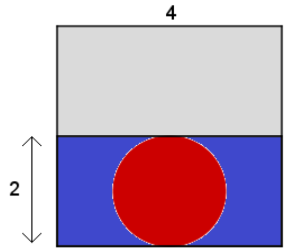
2de4 — DM n°3 : Équations & Inéquations — *novembre 2017*

CORRECTION

I] Deux dimensions

a) Billes



Une bille sphérique de 1 *cm* de rayon est posée dans un récipient cylindrique dont la hauteur et le diamètre mesurent 4 *cm*. Un liquide a été alors versé dans le récipient jusqu'à ce que son niveau affleure la surface de la bille (voir schéma). La question porte sur la possibilité d'enlever cette bille et de la remplacer par une autre de *rayon différent* de manière à ce que le niveau du liquide affleure toujours la surface.

☻ Déterminer le volume du liquide qui a été versé dans le récipient ? En supposant que lorsqu'on enlève la bille, tout le liquide reste dans le récipient (la bille n'est pas mouillée), quelle est la hauteur h du liquide dans le récipient vide ?

Volume du cylindre de hauteur 2 et de rayon 2 : $\pi\, 2^2 \times 2 = 8\pi$ cm^3.

Volume de la bille de rayon 1 : $\frac{4}{3}\pi\, 1^3 = \frac{4}{3}\pi$ cm^3.

Par conséquent, le volume du liquide dans le récipient est $8\pi - \frac{4}{3}\pi = \frac{20}{3}\pi \approx 20{,}94$ cm^3.

Sans la bille, le volume du liquide ne change pas : $\frac{20}{3}\pi = \pi\, 2^2 \times h$ cm^3.

On en déduit que $h = \frac{20}{3}\pi \div 4\pi = \frac{5}{3} \approx 1{,}667$ *cm*.

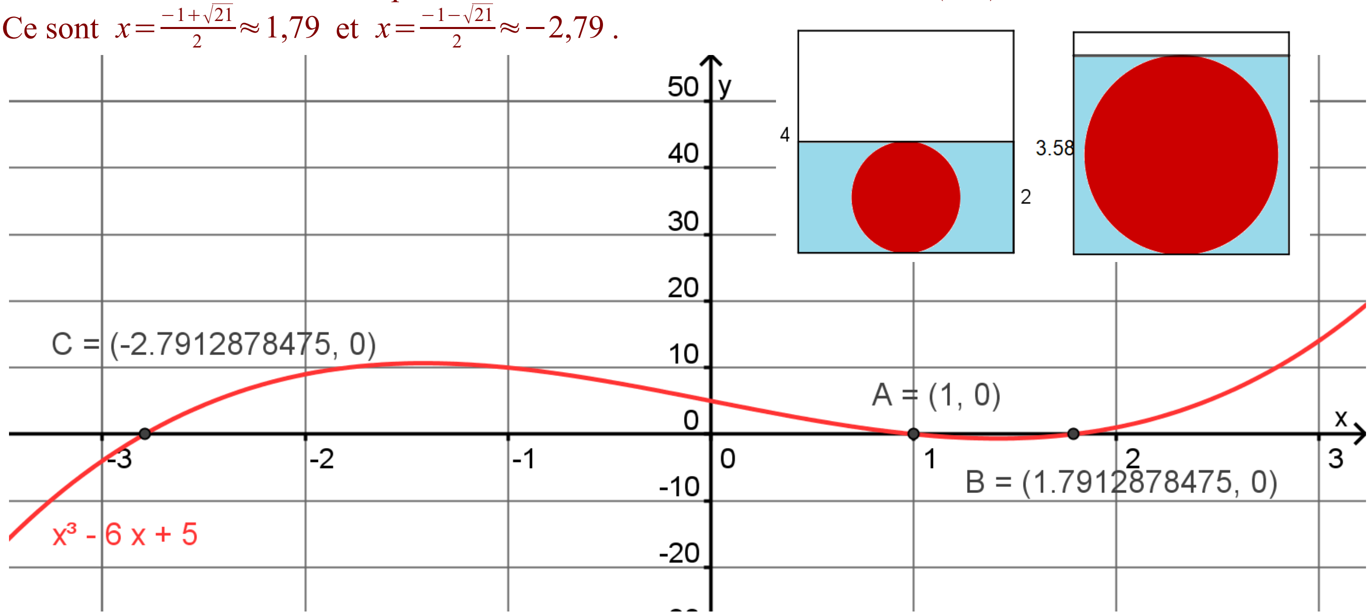
☻ Montrer que, si l'on note x le rayon de la bille, celui-ci doit vérifier l'équation $x^3 - 6x + 5 = 0$.
Sachant que $x = 1$ est une solution de cette équation (la 1ère bille remplit la condition), factoriser l'expression du 3ème degré et déterminer un autre rayon solution. Illustrer cette double possibilité en traçant la courbe de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 6x + 5$ sur l'intervalle $[0;2]$.

