CORRECTION

1) Équations du second degré

a) Avec ces fractions, parfois on peut écrire l'égalité des produits en croix, sinon il faut transformer les égalités en mettant au même dénominateur. Dans tous les cas, noter les valeurs interdites puis résoudre :

E_1 : $x+\dfrac{1}{x}=3$

On met au même dénominateur toute l'équation et on écrit qu'une fraction est nulle si son numérateur est nul et son dénominateur non nul (les valeurs interdites sont celles qui annulent le dénominateur).

E_1 équivaut successivement à $\dfrac{x^2}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3x}{x}$; $\dfrac{x^2+1-3x}{x}=0$; $x^2-3x+1=0$ et $x\neq 0$.

Remarque : on aurait pu aussi multiplier E_1 directement par $x\neq 0$ et obtenir $x^2-3x+1=0$.

On factorise : $(x-\dfrac{3}{2})^2-(\dfrac{3}{2})^2+1=0$; $(x-\dfrac{3}{2})^2-\dfrac{5}{4}=0$; $(x-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2})(x-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2})=0$.

Les solutions de cette équation sont donc $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$ qui sont bien différentes de 0.

E_2 : $\dfrac{3x-4}{x+1}=\dfrac{2x+5}{3x+4}$

Il faut avoir $\frac{(3x-4)(3x+4)}{(x+1)(3x+4)}=\frac{(2x+5)(x+1)}{(x+1)(3x+4)}$ et $x\neq -1$ et $x\neq\frac{-4}{3}$.

Les dénominateurs ne s'annulant alors pas, on peut écrire l'équation $(3x-4)(3x+4)=(2x+5)(x+1)$, soit $9x^2-16=2x^2+7x+5$ ou encore $7x^2-7x-21=0$ ou, en divisant par 7 : $x^2-x-3=0$.

On l'écrit alors $(x-\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2-3=0 \Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2-\frac{1+12}{4}=0 \Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2-(\frac{\sqrt{13}}{2})^2=0 \Leftrightarrow (x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2})(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2})=0$.

Les solutions de cette équation sont donc $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$ et $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$ qui sont bien différentes des valeurs interdites.

E_3 : $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}=3$

Cette équation s'écrit : $\dfrac{(x-2)+2(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{3(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$.

On ne peut avoir $x-1=0$ ou $x-2=0$, donc il faut que $x\neq 1$ et $x\neq 2$.

Dans ces conditions, on peut supprimer le dénominateur et écrire l'équation :
$(x-2)+2(x-1)=3(x-1)(x-2)$, donc ou $3x-4=3(x^2-3x+2)$ encore $3x^2-12x+10=0$ ou bien, en divisant par 3 : $x^2-4x+\dfrac{10}{3}=0$.

Cette équation s'écrit aussi : $(x-2)^2-(2)^2+\dfrac{10}{3}=0$; $(x-2)^2-\dfrac{12}{3}+\dfrac{10}{3}=0$; $(x-2)^2-\dfrac{2}{3}=0$;
$(x-2-\sqrt{\dfrac{2}{3}})(x-2+\sqrt{\dfrac{2}{3}})=0$ et finalement $x=2+\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ ou $x=2-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

b) Résoudre en élevant au carré, en tenant compte des valeurs interdites (deux inéquations à résoudre) :

E_4 : $\sqrt{9-x^2}=2x-3$

On donne l'ensemble de définition (valeurs qui rendent possible le calcul de la racine carrée) et on élève au carré les deux membres de l'équation.

Il faut avoir (i) $9-x^2\geq 0$ pour que le calcul de la racine carrée soit possible dans $\mathbb{R}$;

On doit aussi avoir (ii) $2x-3\geq 0$ car une racine carrée est toujours positive.

(i) il faut que $x^2\leq 9$: cela revient à avoir $x^2-3^2\leq 0$, soit $(x-3)(x+3)\leq 0$. Le tableau de signes peut aider alors et on conclut que $-3\leq x\leq 3$.

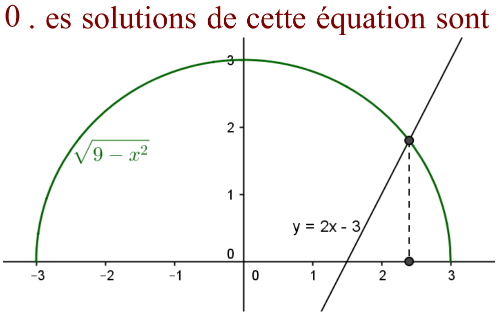
(ii) Il faut aussi que $x\geq\frac{3}{2}$. Globalement, on retiendra que x doit vérifier $\frac{3}{2}\leq x\leq 3$.

