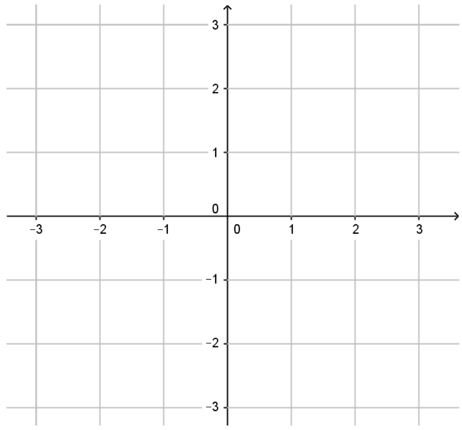
2de TD équations n°3 : Résolution approchée d'une équation de type $f(x)=0$

Lorsqu'on ne sait pas résoudre algébriquement une équation du type $f(x)=0$, on peut utiliser des méthodes approchées.

1. Méthode graphique.

Le tracé de la courbe de la fonction f à l'aide d'une calculatrice graphique donne de précieuses informations quant-à l'existence et au nombre des solutions de l'équation ainsi que leurs valeurs approchées que l'on peut préciser en zoomant (en modifiant les paramètres de la fenêtre d'affichage). Certaines calculatrice vont plus loin et donnent également des solutions approchées...



On veut résoudre l'équation E_1 : $x^3+x^2+1=0$.

Vérifier qu'aucune des valeurs de l'ensemble {0, 1, 2, -1 , -2 } n'est une solution évidente pour E_1.

Taper l'expression $y=x^3+x^2+1$ dans le mode de saisie des fonctions de la calculatrice, puis tracer le graphique de cette fonction.

Observer la courbe (au besoin, adapter les paramètres de la fenêtre d'affichage) et conclure : combien pensez-vous que cette équation a de solutions réelles ? …........................

Donner un intervalle [*a* ; *b*] contenant chacune des solutions observées.

2. Méthode algorithmique : la dichotomie

Lorsque, sur un intervalle, le sens de variation d'une fonction f est constant et qu'il existe sur cet intervalle, une solution à l'équation $f(x)=0$, on peut s'en approcher autant que l'on veut en utilisant une méthode *algorithmique* comme la *dichotomie*.

Utilisons la dichotomie pour préciser la solution de E_1 : $x^3+x^2+1=0$.

Idée de l'algorithme : Dans l'intervalle [A;B] où la fonction f garde le même sens de variation et où f(A) et f(B) n'ont pas le même signe (on a f(A)×f(B)<0), la solution de $f(x)=0$ appartient à l'intervalle. On détermine le centre C de l'intervalle : $C=\frac{A+B}{2}$ et son image f(C) :

- Si f(A)×f(C)<0, f(A) et f(C) n'ayant pas le même signe, la solution appartient à [A;C] et on met la valeur de C dans B,
- Sinon la solution appartient à [C;B] et on met la valeur de C dans A.

On continue ce procédé jusqu'à ce que la différence entre A et B soit inférieure à une valeur donnée d'avance (appelée *précision*).

L'algorithme suivant traduit l'idée ci-dessus.

1. Entrer A et B (Sur Numworks A=... ; B=....) *A<B*
2. P=6 *P est un entier positif qui indique la précision, sous la forme 10^{-P}, de la solution*
3. Calculer X=f(A) et Y=f(B) *f est une fonction qui doit être entrée préalablement à l'exécution dans la calculatrice*
4. Tant que B−A>10^{-P} :
   Calculer C=(A+B)/2 et Z=f(C)
   Si X×Z<0 alors : B=C et Y=Z *f(A) et f(C) sont de signes contraires quand f(A) × f(C)<0*
   Sinon : A=C et X=Z
5. Afficher C *la solution approchée avec une erreur inférieure à la précision demandée*

a) Faire fonctionner l'algorithme pas-à-pas, en remplissant le tableau ci-dessous pour les premières étapes :

N	A	B	$X=f(A)$	$Y=f(B)$	$C=\frac{A+B}{2}$	$Z=f(C)$	*Signe de* X×Z	$B-A$
1	−2	−1	−3	1	−1,5		>0	1
2								
3								
4								

b) Programmer cet algorithme sur votre calculatrice

c) Tester ce programme (on entre A = −2, B = −1).

La solution de l'équation est, approximativement, $x_0\approx$............. (arrondir le résultat à 10^{-6} près).

3. De A à Z :

Résoudre l'équation E_2 : $x^3+10x^2-250x-1500=0$ par dichotomie :

Taper l'expression $x^3+10x^2-250x-1500$ dans le module de saisie des fonctions.

Visualiser le graphique (prendre xmin=−20 ; xmax=+20).

Combien de solutions a cette équation E_2 ? …........... (au plus, une équation du 3ème degré a 3 solutions)

Donner un encadrement pour chaque solution $x_1\in$[...... ; ......] , $x_2\in$[...... ; ......] , $x_3\in$[...... ; ......] .

Exécuter le programme pour ces différents intervalles et donner les solutions approchées attendues :

$x_1\approx$............. ; $x_2\approx$............. ; $x_3\approx$.............