}}}=1+\frac{1}{2+\frac{5}{12}}=1+\frac{12}{29}=\frac{41}{29}.$$

Remarque, ce nombre, qui vaut environ 1,4137931, est une très bonne approximation de $\sqrt{2}$ (2 décimales exactes). Les meilleurs approximations rationnelles de ce nombre irrationnel étant obtenues par des fractions continues de ce type.

Si on veut une meilleure approximation rationnelle de $\sqrt{2}\approx1{,}414213562$, il faut prendre

$$1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}=\frac{99}{70}\approx1{,}4142857$$ (4 décimales exactes).

➢ Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une seule fraction (préciser les valeurs interdites) :

$$E=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}=\frac{1-x}{(1+x)(1-x)}-\frac{1+x}{(1+x)(1-x)}=\frac{1-x-(1+x)}{1^2-x^2}=\frac{1-x-1-x}{1-x^2}=\frac{-2x}{1-x^2}$$

Il faut signaler ici que l'expression de départ n'est pas définie pour $x=\pm1$.

$$F=1-\frac{2+x}{1-x^2}-\frac{1+x}{1-x}=\frac{1-x^2}{1-x^2}-\frac{2+x}{1-x^2}-\frac{(1+x)^2}{(1+x)(1-x)}=\frac{1-x^2-(2+x)-(1+x)^2}{1-x^2}=\frac{1-x^2-2-x-1-2x-x^2}{1-x^2}$$

$F=\frac{-2x^2-3x-2}{1^2-x^2}=\frac{2x^2+3x+2}{x^2-1}$, la dernière expression a échangé les signes entre le numérateur et le dénominateur (pour simplifier l'écriture). Ici aussi, on doit avoir $x=\pm1$.

$$G=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\times\frac{2}{x-y}=\frac{y-x}{xy}\times\frac{2}{x-y}=\frac{-2(x-y)}{xy(x-y)}=\frac{-2}{xy}.$$

Ici, on doit avoir $x\neq0$, $y\neq0$ pour que G soit définie et aussi $x\neq y$ (car on a simplifié par $x-y$).
Les couples suivants sont interdits : $(0;y)$, $(x;0)$ et $(x;x)$, pour toutes valeurs de x et de y.

$$H=\frac{1+\frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y}-1}=\frac{\frac{x+y}{x+y}+\frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x-y}}=\frac{\frac{2x}{x+y}}{\frac{2y}{x-y}}=\frac{2x(x-y)}{2y(x+y)}=\frac{x(x-y)}{y(x+y)}.$$

Ici, on doit avoir $y\neq0$, $x\neq y$, $x\neq-y$.
Les couples suivants sont interdits : $(x;0)$, $(x;x)$ et $(x;-x)$, pour toutes valeurs de x.

$$I=\frac{\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}}{x+\frac{x(x-1)}{x+1}}=\frac{\frac{x(x-1)+x(x+1)}{(x-1)(x+1)}}{\frac{x(x+1)+x(x-1)}{x+1}}=\frac{(x+1)(x(x-1)+x(x+1))}{(x-1)(x+1)(x(x-1)+x(x+1))}=\frac{1}{x-1}.$$

La simplification par $x(x-1)+x(x+1)=x(x-1+x+1)=2x^2$ oblige à prendre $x\neq0$. On a aussi simplifié par $x+1$, donc $x\neq-1$. Et pour que I soit défini, il faut aussi que $x\neq1$.

3) Égalités

Une *identité* est une égalité vraie quelle que soit la valeur de la (des) variable(s) présente(s).

➢ Montrer que $ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$, puis en déduire 22×28 sans effectuer la multiplication.

Le plus simple est de développer le membre de droite : $\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}=\frac{a^2+b^2+2ab-(a^2+b^2-2ab)}{4}=\frac{2ab+2ab}{4}=\frac{4ab}{4}=ab$.

Cette égalité est vraie pour tous les réels a et b, c'est donc une identité.

Elle permet de calculer certains produits en n'effectuant que des additions, soustractions, élévation au carré et une division par 4 : $22\times28=\frac{(28+22)^2-(28-22)^2}{4}=\frac{50^2-6^2}{4}=\frac{2500-36}{4}=\frac{2464}{4}=616$.
Remarque : $50^2-6^2=(50-6)(50+6)=44\times56$ mais on ne va pas calculer ce produit...

- Montrer que $\forall\ n\in\mathbb{N}^*, \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$, puis en déduire la valeur exacte de $S=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ \dots\ +\frac{1}{2016\times2017}$.

$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$.

Pour que ces fractions existent, il faut que $n\neq0$ et $n\neq-1$.
Si n est un entier naturel, il faut donc qu'il soit différent de 0.
Bien sûr, il faut remplacer toutes les fractions de cette somme par ce qu'apporte la propriété que l'on vient d'établir : $\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, etc. $\frac{1}{2016\times2017}=\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}$. On a donc :

$S=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ \dots\ +\frac{1}{2016\times2017}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ \dots\ +\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2017}=\frac{2016}{2017}$.

Une *équation* est une égalité vraie seulement pour certaine(s) valeur(s) de la (des) variable(s) présente(s), éventuellement aucune valeur. Résoudre une équation c'est en déterminer toutes les valeurs.