Dans ces conditions, on élève au carré les deux membres de l'équation : on doit avoir $9-x^2=(2x-3)^2=4x^2-12x+9$, soit $5x^2-12x=0$ ou $x(5x-12)=0$. es solutions de cette équation sont donc $x_1=0$ et $x_2=\frac{12}{5}=2{,}4$.

Il reste à vérifier que ces valeurs respectent la condition $\frac{3}{2}\leq x\leq 3$.

Seule la seconde de ces valeurs convient.

La seule solution est donc $x=2{,}4$. On voit sur le graphique les courbes d'équations $y=\sqrt{9-x^2}$ (un beau demi-cercle) et $y=2x-3$ qui ne se coupent qu'en un point d'abscisse 2,4.



E_5 : $\sqrt{x+2}=3x-4$

Il faut avoir $x+2\geq 0$ pour que le calcul de la racine carrée soit possible dans $\mathbb{R}$ et il faut que $3x-4\geq 0$ car une racine carrée est toujours positive. Donc il faut que $x\geq -2$ et $x\geq \frac{4}{3}$, soit simplement $x\geq \frac{4}{3}$.

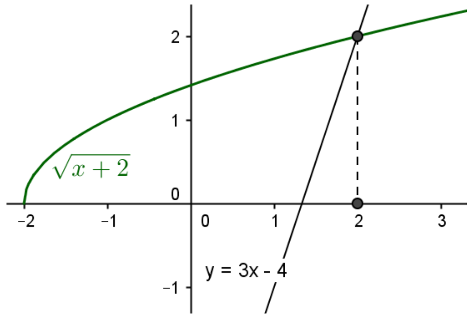
On élève alors au carré les deux membres de l'équation, on doit avoir $x+2=(3x-4)^2=9x^2-24x+16$, soit $9x^2-25x+14=0$ ou $9[(x-\frac{25}{18})^2-(\frac{25}{18})^2+\frac{14}{9}]=0$ ou aussi, en supprimant le 9 et en continuant les calculs : $(x-\frac{25}{18})^2+\frac{(-625+504)}{324}=0$ ou $(x-\frac{25}{18})^2-\frac{121}{324}=0$, soit $(x-\frac{25}{18})^2-(\frac{11}{18})^2=0$.

Factorisons $(x-\frac{25}{18}-\frac{11}{18})(x-\frac{25}{18}+\frac{11}{18})=0$,

cela conduit à $(x-\frac{36}{18})(x-\frac{14}{18})=0$, soit $(x-2)(x-\frac{7}{9})=0$.

Il y a deux solutions qui sont $x_1=2$ et $x_2=\frac{7}{9}$ mais une seule vérifie $x\geq\frac{4}{3}$, la première.

On voit sur le graphique les courbes d'équations $y=\sqrt{x+2}$ et $y=3x-4$ qui ne se coupent qu'en un point d'abscisse 2.



c) Résoudre en déterminer x^2 par la méthode habituelle, sélectionner les solutions positives et conclure :

E_6 : $2017x^4+x^2-2018=0$ Pour E_3, on cherche à déterminer x^2 par la méthode habituelle.

$2017x^4+x^2-2018=2017(x^4+\frac{x^2}{2017}-\frac{2018}{2017})=2017((x^2+\frac{1}{4034})^2-(\frac{1}{4034})^2-\frac{2018}{2017})=2017((x^2+\frac{1}{4034})^2-\frac{1+4036\times 4034}{(4034)^2})$.

Donc, on doit avoir $(x^2+\frac{1}{4034})^2-\frac{1+4036\times 4034}{(4034)^2}=0$, c'est-à-dire $(x^2+\frac{1}{4034})^2-(\frac{\sqrt{1+4035\times 4034}}{4034})^2=0$.

Il se trouve (mais ce n'est pas un hasard) que $1+4036\times 4034=16281225=4035^2$, et donc on doit avoir : $(x^2+\frac{1}{4034})^2-(\frac{4035}{4034})^2=0$, soit $(x^2+\frac{1}{4034}-\frac{4035}{4034})(x^2+\frac{1}{4034}+\frac{4035}{4034})=0$ et donc $x^2=\frac{-1}{4034}+\frac{4035}{4034}$ ou $x^2=\frac{-1}{4034}-\frac{4035}{4034}$, soit $x^2=1$ ou $x^2=\frac{-4036}{4034}=\frac{-2018}{2017}$.

