1) 1er degré (4 pts)

a) Résoudre l'équation E$_1$: $(4x+3)^2-8(2x^2-1)=0$.

E$_1$ s'écrit successivement $16x^2+24x+9-16x^2+8=0$ puis $24x+17=0$ car le terme de degré 2 disparaît.

C'est une équation du 1er degré qui a pour solution $x=\frac{-17}{24}$.

b) Discuter, selon la valeur de *c*, le nombre de solutions de l'équation E$_2$: $x^2-10x+c=0$.
Donner, lorsqu'elles existent, les solutions en fonction de *c*.

E$_2$ s'écrit successivement $(x-5)^2-5^2+c=0$ puis $(x-5)^2-(25-c)=0$.

- Il y a donc deux solutions si $25-c>0$, soit pour $c<25$.
  Les solutions sont $5+\sqrt{25-c}$ et $5-\sqrt{25-c}$ car alors l'expression du membre de gauche de l'équation se factorise en $(x-5-\sqrt{25-c})(x-5+\sqrt{25-c})$.
- Il y a une seule solution si $25-c=0$, soit pour $c=25$.
  Cette unique solution est 5 car alors E$_2$ se réduit à $(x-5)^2=0$.
- Il n'y a aucune solution si $25-c<0$, soit pour $c>25$ car alors, l'expression du membre de gauche de l'équation ne se factorise pas (c'est la somme d'un nombre positif et d'un nombre supérieur à 0, donc cela ne pourra pas s'annuler).

On peut répondre en calculant le discriminant : $\Delta=10^2-4c=4(25-c)$.
La discussion porte encore sur le signe de $25-c$. La conclusion est identique.

2) 2^d degré (4 pts)

a) Après avoir mis au même dénominateur, résoudre l'équation E$_3$: $\frac{x+2}{x}+\frac{x}{x-2}=0$.

E$_3$ s'écrit successivement $\frac{(x+2)(x-2)+x^2}{x(x-2)}=0$; $\frac{x^2-4+x^2}{x(x-2)}=0$; $\frac{2(x^2-2)}{x(x-2)}=0$.

Le dénominateur ne doit pas s'annuler, donc *x* ne peut être égal ni à 0 ni à 2.
Les valeurs « interdites » sont donc 0 et 2.
Le numérateur s'écrit $2(x^2-2)=2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.
Il y a donc deux solutions (celles qui annulent le numérateur) à cette équation : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, qui sont bien différentes des valeurs interdites.

b) Utiliser la forme et les résultats précédents pour résoudre l'inéquation I$_1$: $\frac{x+2}{x}+\frac{x}{x-2}\leq 0$.

I$_1$: $\frac{2(x^2-2)}{x(x-2)}\leq 0$

Il y a 4 facteurs à prendre en compte, qui s'annulent pour les valeurs suivantes, rangées dans l'ordre croissant : $-\sqrt{2}$, 0, $\sqrt{2}$ et 2.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$-2x$		−		−		−	0	+		+	
$x+\sqrt{2}$		−	0	−		+		+		+	
x		−		−	0	+		+		+	
$x-2$		−		−		−		−	0	+	
$Q(x)$		+	0	−	||	+	0	−	||	+	

L'inéquation I$_1$ a donc pour solution

D'après notre tableau ci-dessus, les solutions de l'inéquation sont $x\in[-\sqrt{2};0[\cup]\sqrt{2};2[$.

3) 3ème degré (4 pts)

Soit *f* la fonction définie par $f(x)=2x^3-7x^2-17x+10$.

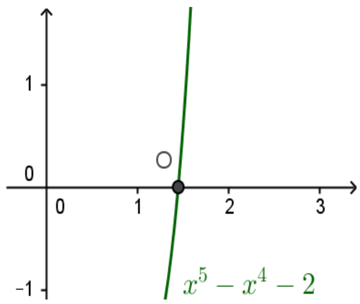
a) Calculer $f(-2)$. En déduire que *f* peut se factoriser sous la forme $f(x)=(x+2)(ax^2+bx+c)$ où *a*, *b* et *c* sont des nombres à déterminer.

