# *CORRECTION*

1) Second degré (6 pts)

a) Montrer que l'expression $2x^2-12x+1$ peut s'écrire $a[(x-b)^2+c]$ où *a, b* et *c* sont des réels à déterminer. En déduire les solutions de l'équation $E_1$ : $2x^2-12x+1=0$.

On a $2x^2-12x+1=2[x^2-6x+\frac{1}{2}]=2[(x-3)^2-3^2+\frac{1}{2}]=2[(x-3)^2-\frac{17}{2}]$.

$E_1$ s'écrit $2[(x-3)^2-\frac{17}{2}]=0$ d'où $(x-3)^2-\frac{17}{2}=0\Leftrightarrow(x-3-\frac{\sqrt{17}}{2})(x-3+\frac{\sqrt{17}}{2})=0$.

Les solutions de cette équation sont $x=3+\sqrt{\frac{17}{2}}$ et $x=3-\sqrt{\frac{17}{2}}$.

b) Pour résoudre l'inéquation $I_1$ : $\frac{1}{x-1}\leq\frac{x+1}{x-2}$, exprimer $I_1$ sous la forme $\frac{P(x)}{(x-1)(x-2)}\geq 0$ où $P(x)$ est une expression à déterminer. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, P(x)>0$. Dresser le tableau de signes et conclure.

$I_1$ : $\frac{1}{x-1}\leq\frac{x+1}{x-2}\Leftrightarrow 0\leq\frac{x+1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow 0\leq\frac{(x+1)(x-1)-(x-2)}{(x-2)(x-1)}\Leftrightarrow\frac{x^2-1-x+2}{(x-2)(x-1)}\geq 0\Leftrightarrow\frac{x^2-x+1}{(x-2)(x-1)}\geq 0$.

On a donc bien $I_1$ : $\frac{P(x)}{(x-1)(x-2)}\geq 0$ avec $P(x)=x^2-x+1$.

Transformons $P(x)=x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$.

Comme $\forall x\in\mathbb{R}, (x-\frac{1}{2})^2\geq 0$, on a bien $\forall x\in\mathbb{R}, P(x)\geq\frac{3}{4}>0$.

Dressons le tableau de signes pour $I_1$ :

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | + | | + | | + |
| $x-1$ | | − | 0 | + | | + |
| $x-2$ | | − | | − | 0 | + |
| $\frac{P(x)}{(x-1)(x-2)}$ | | + | $\|$ | − | $\|$ | + |

Solutions de $I_1$ : $x\in]-\infty\ ;\ 1[\cup]2\ ;\ +\infty[$.

c) Résoudre équation $E_2$ : $\sqrt{x+2}=3x-4$ après avoir précisé les contraintes portant sur l'inconnue.

On doit avoir $x+2\geq 0\Leftrightarrow x\geq -2$ pour pouvoir prendre la racine carrée.

De plus, la racine étant positive par définition, il faut aussi que $3x-4\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{4}{3}$.

Ces deux contraintes sont respectées si $x\geq\frac{4}{3}$.

À cette condition, on peut élever au carré l'égalité et obtenir :

$$x+2=(3x-4)^2\Leftrightarrow x+2=9x^2+16-24x\Leftrightarrow 9x^2-25x+14=0$$

Calculons le discriminant $\Delta=25^2-4\times 9\times 14=121=11^2$.

On a les deux solutions $\frac{25+11}{18}=\frac{36}{18}=2$ (tiens, une solution évidente!) et $\frac{25-11}{18}=\frac{14}{18}=\frac{7}{9}$.

Parmi ces deux valeurs, une seule respecte la condition $x\geq\frac{4}{3}$, c'est donc la seule solution de $E_2$ : $x=2$.

2) Identification (5 pts)

Soit *f* la fonction définie par $f(x)=2x^3-9x^2-6x+5$.

a) Résoudre l'équation $E_3$ : $f(x)=5$

L'équation $E_3$ s'écrit $2x^3-9x^2-6x+5=5$, soit $2x^3-9x^2-6x=0$.

