2de CORRECTION TD n°2 sur les équations/inéquations CORRECTION

1. Signe d'une expression affine (1er degré) et d'un produit d'expressions affines

a) Résoudre l'inéquation $3x-1>0$,
puis compléter la ligne donnant le signe de $3x-1$ dans le tableau ci-dessous.

$3x-1>0 \Leftrightarrow 3x>1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$.

Le signe de $3x-1$ est donc + pour $x\in\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$ et − ailleurs.

b) Résoudre l'inéquation $1-2x<0$,
puis compléter la ligne donnant le signe de $1-2x$ dans le tableau ci-dessous.

$1-2x<0 \Leftrightarrow -2x<-1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$ (la division par -2 change le sens de l'inégalité).

Le signe de $1-2x$ est donc − pour $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et + ailleurs.

c) Déterminer les solutions de l'inéquation $(3x-1)(1-2x)\geq 0$ en achevant le tableau de signe :

Valeur de x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $3x-1$		−	0	+		+	
Signe de $1-2x$		+		+	0	−	
$(3x-1)(1-2x)$		−	0	+	0	−	

Solutions de l'inéquation : $x\in\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$. On peut aussi noter cela $\frac{1}{3}\leq x\leq\frac{1}{2}$.

2. Inéquations à résoudre (en faisant un tableau de signes)

a) Produits

I_1 : $2x(3x-1)(1-2x)<0$

Le signe de l'expression $2x$ n'est pas difficile à déterminer : c'est celui de x ($2x>0 \Leftrightarrow x>0$).
Les valeurs de x qui annulent les facteurs sont 0, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$. Comme elles sont dans l'ordre, plaçons les dans le tableau de signes que nous complétons pour avoir le signe de $P(x)$, le produit des trois facteurs.
L'inéquation I_1 a donc pour solutions :

$$x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right[$$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x$		−	0	+		+		+	
$3x-1$		−		−	0	+		+	
$1-2x$		+		+		+	0	−	
$P(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

I_2 : $-4(x-1)^2(x^2+1)(22-7x)(x-\pi)\geq 0$

On remarque que les trois premiers facteurs ne changent jamais de signe : $(x-1)^2\geq 0$ car c'est un carré ; $x^2+1\geq 1>0$; $-4<0$. Il peut juste s'annuler pour $x=1$. Les deux autres facteurs changent de signe : $22-7x>0 \Leftrightarrow x<\frac{22}{7}$ et $x-\pi>0 \Leftrightarrow x>\pi$.
L'inéquation I_2 a donc pour solutions :

$$x\in\left]-\infty;\pi\right]\cup\left[\frac{22}{7};+\infty\right[$$

x	$-\infty$		1		π		$\frac{22}{7}$		$+\infty$
$-4(x-1)^2(x^2+1)$		−	0	−		−		−	
$22-7x$		+		+		+	0	−	
$x-\pi$		−		−	0	+		+	
$P(x)$		+	0	+	0	−	0	+	

NB : si l'équation était $-4(x-1)^2(x^2+1)(22-7x)(x-\pi)\leq 0$ (négatif ou nul au lieu de positif ou nul), les solutions seraient $x\in\left[\pi;\frac{22}{7}\right]\cup\{1\}$ car pour $x=1$ l'expression est nulle (à cause de $(x-1)^2$).

b) Quotients

Attention : les signes des expressions au dénominateur comptent aussi !

I_3 : $\dfrac{2x(1+x)}{(1+2x)(1+3x)}\leq 0$

Les valeurs de x qui annulent les facteurs sont 0, -1, $\frac{-1}{2}$ et $\frac{-1}{3}$. Dans l'ordre, il s'agit de -1, $\frac{-1}{2}$, $\frac{-1}{3}$ et 0. Plaçons les dans le tableau de signes que nous complétons pour avoir le signe de $Q(x)$, le quotient des deux premiers facteurs par les deux derniers. Pour les valeurs interdites, on met ‖.

x	$-\infty$		-1		$\frac{-1}{2}$		$\frac{-1}{3}$		0		$+\infty$
$2x$		−		−		−		−	0	+	
$1+x$		−	0	+		+		+		+	
$1+2x$		−		−	0	+		+		+	
$1+3x$		−		−		−	0	+		+	
$Q(x)$		+	0	−	‖	+	‖	−	0	+	

L'inéquation I_3 a donc pour solutions : $x\in[-1;-\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{3};0]$ (noter les crochets qui rejettent les valeurs interdites)

c) Factoriser puis étudier le signe du produit

I_4 : $(3x-5)^2\leq 4$ (penser à utiliser une identité remarquable)

L'inéquation se transforme successivement en $(3x-5)^2-2^2\leq 0$ et $(3x-7)(3x-3)\leq 0$.
Il ne reste plus qu'à faire le tableau de signes et conclure... aux solutions $x\in[1;\frac{7}{3}]$.