$f(-2)=2\times(-2)^3-7\times(-2)^2-17\times(-2)+10=-16-28+34+10=0$, donc on peut mettre $(x+2)$ en facteur dans $f(x)$, qui se transforme ainsi en $f(x)=(x+2)(ax^2+bx+c)$.

Les paramètres a et c se déduisent directement, par identification des termes de degré 3 : pour que $ax^3=2x^3$, il faut que a soit égal à 2, et des termes de degré 0 : pour que $2\times c=10$, il faut que c soit égal à $\frac{10}{2}=5$. On a donc $f(x)=(x+2)(2x^2+bx+5)$.
Pour déterminer b, on peut utiliser indifféremment le terme de degré 2 : $(2a+b)x^2=-7x^2$, d'où $2a+b=-7$ et donc, comme a=2, $b=-7-2\times 2=-7-4=-11$, ou de degré 1 : $(2b+c)x=-17x$ d'où $2b+c=-17$ et donc, comme c=5, $b=\frac{-17-5}{2}=\frac{-22}{2}=-11$.
Dans les deux cas, on trouve que b doit valoir -11. Ainsi, $f(x)=(x+2)(2x^2-11x+5)$.

b) Résoudre l'équation E$_4$: $f(x)=0$
E$_4$: $(x+2)(2x^2-11x+5)=0$. Le second facteur est une expression du 2^d degré qui a pour discriminant $\Delta=(-11)^2-4\times 2\times 5=121-40=81=9^2$. Elle s'annule donc pour $x=\frac{11\pm 9}{4}$, soit pour $x=\frac{20}{4}=5$ et pour $x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. E$_4$ a donc trois solutions qui sont -2, $\frac{1}{2}$ et 5.

4) 4$^{\text{ème}}$ degré (4 pts)
La fonction g est définie par $g(x)=x^5-x^4-2$.
Nous voulons déterminer une valeur approchée de x_O, la solution de l'équation E$_5$: $g(x)=0$ à l'aide de l'algorithme de dichotomie.



a) D'après la représentation graphique ci-contre donnant une partie de la courbe de g sur [0;3], donner un intervalle d'amplitude 1 contenant x_O.
On voit que l'intervalle [1;2] contient la solution x_O de E$_5$.

b) Dresser un tableau sur le modèle suivant où X, Y et Z sont déterminés au centième près, avec suffisamment d'étapes pour pouvoir affirmer que $x_O \approx C$ à 10^{-1} près.

N° étape	A	B	$C=\frac{A+B}{2}$	$X=g(A)$	$Y=g(B)$	$Z=g(C)$	Signe de $X\times Z$	$B-A$
1	1	2	1,5	-2	14	≈0,53	<0	1
2	1	1,5	1,25	-2	≈0,53	≈-1,39	>0	0,5
3	1,25	1,5	1,375	≈-1,39	≈0,53	≈-0,65	>0	0,25
4	1,375	1,5	1,4375	≈-0,65	≈0,53	≈-0,13	>0	0,125
5	1,4375	1,5	1,46875	≈-0,13	≈0,53	≈0,18	<0	0,0625

Lorsque $B-A$ =0,125 la moitié de l'amplitude vaut 0,0625<0,1 on peut donc donner $C=\frac{A+B}{2}$ =1,4375 comme valeur approchée de x_O à 10^{-1} près. Finalement, $x_O \approx 1{,}4\pm 0{,}1$.

c) Déterminer, à l'aide de votre programme, une valeur approchée de x_O à la précision 10^{-6}.
En programmant l'algorithme sur la calculatrice, on trouve $x_O \approx 1{,}451085 \pm 0{,}000001$.
Ce n'était pas demandé, mais il a fallu aller jusqu'à l'étape 20 pour trouver ce résultat.