On reconnaît immédiatement une solution évidente qui est 0 et l'équation s'écrit $x(2x^2-9x-6)=0$.

Le facteur du second degré se factorise t-il ? Calculons le discriminant $\Delta=9^2+4\times2\times6=81+48=129$.

Il y a donc deux solutions supplémentaires qui sont $x=\dfrac{9+\sqrt{129}}{4}\approx5{,}089$ et $x=\dfrac{9-\sqrt{129}}{4}\approx-0{,}589$.

Les solutions de $E_3$ sont finalement 0, $\dfrac{9+\sqrt{129}}{4}$ et $\dfrac{9-\sqrt{129}}{4}$.

b) Déterminer une solution évidente α de l'équation $E_4$ : $f(x)=0$.
Pour $x=0$, $E_4$ n'est pas vérifiée car $2\times0^3-9\times0^2-6\times0+5=5\neq0$.
Pour $x=1$, $E_4$ n'est pas vérifiée car $2\times1^3-9\times1^2-6\times1+5=2-9-6+5=-8\neq0$.
Par contre, pour $x=-1$, $E_4$ est vérifiée car $2\times(-1)^3-9\times(-1)^2-6\times(-1)+5=-2-9+6+5=0$.

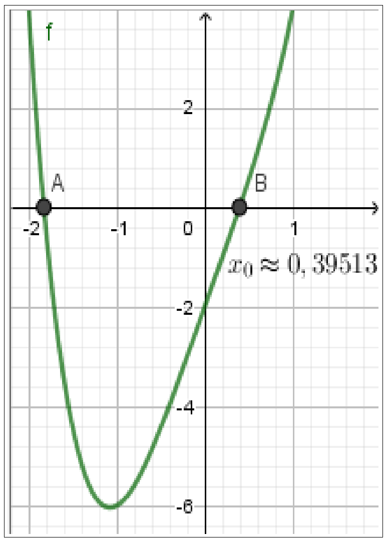
En déduire la factorisation $f(x)=(x-\alpha)(ax^2+bx+c)$ où *a*, *b* et *c* sont à déterminer par identification.
On peut donc mettre $(x+1)$ en facteur dans $f(x)$ qui se transforme en $f(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)$, les nombres *a* et *c* de l'énoncé se déduisent automatiquement par identification :

- des termes de degré 3 : pour que $x\times ax^2=x^3$, il faut que $a=2$
- des termes de degré 0 : il faut que $c=5$
- Pour déterminer *b*, on peut utiliser indifféremment le terme de degré 2 : $a+b=-9$, d'où $b=-9-a=-11$ ou le terme de degré 1 : $b+c=-6$ d'où $b=-6-c=-11$. Dans tous les cas, on trouve $b=-11$.

Ainsi, $f(x)=(x+1)(2x^2-11x+5)$.
Calculons le discriminant $\Delta=11^2-4\times2\times5=121-40=81=9^2$.

Il y a donc deux solutions supplémentaires qui sont $x=\dfrac{11+9}{4}=5$ et $x=\dfrac{11-9}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Les solutions de $E_4$ sont finalement $-1$, $\dfrac{1}{2}$ et $5$.




3) Dichotomie (4 pts)
La fonction *g* est définie par $g(x)=x^4+5x-2$.
a) Tracer ci-contre la représentation graphique de *g* pour $x\in[-2\ ;\ 1]$.

b) Notons $x_O$, la solution positive de l'équation $E_5$ : $g(x)=0$.
Par lecture graphique, donner un intervalle d'amplitude 1 contenant $x_O$.
On voit que la solution positive de l'équation $E_5$ (l'abscisse du point B sur notre illustration) est comprise entre 0 et 1, donc $x_0\in[0\ ;\ 1]$.