- Résoudre l'équation $4x+x+\frac{1}{4}(\frac{1}{3}-x)=1$.

C'est une équation du 1er degré tout à fait ordinaire pour un ex-élève de 3ème :

$4x+x+\frac{1}{4}(\frac{1}{3}-x)=1 \Leftrightarrow (4+1-\frac{1}{4})x+\frac{1}{3\times4}=1 \Leftrightarrow \frac{19}{4}x=\frac{-1}{12}+1=\frac{11}{12} \Leftrightarrow x=\frac{11}{12}\div\frac{19}{4}=\frac{11}{12}\times\frac{4}{19}=\frac{11}{57}$.

Ce texte est traduit du livre de Al-Khawarizmi, *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison* (820) : « Un homme meurt et laisse quatre fils et il fait, à un homme, une donation égale à la part d'un de ses fils et, à un autre, le quart de la différence entre le tiers de l'héritage et la première donation. »

- Quelle est le montant de la donation ?

Une remarque s'impose : le texte n'est pas très clair et la situation semble compliquée. L'héritage total est une inconnue et la part donnée à un des fils du défunt en est une autre. Si on note cette dernière inconnue x, et si on considère que l'héritage total est l'unité, notée 1 (si on veut c'est 100% de l'héritage), alors :
la part des quatre fils est égale à $4x$, la première donation est égale à x, le tiers de l'héritage étant $\frac{1}{3}$ le quart de la différence entre le tiers de l'héritage et la première donation est $\frac{1}{4}(\frac{1}{3}-x)$. Au final, le texte se traduit par l'équation que l'on a résolu plus haut.
La première donation qui vaut la part d'un fils est égale à $\frac{11}{57}$ de l'héritage.
La seconde donation est $1-5\times\frac{11}{57}=\frac{57-5\times11}{57}=\frac{2}{57}$.
L'auteur *Al-Khawarizmi* est un des fondateurs de l'algèbre moderne.
Son nom a conduit au mot *algorithme* que nous utiliserons beaucoup cette année.

- Résoudre les équations $3(2x+7)=4x^2+14x$

$3(2x+7)=4x^2+14x \Leftrightarrow 3(2x+7)=2x(2x+7) \Leftrightarrow 3=2x$, si $2x+7\neq0$.
Donc $x=\frac{3}{2}$ est une solution (c'est bien différent de la valeur qui annule $2x+7$ qui vaut $\frac{-7}{2}$).
Mais il y a aussi $\frac{-7}{2}$ comme solution car alors l'égalité devient 0=0, elle est donc vérifiée.
Il y a donc, finalement, deux solutions : $\frac{-7}{2}$ et $\frac{3}{2}$. L'ensemble des solutions est S={ $\frac{-7}{2}$; $\frac{3}{2}$ }.
Remarque : sans la factorisation du 2d membre :
$3(2x+7)=4x^2+14x \Leftrightarrow 6x+21=4x^2+14x \Leftrightarrow 4x^2+8x-21=0$. C'est une équation du 2d degré que l'on ne sait, en principe, pas résoudre en début de 2de.
L'idée est d'écrire $4x^2+8x-21=0 \Leftrightarrow 4(x^2+2x-\frac{21}{4})=0$.
Il faut donc résoudre $x^2+2x-\frac{21}{4}=0$ que l'on écrit $(x+1)^2-1-\frac{21}{4}=0$, soit $(x+1)^2-\frac{25}{4}=0$.
Il n'y a plus qu'à factoriser : $(x+1-\frac{5}{2})(x+1+\frac{5}{2})=0 \Leftrightarrow (x+\frac{-3}{2})(x+\frac{7}{2})=0$, et l'on retrouve bien les deux solutions.

$$\frac{3(2x+7)}{4x^2+14x}=\frac{5}{4x}$$

$\frac{3(2x+7)}{4x^2+14x}=\frac{5}{4x} \Leftrightarrow \frac{3(2x+7)}{2x(2x+7)}=\frac{5}{4x} \Leftrightarrow \frac{3}{2x}=\frac{5}{4x}$, si $2x+7\neq 0$

Et si, de plus, $x\neq 0$, on doit avoir $3\times 4x=5\times 2x \Leftrightarrow 12x=10x \Leftrightarrow 12=10$ ce qui est toujours faux.

Cette équation n'a donc aucune solution.

Remarque : sans la factorisation du dénominateur et la simplification du 1^er^ membre :

$\frac{3(2x+7)}{4x^2+14x}=\frac{5}{4x} \Leftrightarrow 3\times 4x(2x+7)=5\times(4x^2+14x)$, si $2x+7\neq 0$ et si $x\neq 0$ (on a écrit l'égalité des produits en croix, en rappelant qu'elle n'est équivalente à l'égalité de départ que si les dénominateurs sont non nuls).

On obtient alors $12x(2x+7)=20x^2+70x \Leftrightarrow 24x^2+84=20x^2+70x \Leftrightarrow 4x^2+14=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{-7}{2}$ ce qui est impossible. On retrouve bien l'absence de solution. S= $\emptyset$.