I_5 : $2(9x^2-1)-(3x-1)(2x+1)\geq 0$ (factorisation classique, presque « évidente »)

L'inéquation se transforme successivement en $2(3x-1)(3x+1)-(3x-1)(2x+1)\geq 0$ et puis $(3x-1)[2(3x+1)-(2x+1)]\geq 0$, soit $(3x-1)(6x+2-2x-1)\geq 0$ ou encore $(3x-1)(4x+1)\geq 0$.
Il ne reste plus qu'à faire le tableau de signes et conclure... aux solutions $x\in]-\infty;-\frac{1}{4}]\cup[\frac{1}{3};+\infty[$.

Question : et si on ne voit pas la factorisation ?

Si on développe, en supposant qu'on ne fasse pas d'erreur, on obtient une expression développée du 2^d degré dans le membre de gauche : $12x^2-x-1\geq 0$. Pour factoriser ici, il ne reste plus qu'à appliquer ce que l'on sait des expressions du second degré. On calcule $\Delta=1+48=49=7^2$; puis, on détermine les solutions de l'équation $12x^2-x-1=0$. Ce sont $x_1=\frac{1+7}{24}=\frac{1}{3}$ et $x_2=\frac{1-7}{24}=\frac{-1}{4}$. De là, avec un peu d'imagination et pas mal d'expérience, on peut factoriser l'inéquation qui s'écrit $12(x-x_1)(x-x_2)\geq 0$, soit $12(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{4})\geq 0$. si vous voulez retrouver l'expression qui est huit lignes plus haut, il ne reste qu'à mettre au même dénominateur : $12(\frac{3x-1}{3})(\frac{4x+1}{4})\geq 0$ et, enfin, simplifier par 12 : $(3x-1)(4x+1)\geq 0$.

I_6 : $x^2-2x\leq 3$ (on peut penser à mettre l'inéquation sous la forme $(x-\alpha)^2+\beta\leq 0$, où α et β sont des nombres à déterminer)

L'inéquation se transforme successivement en $x^2-2x-3\leq 0$ et puis, pour ne par devoir repasser par la formule, $(x-1)^2-1^2-3\leq 0$, soit $(x-1)^2-4\leq 0$ ou encore $(x-3)(x+1)\leq 0$.
Il ne reste plus qu'à faire le tableau de signes et conclure... aux solutions $x\in[-1;3]$.

d) Mettre tout dans le même membre, au même dénominateur, puis étudier le signe du quotient

I_7 : $\dfrac{2x}{1+3x}<1$

L'inéquation se transforme successivement en $\frac{2x}{1+3x}-1<0$ puis, en mettant au même dénominateur, $\frac{2x-(1+3x)}{1+3x}<0$ et enfin $\frac{-x-1}{1+3x}<0$ ou $\frac{x+1}{1+3x}>0$.
Il ne reste plus qu'à faire le tableau de signes et conclure... aux solutions $x\in]-\infty;-1[\cup]-\frac{1}{3};+\infty[$.

I_8 : $\dfrac{1}{x-2}\geq\dfrac{2}{x+3}$

L'inéquation se transforme successivement en $\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+3}\geq 0$ puis, en mettant au même dénominateur, $\frac{x+3-2(x-2)}{(x-2)(x+3)}\geq 0$ et enfin $\frac{-x+7}{(x-2)(x+3)}\geq 0$.
Il ne reste plus qu'à faire le tableau de signes et conclure...solutions $x\in]-\infty;-3[\cup]2;7]$.

3. Complément sur les équations du second degré

a) Résoudre les équations suivantes

$E_1: x^2+10^{50}x+25\times 10^{98}=0$

Faisons sans la formule :

On a successivement $(x-\frac{10^{50}}{2})^2-(\frac{10^{50}}{2})^2+25\times 10^{98}=0$, puis $(x-\frac{10^{50}}{2})^2-\frac{10^{100}}{4}+\frac{100\times 10^{98}}{4}=0$ et $(x-\frac{10^{50}}{2})^2-\frac{10^{100}}{4}+\frac{10^{100}}{4}=0$. Finalement $E_1:(x-\frac{10^{50}}{2})^2=0$. La seule solution est $x=\frac{10^{50}}{2}$.

Faisons avec :

$\Delta=(10^{50})^2-4(25\times 10^{98})=10^{100}-100\times 10^{98}=10^{100}-10^{100}=0$, il n'y a donc qu'une solution qui est $x=\frac{10^{50}}{2}$.