c) Utilisons l'algorithme de dichotomie pour préciser $x_O$ : dresser sur votre copie un tableau selon le modèle ci-dessous, où *X*, *Y* et *Z* sont déterminés au centième près, avec suffisamment d'étapes pour pouvoir affirmer que $x_O\approx C$ à $10^{-1}$ près (on doit avoir $B-A>10^{-1}$ mais $\frac{B-A}{2}<10^{-1}$).

| N° étape | $A$ | $B$ | $C=\frac{A+B}{2}$ | $X=g(A)$ | $Y=g(B)$ | $Z=g(C)$ | Signe de $X\times Z$ | $B-A$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0,5 | -2 | 4 | 0,56 | <0 | 1 |
| 2 | 0 | 0,5 | 0,25 | -2 | 0,56 | -0,75 | >0 | 0,5 |
| 3 | 0,25 | 0,5 | 0,375 | -0,75 | 0,56 | -0,11 | >0 | 0,25 |
| 4 | 0,375 | 0,5 | 0,4375 | -0,11 | 0,56 | 0,22 | <0 | 0,125 |
| 5 | 0,375 | 0,4375 | 0,40625 | -0,11 | 0,22 | 0,06 | <0 | 0,0625 |

C'est la partie la plus calculatoire du DS.
À la ligne 4, on a obtenu la condition d'arrêt ( $B-A=0{,}125>10^{-1}$ mais $\frac{B-A}{2}=0{,}0625<10^{-1}$ ) on peut donner la valeur approchée $x_O\approx0{,}4375$ (il fallait aller jusqu'à la ligne verte).

d) Déterminer, à l'aide de votre programme, une valeur approchée de $x_O$ à la précision $10^{-6}$.
Si on entre p=1 dans le programme « dichotomie » vue en cours, on retrouve la valeur 0,4375.

Avec p=6, on obtient 0,3951253890991211 (valeur donnée par la nouvelle version de la Numworks qui est bientôt disponible par mise à jour), mais la valeur attendue est $x_0 \approx 0{,}395125$ puisque la précision de la dichotomie donne le 6[ème] chiffre seulement.
NB : Geogebra donne 15 chiffres corrects : 0,395125070483025 et on constate en effet que les 6 chiffres trouvés sont les bons.

4) Discussion (3 pts)

a) Pour quelle valeur du paramètre $m$, l'équation en $x$ $E_6$ : $(m+1)x^2-2mx+m-3=0$ admet-elle une seule solution ?
Si on considère que l'équation est du second degré, ce qui était implicite ici, il faut avoir $m+1\neq 0$, soit $m\neq -1$. Le discriminant est $\Delta=4m^2-4(m+1)(m-3)=4m^2-4(m^2-2m-3)=8m+12$.

Quand $\Delta=8m+12=0$, c'est à dire quand $m=\frac{-12}{8}=\frac{-3}{2}$, il n'y a qu'un solution.

Calculer alors cette solution ? Cette solution est $x=\frac{2m}{2(m+1)}=\frac{m}{m+1}$, soit $x=\frac{\frac{-3}{2}}{\frac{-3}{2}+1}=\frac{\frac{-3}{2}}{\frac{-1}{2}}=\frac{-3}{-1}=3$.

Remarque : certains d'entre vous on trouvé une faille dans l'énoncé car il n'était pas écrit que l'équation était du nécessairement 2[d] degré. Ils ont alors écrit que pour $m=-1$, il n'y a qu'une solution. Forcément car l'équation est alors du 1[er] degré en $x$ : $-2mx+m-3=0$.

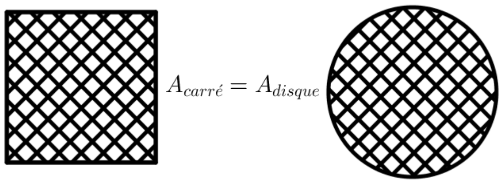
On trouve alors $-2mx=-m+3 \Leftrightarrow x=\frac{-m+3}{-2m}=\frac{m-3}{2m}$, soit $x=\frac{-1-3}{2\times(-1)}=2$.