La 2ème possibilité est impossible dans $\mathbb{R}$, car un carré ne peut pas être négatif. Par contre, la 1ère possibilité conduit à $x=1$ ou $x=-1$ qui sont, finalement, les deux seules solutions de l'équation E_3.

Question 1 : « Pourquoi *ce n'est pas un hasard* que $1+4036\times 4034=4035^2$? »

Parce que cette égalité se présente sous la forme $1+(n-1)\times(n+1)$ qui, comme chacun le sait, vaut $1+n^2-1^2=n^2$. L'an prochain, je pourrai encore donner cette « équation de l'année » en changeant les chiffres...

Question 2 : « Pourquoi trouve t-on des solutions aussi simples que 1 et -1 ? » et aussi « L'équation de l'année prochaine (ou de l'année d'avant) a t-elle aussi pour solutions 1 et -1 ? »

La réponse peut être donnée de plusieurs façon, mais on peut trouver que $x^2=1$ est une solution de l'équation paramétrique $nx^4+x^2-(n+1)$ pour toutes les valeurs de *n*. En effet, remplaçons x^2 par 1 dans cette équation, on obtient $n+1-(n+1)=0$ qui est toujours vrai. Donc, chaque année, l'équation de l'année aura les mêmes solutions 1 et -1.

Remarque : la méthode donnée dans la partie suivante est une autre bonne façon d'aborder le problème.

On s'aperçoit qu'il y a une solution évidente (ici, c'est $x^2=1$) ce qui conduit à la factorisation : $2017x^4+x^2-2018=(x^2-1)(2017x^2+ax+2018)$. J'ai un peu abrégé la reconnaissance du 2ème facteur, car c'est évident qu'il est du 2d degré et que les coefficients 2017et 2018 se retrouvent à la place indiquée. Il ne reste plus qu'à déterminer le coefficient *a* qui se trouve en identifiant les coefficients du développement.

$(x^2-1)(2017x^2+ax+2018)=2017x^4+ax^3+(2018-2017)x^2-ax-2018$.

Les coefficients des termes du 1er et du 3ème degré sont nuls donc $a=0$ et E_3: $(x^2-1)(2017x^2+2018)=0$.

On voit ici que le dernier facteur ne s'annule jamais (il est toujours supérieur ou égal à 2018).

Pour la généralisation, $nx^4+x^2-(n+1)=(x^2-1)(nx^2+n+1)$ et le dernier facteur ne s'annule jamais avec $n\in\mathbb{N}$.

2) Factorisation évidente puis résolution

Le principe pour résoudre une équation du 3ème degré (ou plus) : découvrir une solution évidente $x=\alpha$, puis factoriser sous la forme $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)=0$:

a) Chercher la solution « évidente » α dans {0 ; 1 ; -1 ; 2 ; -2}

E_7 : $-x^3-3x^2+13x+15=0$

Pour cette équation, on ne dispose pas d'une méthode générale (il y faudra les nombres complexes ...), mais on peut remarquer que -1 est une solution. En effet, on a :

$-(-1)^3-3(-1)^2+13(-1)+15=1-3-13+15=0$ et donc l'expression $-x^3-3x^2+13x+15$, s'annulant lorsque $x=-1$, donc lorsque $x+1=0$, on peut mettre $(x+1)$ en facteur, et obtenir alors une équation produit-nul de la façon habituelle (en continuant la factorisation) :

$$-x^3-3x^2+13x+15=(x+1)(ax^2+bx+c)$$

Développons cette dernière expression : $(x+1)(a x^2+b x+c)=a x^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$.
Par identification des coefficients de ce polynôme du 3ème degré, on trouve :
$a=-1$, $c=15$, $b+c=13$ et donc $b=13-c=13-15=-2$.
Vérifions que $a+b=-3$: $-1+(-2)=-3$. C'est ok, donc E_7 : $-(x+1)(x-3)(x+5)=0$.
Transformons le 2ème facteur :
$-x^2-2x+15=-(x^2+2x-15)=-((x+1)^2-1-15)=-((x+1)^2-16)=-(x+1-4)(x+1+4)=-(x-3)(x+5)$
Donc E_7 : $-(x+1)(x-3)(x+5)=0$. Les solutions sont $x=-1$, $x=3$ et $x=-5$.

