2de TD n°2 sur les équations : Équation et problèmes du second degré

1) Équations du second degré

a) Avec ces fractions, parfois on peut écrire l'égalité des produits en croix, sinon il faut transformer les égalités en mettant au même dénominateur. Dans tous les cas, noter les valeurs interdites puis résoudre :

E_1 : $x+\frac{1}{x}=3$

E_2 : $\frac{3x-4}{x+1}=\frac{2x+5}{3x+4}$

E_3 : $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=3$

b) Résoudre en élevant au carré, en tenant compte des valeurs interdites (deux inéquations à résoudre) :

E_4 : $\sqrt{9-x^2}=2x-3$

E_5 : $\sqrt{x+2}=3x-4$

c) Résoudre en déterminer x^2 par la méthode habituelle, sélectionner les solutions positives et conclure :

E_6 : $2017x^4+x^2-2018=0$

2) Factorisation évidente puis résolution

Le principe pour résoudre une équation du 3ème degré (ou plus) : découvrir une solution évidente $x=\alpha$, puis factoriser sous la forme $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)=0$:

a) Chercher la solution « évidente » α dans {0 ; 1 ; -1 ; 2 ; -2}

E_7 : $-x^3-3x^2+13x+15=0$

b) Soit *f* la fonction définie par $f(x)=x^3+8x^2+11x-20$. Résoudre l'équation E_8 : $f(x)=-20$.
Calculer $f(-4)$, en déduire que $f(x)=(x+4)(ax^2+bx+c)$ où *a, b* et *c* sont des nombres à déterminer.
Résoudre alors l'équation E_7 : $f(x)=0$.

3) Problèmes du second degré

a) Existe t-il trois nombres entiers consécutifs dont la somme des carrés vaut 15 125 ?

b) Trouver deux nombres dont la somme est égale à 57 et le produit égal à 540.

⊶ Dans ce problème, si *x* et *y* sont les deux nombres cherchés, l'énoncé se traduit par $x+y=57$ et $xy=540$.
En écrivant la 1ère égalité $y=57-x$ et en reportant cette valeur de *y* dans la 2ème égalité, on obtient une équation du 2d degré que l'on peut résoudre par les moyens habituels.

⊶ Diophante, un mathématicien de l'antiquité grecque, propose cette astucieuse méthode :
il introduit une 3ème variable, notée *z*, qui répond à cette double condition : $x=\frac{57}{2}+z$ et $y=\frac{57}{2}-z$.
Ainsi, on a bien $x+y=\frac{57}{2}+z+\frac{57}{2}-z=57$. Le produit *xy* vaut alors $xy=(\frac{57}{2}+z)(\frac{57}{2}-z)=540$.
Cela conduit à l'équation $(\frac{57}{2})^2-z^2=540$ qui est alors très simple à résoudre.

c) Dans un triangle *ABC* rectangle en *A*, on place les points *D* et *E* respectivement sur [*AC*] et [*AB*] tels que *AD* = *BE* = *x*. Déterminer *x* pour que l'aire du triangle *ADE* soit égale à la moitié de celle du triangle *ABC*.

⊶ On pourra prendre pour valeurs numériques *AB*=9 et *AC*=4 (l'illustration montre la solution entière) ; puis on prendra *AB*=5 et *AC*=2 (la solution trouvée à l'aide de GéoGebra est proche de 1,38 ; on en donnera la valeur exacte). Enfin, on pourra faire la discussion générale de ce problème : commencer par établir que l'on doit avoir $AC<\frac{AB}{2}$ pour que ce problème aie une solution. On montrera ensuite que parmi les deux solutions trouvées, quand elles existent, une seule respecte la condition initiale $x<AC$. Montrer alors que cette solution s'écrit $x=\frac{AB}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{2AC}{AB}}\right)$. Simplifier cette expression pour les cas où *AB*=2. Calculer *x* lorsque *AB*=2 et *AC*=0,8.