Bien sûr, cette réponse est insatisfaisante car il faudrait envisager aussi ce qui se passe lorsque $m\neq -1$ et conclure à l'autre valeur de $m$. L'énoncé ne mentionnant qu'une seule valeur de $m$, il fallait soit corriger l'énoncé, soit laisser de côté cette possibilité. (j'ai compté jusqu'à 1,5 point quand même à ceux qui n'ont envisagé que cette possibilité car il y a une certaine logique à cela).

b) Pour quelles valeurs de $m$ l'équation $E_6$ admet-elle deux solutions distinctes ?

Quand $\Delta=8m+12>0$, c'est à dire quand $m>\frac{-3}{4}$, il y a deux solutions.

5) Problème (2 pts)




Une ficelle de longueur 1 $m$ est coupée en deux morceaux ;
avec un des morceaux on forme un cercle et avec l'autre un carré.
À quel endroit doit-on couper la ficelle pour que les aires du disque et du carré soient égales ?

Notons $x$ la longueur du morceau avec lequel on constitue le carré de côté $c$.
L'autre morceau mesure alors $1-x$ et avec lui, on constitue le cercle de rayon $r$.

Périmètre du carré : on a $x=4c$ donc $c=\frac{x}{4}$ ; Périmètre du cercle : on a $1-x=2\pi r$ donc $r=\frac{1-x}{2\pi}$

Aire du carré : $c^2=\left(\frac{x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{16}$ ; Aire du disque : $\pi r^2=\pi\left(\frac{1-x}{2\pi}\right)^2=\frac{(1-x)^2}{4\pi}$

L'égalité de l'énoncé implique que l'on ait : $\frac{(1-x)^2}{4\pi}=\frac{x^2}{16}$, soit :

$$16(1-x)^2=4\pi x^2 \Leftrightarrow 4(x^2-2x+1)=\pi x^2 \Leftrightarrow 4x^2-8x+4=\pi x^2 \Leftrightarrow (4-\pi)x^2-8x+4=0$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta=8^2-4\times4\times(4-\pi)=16\pi$,

d'où $x=\frac{8+\sqrt{16\pi}}{2(4-\pi)}=\frac{4+\sqrt{4\pi}}{4-\pi}\approx 8{,}789$ qui est trop grand,

ou bien $x=\frac{8-\sqrt{16\pi}}{2(4-\pi)}=\frac{4-\sqrt{4\pi}}{4-\pi}\approx 0{,}5301589043$ qui convient.

On trouve pour l'autre morceau : $1-x=\frac{4-\pi-4+\sqrt{4\pi}}{4-\pi}=\frac{-\pi+\sqrt{4\pi}}{4-\pi}\approx 0{,}4698410957$ (bien sûr, on peut déterminer la valeur approchée de ce nombre directement en faisant $1-0{,}5301589043$ ).

NB : en notant $x$ le périmètre du disque, on trouve pour l'égalité de l'énoncé : $\frac{(1-x)^2}{16}=\frac{x^2}{4\pi}$ , ce qui conduit à l'équation $(4-\pi)x^2+2\pi x-\pi=0$ et à la solution $x=\frac{-\pi+\sqrt{4\pi}}{4-\pi}\approx 0{,}4698410957$ .

Bonus (1 pt)

Si le quart du cube du cinquième de $x$ fait cinquante-quatre fois le cent vingt-cinquième de l'unité, combien fait alors le tiers du septuple de la moitié de $x$ ?

Je traduis la 1ère partie de ce bel imbroglio : $\frac{1}{4}\times\left(\frac{x}{5}\right)^3=\frac{54\times 1}{125}$ , il me donne $x^3=\frac{4\times 5^3\times 54\times 1}{125}=216=6^3$ , donc $x$=6. La 2ème partie s'écrit $\frac{1}{3}\times\left[7\times\left(\frac{x}{2}\right)\right]=\frac{7x}{6}$ , et puisque $x$ vaut 6, cette quantité vaut 7.