b) Soit *f* la fonction définie par $f(x)=x^3+8x^2+11x-20$. Résoudre l'équation E_8 : $f(x)=-20$.
L'équation E_8 s'écrit $x^3+8x^2+11x-20=-20$, soit $x^3+8x^2+11x=0$.
On reconnaît immédiatement une solution évidente qui est 0 et l'équation s'écrit $x(x^2+8x+11)=0$.
Le facteur du second degré se factorise t-il ? Nous pourrions faire selon la méthode habituelle (qui relève du programme de seconde) mais comme nous avons un peu débordé en cours, nous allons utiliser la méthode générale (enseignée normalement en première) :
Calculons le discriminant $\Delta=8^2-4\times11=64-44=20$. Comme $\Delta>0$, il y a donc deux solutions supplémentaires qui sont $x=\dfrac{-8+\sqrt{20}}{2}=-4+\sqrt{5}\approx-1{,}764$ et $x=\dfrac{-8-\sqrt{20}}{2}=-4-\sqrt{5}\approx-6{,}236$.
Les solutions de E_8 sont finalement 0, $-4+\sqrt{5}$ et $-4-\sqrt{5}$.
Bien sûr, la méthode traditionnelle donne les mêmes solutions.

Calculer $f(-4)$, en déduire que $f(x)=(x+4)(a x^2+b x+c)$ où *a, b* et *c* sont des nombres à déterminer.
$f(-4)=(-4)^3+8\times(-4)^2+11\times(-4)-20=-64+128-44-20=0$,
donc on peut mettre $(x+4)$ en facteur dans $f(x)$ qui se transforme en $f(x)=(x+4)(a x^2+b x+c)$,
les nombres *a* et *c* de l'énoncé se déduisent automatiquement par identification :

- des termes de degré 3 : pour que $x\times a x^2=x^3$, il faut que *a* soit égal à 1
- des termes de degré 0 : pour que $4\times c=-20$, il faut que *c* soit égal à $\dfrac{-20}{4}=-5$
- Pour déterminer *b*, on peut utiliser indifféremment le terme de degré 2 ($(4a+b)x^2=8x^2$, d'où $4a+b=8$ et donc, comme *a*=1, $b=8-4=4$) ou de degré 1 ($(4b+c)x=11x$ d'où $4b+c=11$ et donc, comme *c*= -5 , $b=\dfrac{11+5}{4}=\dfrac{16}{4}=4$) : dans les deux cas, on trouve que *b* doit valoir 4.

Ainsi, $f(x)=(x+4)(x^2+4x-5)$.

Résoudre alors l'équation E_9 : $f(x)=0$.
On peut avoir $x+4=0$, donc *x*= -4 ou bien $x^2+4x-5=0$ qui s'écrit aussi $(x+2)^2-4-5=0$;
$(x+2)^2-9=0$; $(x+2)^2-(3)^2=0$; $(x+2-3)(x+2+3)=0$; $(x-1)(x+5)=0$.
Il y a donc deux autres solutions (celles qui annulent ces deux facteurs du 1er degré) qui sont 1 et -5 .
Les solutions de E_9 sont finalement -4 , 1 et -5 .

3) Problèmes du second degré

a) Existe t-il trois nombres entiers consécutifs dont la somme des carrés vaut 15 125 ?
La 1ère idée est donc d'écrire $x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=15125$.
Cela se transforme successivement en :
$x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4=15125$; $3x^2+6x+5=15125$; $3x^2+6x-15120=0$;
$3(x^2+2x-5040)=0$; $3((x+1)^2-1-5040)=0$; $3((x+1)^2-5041)=0$; $3((x+1)^2-71^2)=0$;
$3(x+1-71)(x+1+71)=0$; $3(x-70)(x+72)=0$.
Les solutions de cette équation sont 70 et -72 et le problème trouve ainsi deux triplets solution :
(70,71,72) et (-72 , -71 , -70).
La meilleur idée est d'écrire $(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=15125$ (on cherche le nombre du milieu).
Cela se transforme successivement en $x^2-2x+1+x^2+x^2+2x+1=15125$; $3x^2+2=15125$;
$3x^2-15123=0$; $3(x^2-5041)=0$. Les solutions de cette équation vérifient $x^2=5041$.
Il y a $x=\sqrt{5041}=71$ $x=-\sqrt{5041}=-71$ et le problème trouve ainsi deux triplets solution :
(70,71,72) et (-72 , -71 , -70).

b) Trouver deux nombres dont la somme est égale à 57 et le produit égal à 540.