$E_2:-x^3-3x^2+13x+15=0$ (remarquer que -1 est une solution et mettre $(x+1)$ en facteur)

On a $-(-1)^3-3(-1)^2+13(-1)+15=1-3-13+15=0$.
L'expression $-x^3-3x^2+13x+15$ s'annule lorsque $x=-1$, donc lorsque $x+1=0$.
On peut mettre $x+1$ en facteur et écrire : $-x^3-3x^2+13x+15=(x+1)(ax^2+bx+c)$.
Développons cette dernière expression : $(x+1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$.
Par identification des coefficients de ce polynôme du 3^{ème} degré, on trouve que $a=-1$ (coefficient de x^3), $c=15$ (coefficient constant), $b+c=13$ (coefficient de x). Donc $b=13-c=13-15=-2$.

Ce n'est pas la peine de se préoccuper de la dernière équation : $a+b=-3$ (coefficient de x^2), car on sait que la factorisation est possible. Cette équation est redondante (elle n'ajoute rien de nouveau).
Vérifions que $a+b=-3$: $-1+(-2)=-3$. C'est correct.
On a donc, finalement : $E_2:(x+1)(-x^2-2x+15)=0$.
Sans la formule, transformons le 2ème facteur :
$-x^2-2x+15=-(x^2+2x-15)=-((x+1)^2-1-15)=-((x+1)^2-16)=-(x+1-4)(x+1+4)=-(x-3)(x+5)$
Donc $E_2:-(x+1)(x-3)(x+5)=0$ et les solutions sont $x=-1$, $x=3$ et $x=-5$.
Avec la formule,
$\Delta=(-2)^2+4\times 15=4+60=64=8^2$, il y a donc deux solutions à l'équation $-x^2-2x+15=0$.
Ce sont $x=\frac{2+8}{-2}=-5$ et $x=\frac{2-8}{-2}=3$.
Finalement E_2 a trois solutions qui sont $x=-1$, $x=3$ et $x=-5$.

$E_3: 2016x^4+x^2-2017=0$ (déterminer x^2 par la méthode habituelle, sélectionner les solutions positives et conclure)
Pour E_3, on cherche à déterminer x^2 par la méthode habituelle.
$2016x^4+x^2-2017=2016\left(x^4+\frac{x^2}{2016}-\frac{2017}{2016}\right)=2016\left(\left(x^2+\frac{1}{4032}\right)^2-\left(\frac{1}{4032}\right)^2-\frac{2017}{2016}\right)=2016\left(\left(x^2+\frac{1}{4032}\right)^2-\frac{1+4034\times 4032}{(4032)^2}\right)$.
Donc, on doit avoir $\left(x^2+\frac{1}{4032}\right)^2-\frac{1+4034\times 4032}{(4032)^2}=0$, c'est-à-dire $\left(x^2+\frac{1}{4032}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{1+4034\times 4032}}{4032}\right)^2=0$.
Il se trouve (mais ce n'est pas un hasard) que $1+4034\times 4032=16265089=4033^2$, et donc on doit avoir :
$\left(x^2+\frac{1}{4032}\right)^2-\left(\frac{4033}{4032}\right)^2=0$, soit $\left(x^2+\frac{1}{4032}-\frac{4033}{4032}\right)\left(x^2+\frac{1}{4032}+\frac{4033}{4032}\right)=0$ et donc $x^2=\frac{-1}{4032}+\frac{4033}{4032}$ ou $x^2=\frac{-1}{4032}-\frac{4033}{4032}$, soit $x^2=1$ ou $x^2=\frac{-4034}{4032}=\frac{-2017}{2016}$.
La 2ème possibilité est impossible dans $\mathbb{R}$, car un carré ne peut pas être négatif. Par contre, la 1ère possibilité conduit à $x=1$ ou $x=-1$ qui sont, finalement, les deux seules solutions de l'équation E_3.
Question 1 : « Pourquoi *ce n'est pas un hasard* que $1+4034\times 4032=4033^2$? »
Parce que cette égalité se présente sous la forme $1+(n-1)\times(n+1)$ qui, comme chacun le sait, vaut $1+n^2-1^2=n^2$. L'an prochain, je pourrai encore donner cette « équation de l'année » en changeant les chiffres...
Question 2 : « Pourquoi trouve t-on des solutions aussi simples que 1 et -1 ? » et aussi « L'équation de l'année prochaine (ou de l'année d'avant) a t-elle aussi pour solutions 1 et -1 ? »
La réponse peut être donnée de plusieurs façon, mais on peut trouver que $x^2=1$ est une solution de l'équation paramétrique $nx^4+x^2-(n+1)$ pour toutes les valeurs de *n*. En effet, remplaçons x^2 par 1 dans cette équation, on obtient $n+1-(n+1)=0$ qui est toujours vrai. Donc, chaque année, l'équation de l'année aura les mêmes solutions 1 et -1.
Remarque : la méthode donnée pour E_2 est une autre bonne façon d'aborder le problème.
On s'aperçoit qu'il y a une solution évidente (ici, c'est $x^2=1$) ce qui conduit à la factorisation :
$2016x^4+x^2-2017=(x^2-1)(2016x^2+ax+2017)$. J'ai un peu abrégé la reconnaissance du 2ème facteur, car c'est évident qu'il est du 2d degré et que les coefficients 2016 et 2017 se retrouvent à la place indiquée. Il ne reste plus qu'à déterminer le coefficient *a* qui se trouve en identifiant les coefficients du développement.
$(x^2-1)(2016x^2+ax+2017)=2016x^4+ax^3+(2017-2016)x^2-ax-2017$.
Les coefficients des termes du 1er et du 3ème degré sont nuls donc $a=0$ et E_3: $(x^2-1)(2016x^2+2017)=0$.
On voit ici que le dernier facteur ne s'annule jamais (il est toujours supérieur ou égal à 2017).