Le volume du liquide occupé par une bille de rayon x égale le volume du liquide dans le récipient :

$$4\pi \times 2x - \frac{4}{3}\pi \times x^3 = \frac{20}{3}\pi \quad cm^3.$$

En simplifiant par π, et en multipliant par 3, on a : $24x - 4x^3 = 20$.
Divisons par 4, on obtient : $6x - x^3 = 5$, soit $x^3 - 6x + 5 = 0$.

$x^3 - 6x + 5 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$, avec $a=1$ et $c = -5$ de façon évidente (en développant), et pour b, on écrit le développement au complet : $ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$.
Par identification, on doit avoir $b - a = 0$ (le coefficient de x^2) et $c - b = -6$ (le coefficient de x).
On doit donc avoir $b = a = 1$ et $b = c + 6 = -5 + 6 = 1$ (la même valeur dans les deux cas).
Ainsi, on a $x^3 - 6x + 5 = (x-1)(x^2 + x - 5)$.
Le facteur $x^2 + x - 5$ s'annule pour deux valeurs de x car $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 21 > 0$.
Ce sont $x = \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \approx 1{,}79$ et $x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \approx -2{,}79$.



La 1ère de ces valeurs seulement est positive, donc il n'y a qu'une autre bille (son rayon étant environ 1,79 *cm*, son diamètre est environ 3,58 *cm*) qui remplit de la même façon (le liquide est rasant) le récipient avec son liquide. On voit, sur le graphique, la 3ème solution (celle qui est négative), mais les seules qui conviennent sont les abscisses de A (1) et de B ($\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \approx 1{,}7912878475$). Vous conviendrez, au passage, que le traceur de courbe de GeoGebra est ultra-précis (il donne jusqu'à 15 décimales).

b) Dés

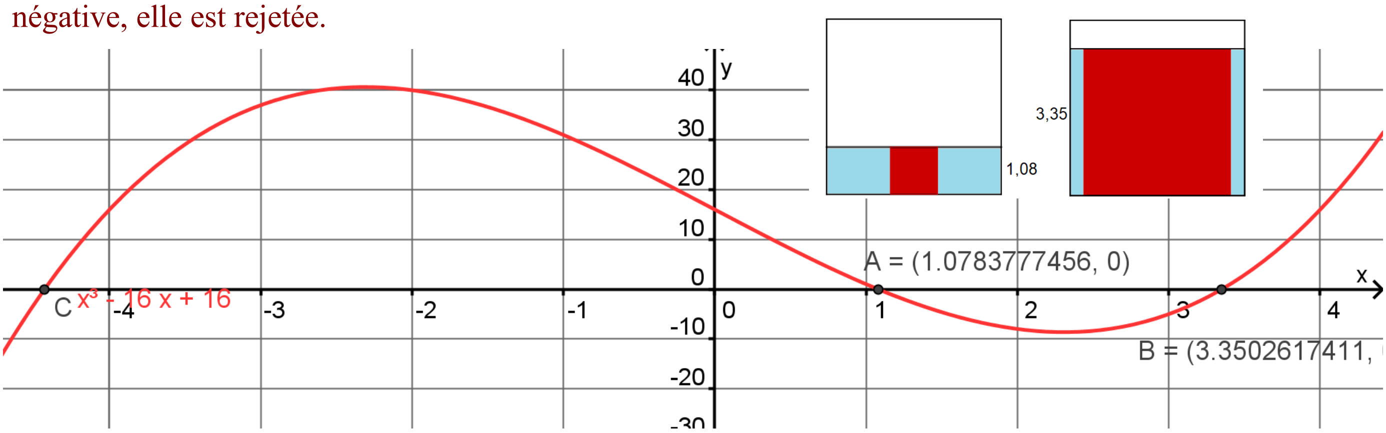
On verse un liquide dans un récipient cubique de 4 *cm* côté.
La hauteur du liquide dans le récipient vide est alors $h= 1$ *cm*.
Sur la base de l'expérience avec les deux billes, on se demande s'il est possible de plonger dans ce liquide, alternativement, deux dés cubiques de dimensions différentes.