Dans ce problème, si *x* et *y* sont les deux nombres cherchés, l'énoncé se traduit par $x+y=57$ et $x y=540$.

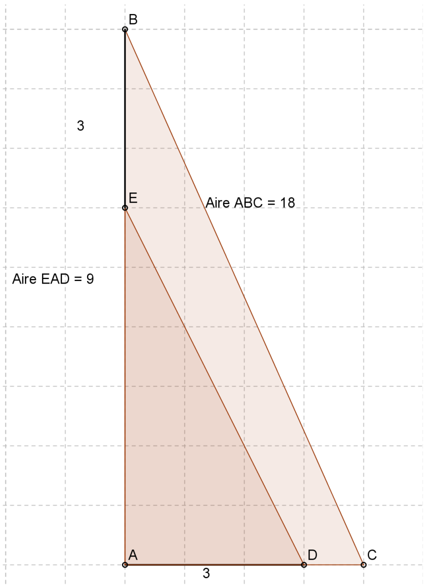
En écrivant la 1ère égalité $y=57-x$ et en reportant cette valeur de y dans la 2ème égalité, on obtient une équation du 2d degré que l'on peut résoudre par les moyens habituels.

Dans ce problème, si écrit x et y sont les deux nombres cherchés, l'énoncé se traduit par $x+y=57$ et $x\,y=540$. En écrivant la 1ère égalité $y=57-x$ et en reportant cette valeur de y dans la 2ème égalité, on obtient une équation du 2d degré que l'on peut résoudre par les moyens habituels.

On trouve en effet qu'il faut avoir $x(57-x)=540$ et donc $-x^2+57x-540=0$ ou encore $-((x+\frac{57}{2})^2-(\frac{57}{2})^2+540)=0$ ou aussi $(x+\frac{57}{2})^2-\frac{57^2-540\times4}{4}=0$ ou $(x+\frac{57}{2})^2-\frac{1089}{4}=0$ or $33^2=1089$, donc finalement $(x+\frac{57}{2})^2-(\frac{33}{2})^2=0$ qui se termine comme d'habitude, et on trouve 12 et 45 comme solutions.

⊶ Diophante, un mathématicien de l'antiquité grecque, propose cette astucieuse méthode : il introduit une 3ème variable, notée z, qui répond à cette double condition : $x=\frac{57}{2}+z$ et $y=\frac{57}{2}-z$.
Ainsi, on a bien $x+y=\frac{57}{2}+z+\frac{57}{2}-z=57$. Le produit xy vaut alors $x\,y=(\frac{57}{2}+z)(\frac{57}{2}-z)=540$.
Cela conduit à l'équation $(\frac{57}{2})^2-z^2=540$ qui est alors très simple à résoudre.

La méthode de Diophante est astucieuse, on obtient $z^2=(\frac{57}{2})^2-540=\frac{57^2-540\times4}{4}=\frac{1089}{4}$,
et donc $x=\frac{57}{2}+\frac{33}{2}=45$ ou $x=\frac{57}{2}-\frac{33}{2}=12$ qui sont les deux solutions cherchées.

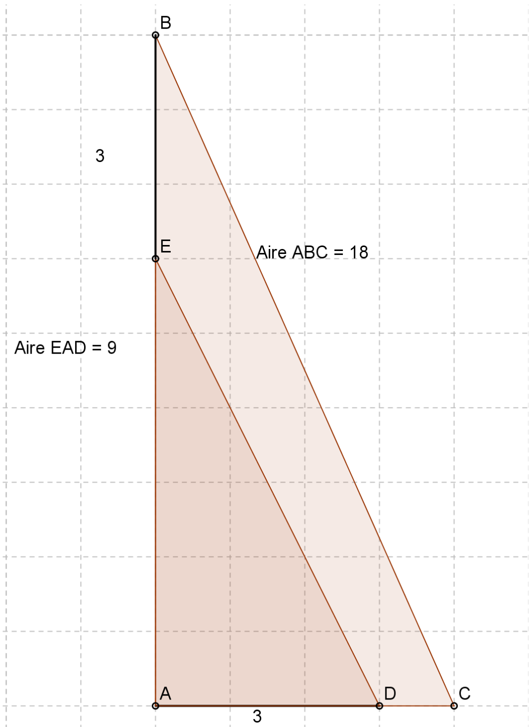


c) Dans un triangle ABC rectangle en A, on place les points D et E respectivement sur $[AC]$ et $[AB]$ tels que $AD = BE = x$. Déterminer x pour que l'aire du triangle ADE soit égale à la moitié de celle du triangle ABC.