5) Problème (4 pts) : distance d'un point à une droite
a) Dans un repère orthonormé, $M(x\,;y)$ est un point de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=x+3$.
Le point A a pour coordonnées $A(2\,;3)$. A est-il sur $\mathcal{D}$? (justifier la réponse).
Non car 3=2+3 est une égalité fausse, or il faudrait qu'elle soit vraie pour que A soit sur $\mathcal{D}$.
Déterminer AM^2 en fonction de x*.

* *La distance entre les points A et B dans un repère orthonormé est donné par la formule*
$$AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2.$$

$AM^2=(x-2)^2+(y-3)^2$, mais comme $M(x\,;y)$ est sur la droite $\mathcal{D}$, on a $y=x+3$ et donc :
$AM^2=(x-2)^2+(x+3-3)^2=x^2-4x+4+x^2=2x^2-4x+4=2(x^2-2x+2)$.
Montrer que, pour tout x réel, $AM^2\geq d^2$ et donc que $AM\geq d$ où d est un réel positif à déterminer.
Le réel d est appelé « distance entre le point A et la droite $\mathcal{D}$ ».

$AM^2=2(x^2-2x+2)=2((x-1)^2+1)$, or $(x-1)^2\geq 0, \forall\ x\in\mathbb{R}$, donc $(x-1)^2+1\geq 1, \forall\ x\in\mathbb{R}$ et donc $AM^2\geq 2, \forall\ M\in \mathcal{D}$.
En prenant $d^2=2$, on a bien $AM^2\geq d^2, \forall\ M\in \mathcal{D}$.
On déduit de l'inégalité précédente que $AM\geq\sqrt{2}, \forall\ M\in \mathcal{D}$.
La distance entre le point A et la droite $\mathcal{D}$ est donc égale à $\sqrt{2}$.

b) Déterminer la distance entre le point $B(-2\ ;\ 2)$ et la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $y=2x+11$.
$BM^2=(x+2)^2+(y-2)^2$, mais comme $M(x\ ;\ y)$ est sur la droite $\mathcal{D}'$, on a :
$BM^2=(x+2)^2+(2x+11-2)^2=x^2+4x+4+4x^2+36x+81=5x^2+40x+85=5(x^2+8x+17)$.
$x^2+8x+17=(x+4)^2-16+17=(x+4)^2+1$. Or, $(x+4)^2+1\geq 1, \forall\ x\in\mathbb{R}$
$BM^2\geq 5$ car $5((x+4)^2+1)\geq 5$, c'est-à-dire $BM\geq\sqrt{5}, \forall\ M\in \mathcal{D}'$.
La distance entre le point B et la droite $\mathcal{D}'$ est donc égale à $\sqrt{5}$.

Bonus (1 pt) : Trouver, s'ils existent, deux nombres x et y dont la somme est 6 et le produit 1.
En notant x un de ces nombres, l'autre doit valoir $6-x$ pour que la somme fasse 6. Il faut avoir $x(6-x)=1$ et donc $-x^2+6x-1=0$ ou encore $-(x^2-6x+1)=0$ ou aussi $-((x-3)^2-3^2+1)=0$ ou $-((x-3)^2-8)=0$, donc finalement $-(x-3-\sqrt{8})(x-3+\sqrt{8})=0$. On trouve deux solutions $x=3+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}\approx 5{,}828$ et $x=3-\sqrt{8}=3-2\sqrt{2}\approx 0{,}172$ qui sont en fait les deux nombres cherchés.

Méthode de Diophante : on introduit une 3ème variable, notée z, qui répond à la double condition : $x=\frac{6}{2}+z=3+z$ et $y=\frac{6}{2}-z=3-z$. Le produit xy vaut alors $xy=(3+z)(3-z)=1$. Cela conduit à l'équation $9-z^2=1$ qui conduit à $z^2=8$ et donc $z=\pm\sqrt{8}$ ce qui nous ramène aux deux solutions trouvées.