b) Problèmes à résoudre
P₁ : Existe t-il trois nombres entiers consécutifs dont la somme des carrés vaut 15125 ?
La 1ère idée est donc d'écrire $x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=15125$. Cela se transforme successivement en $x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4=15125$; $3x^2+6x+5=15125$; $3x^2+6x-15120=0$; $3(x^2+2x-5040)=0$; $3((x+1)^2-1-5040)=0$; $3((x+1)^2-5041)=0$; $3((x+1)^2-71^2)=0$; $3(x+1-71)(x+1+71)=0$; $3(x-70)(x+72)=0$.
Les solutions de cette équation sont 70 et -72 et le problème trouve ainsi deux triplets solution :
(70,71,72) et (-72, -71, -70).
La meilleur idée est d'écrire $(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=15125$ (on cherche le nombre du milieu).
Cela se transforme successivement en $x^2-2x+1+x^2+x^2+2x+1=15125$; $3x^2+2=15125$; $3x^2-15123=0$; $3(x^2-5041)=0$. Les solutions de cette équation vérifient $x^2=5041$.
Il y a $x=\sqrt{5041}=71$ $x=-\sqrt{5041}=-71$ et le problème trouve ainsi deux triplets solution :
(70,71,72) et (-72, -71, -70).

P_2 : Trouver deux nombres dont la somme est égale à 57 et le produit égal à 540.

Dans ce problème, si écrit x et y sont les deux nombres cherchés, l'énoncé se traduit par $x+y=57$ et $x\,y=540$. En écrivant la 1ère égalité $y=57-x$ et en reportant cette valeur de y dans la 2ème égalité, on obtient une équation du 2d degré que l'on peut résoudre par les moyens habituels.

On trouve en effet qu'il faut avoir $x(57-x)=540$ et donc $-x^2+57x-540=0$ ou encore $-((x+\frac{57}{2})^2-(\frac{57}{2})^2+540)=0$ ou aussi $(x+\frac{57}{2})^2-\frac{57^2-540\times4}{4}=0$ ou $(x+\frac{57}{2})^2-\frac{1089}{4}=0$ or $33^2=1089$, donc finalement $(x+\frac{57}{2})^2-(\frac{33}{2})^2=0$ qui se termine comme d'habitude, et on trouve 12 et 45 comme solutions.

Remarque : Diophante, un mathématicien de l'antiquité grecque, propose cette méthode :

Il introduit une 3ème variable, notée z, qui répond à cette double condition : $x=\frac{57}{2}+z$ et $y=\frac{57}{2}-z$.

Ainsi, on a bien $x+y=\frac{57}{2}+z+\frac{57}{2}-z=57$. Le produit xy vaut alors $x\,y=(\frac{57}{2}+z)(\frac{57}{2}-z)=540$.

Cela conduit à l'équation $(\frac{57}{2})^2-z^2=540$ qui est alors très simple à résoudre.

La méthode de Diophante est astucieuse, on obtient $z^2=(\frac{57}{2})^2-540=\frac{57^2-540\times4}{4}=\frac{1089}{4}$,

et donc $x=\frac{57}{2}+\frac{33}{2}=45$ ou $x=\frac{57}{2}-\frac{33}{2}=12$ qui sont les deux solutions cherchées.