⊶ On pourra prendre pour valeurs numériques AB=9 et AC=4 (l'illustration montre la solution entière) ; puis on prendra AB=5 et AC=2 (la solution trouvée à l'aide de GéoGebra est proche de 1,38 ; on en donnera la valeur exacte). Enfin, on pourra faire la discussion générale de ce problème : commencer par établir que l'on doit avoir $AC<\frac{AB}{2}$ pour que ce problème aie une solution. On montrera ensuite que parmi les deux solutions trouvées, quand elles existent, une seule respecte la condition initiale $x<AC$. Montrer alors que cette solution s'écrit $x=\frac{AB}{2}(1-\sqrt{1-\frac{2\,AC}{AB}})$. Simplifier cette expression pour les cas où AB=2. Calculer x lorsque AB=2 et AC=0,8.

Notons A l'aire du triangle ABC et A' l'aire du triangle ADE. On veut avoir $2A'=A$.

Dans le cas général ($AD = BE = x$), on a $A=\frac{AB\times AC}{2}$ et $A'=\frac{(AB-x)\times x}{2}$, on veut donc avoir $2(AB-x)\times x=AB\times AC$. En développant, cela conduit à $-2x^2+2AB\,x-AB\times AC=0$, soit $x^2-AB\,x+AB\times AC=0$ ou encore $(x-\frac{AB}{2})^2-(\frac{AB}{2})^2+AB\times AC=0$ ou aussi $(x-\frac{AB}{2})^2-\frac{AB^2-2\,AB\times AC}{4}=0$. Pour que cette équation aie une solution, il faut que $AB^2-2\,AB\times AC\geq0$, ce qui s'écrit $AB(AB-2\times AC)\geq0$ et comme $AB\geq0$ (AB est une longueur), il faut que $AB-2\times AC\geq0$, soit $\frac{AB}{2}\geq AC$.



L'inégalité au sens strict assure que cette solution est différente de zéro. Dans le cas où $\frac{AB}{2}\geq AC$, on peut factoriser le membre de gauche de l'équation : $(x-\frac{AB}{2}-\frac{\sqrt{AB^2-2\,AB\times AC}}{2})(x-\frac{AB}{2}+\frac{\sqrt{AB^2-2\,AB\times AC}}{2})=0$.

Les solutions de cette équation sont $x=x_1=\frac{AB}{2}+\frac{\sqrt{AB^2-2\,AB\times AC}}{2}$ et $x=x_2=\frac{AB}{2}-\frac{\sqrt{AB^2-2\,AB\times AC}}{2}$ que l'on peut écrire $x=x_1=\frac{AB}{2}(1+\sqrt{1-\frac{2\,AC}{AB}})$ et $x=x_2=\frac{AB}{2}(1-\sqrt{1-\frac{2\,AC}{AB}})$.

La première solution (x_1) est plus grande que $\frac{AB}{2}$ (car on ajoute un nombre positif à $\frac{AB}{2}$) or il faut que $AC\leq\frac{AB}{2}$, donc cette solution dépasse AC et n'est, pour cette raison, pas valable.

La seconde est la seule qui convient. Donc $x=\frac{AB}{2}(1-\sqrt{1-\frac{2\,AC}{AB}})$.

Application numérique 1 : AB=9 et AC=4. $x=\frac{9}{2}(1-\sqrt{1-\frac{2\times4}{9}})=\frac{9}{2}(1-\sqrt{\frac{1}{9}})=\frac{9}{2}(1-\frac{1}{3})=\frac{9}{2}(\frac{2}{3})=3$.

Application numérique 2 : AB=5 et AC=2. $x=\frac{5}{2}(1-\sqrt{1-\frac{2\times2}{5}})=\frac{5}{2}(1-\sqrt{\frac{1}{5}})=\frac{5-\sqrt{5}}{2}\approx1{,}38$.

Application numérique 3 : $AB=2$ et $AC=0{,}8$.

$x=\frac{2}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{2\times 0{,}8}{2}}\right)=1-\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{5-\sqrt{5}}{5}\approx 0{,}55$.