☻ Si l'on note x le côté d'un dé, déterminer l'équation que x doit vérifier.

Volume du liquide : c'est le volume du prisme à base carrée de hauteur 1 et de base 4 : $4^2 \times 1 = 16$
Volume du cube de côté x : x^3 .
Volume du liquide occupé par cube de côté x : $4^2 \times x - x^3 = 16$.
On obtient : $16x - x^3 = 16$, soit $x^3 - 16x + 16 = 0$.

☻ Comme on ne sait pas factoriser les expressions du 3ème degré sans connaître de valeur évidente, déterminer la ou les solutions par une méthode approchée (*expliquer la méthode, donner ses résultats*).

La méthode approchée demande de tracer un graphique de la fonction *f* définie par $f(x) = x^3 - 16x + 16$ et de lire les solutions de l'équation $f(x)=0$ (les abscisses des points d'intersection de la courbe et de l'axe des abscisses). Le traceur de courbe de GeoGebra étant ultra-précis, on obtient les solutions avec une précision suffisante (15 décimales). On voit donc que les solutions à ce problèmes sont au nombre de deux, comme pour la bille : $x_A \approx 1{,}0783777456$ et $x_B \approx 3{,}3502617411$. L'autre solution à l'équation du 3ème degré étant négative, elle est rejetée.



Cependant, en l'absence d'une telle précision, ce qui advient lorsqu'on trace la courbe à la main, et aussi dans une moindre mesure lorsqu'on trace la courbe avec une calculatrice graphique (certaines donnent les solutions approchées de l'équation $f(x)=0$), on fera appel à notre programme de dichotomie vu en cours. Les bornes de l'intervalle $[a;b]$ dans lequel on cherche une des solutions sont identifiées sur le graphique, même si celui-ci est imprécis. On peut choisir, pour la 1ère solution, l'intervalle [1;2] et pour la 2de l'intervalle [3;4]. Sauf erreur, les solutions seront exactement celles que l'on trouve avec GeoGebra. En entrant $n=5$, on obtient une précision de 10^{-5} , ce qui est largement suffisant (les côtés du cube et de la boîte sont-ils connus avec une meilleure précision ?). On obtiendra donc $x_A \approx 1{,}07838$ et $x_B \approx 3{,}35026$.

Le programme ci-dessous est écrit en Python. Il transcrit très fidèlement l'algorithme vu en cours. Ce peut être l'occasion pour certains de découvrir une fonctionnalité de Python dont nous n'avons pas encore parlée. La fonction est notée « image » pour ne pas l'appeler « f » car f est le nom d'une variable ici, et aussi parce que toutes les fonctions ne s'appellent pas f... Cette fonction est définie très simplement, avant le corps du programme par la syntaxe : def image(x) : return x**3-16*x+16.

```python
def image(x) :
    return x**3-16*x+16

a=int(input('quelle est a, la borne inférieure?'))
b=int(input('quelle est b, la borne supérieure?'))
c=0
n=int(input("quelle est n, la valeur absolue de l'exposant de la précision souhaitée?"))
d=image(a)
e=image(b)
while b-a>10**-n :
    c=(a+b)/2
    f=image(c)
    if d*f<0 :
        b=c
        e=f
    else :
        a=c
        d=f
print('voici votre solution : {}'.format(c))
```

```
>>> (executing lines 1 to 19 of "dichotomie.py")
quelle est a, la borne inférieure?1
quelle est b, la borne supérieure?2
quelle est n, la valeur absolue de l'exposant de la précision souhaitée?5
voici votre solution : 1.0783767700195312
>>> (executing lines 1 to 19 of "dichotomie.py")
quelle est a, la borne inférieure?3
quelle est b, la borne supérieure?4
quelle est n, la valeur absolue de l'exposant de la précision souhaitée?5
voici votre solution : 3.350257873535156?
```

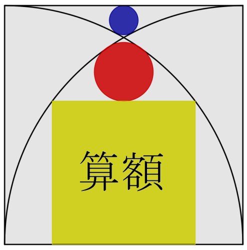
Un aspect technique limitant de ce programme est la déclaration des nombres *a* et *b* comme des entiers.
Si on entre $b=1{,}5$ le programme répondra par : ValueError: invalid literal for int() with base 10: '1.5'
Pour ne pas avoir ce message d'erreur, on écrira plutôt : a=float(...) et b=float(...)

```python
a=float(input('quelle est a, la borne inférieure?'))
b=float(input('quelle est b, la borne supérieure?'))
```

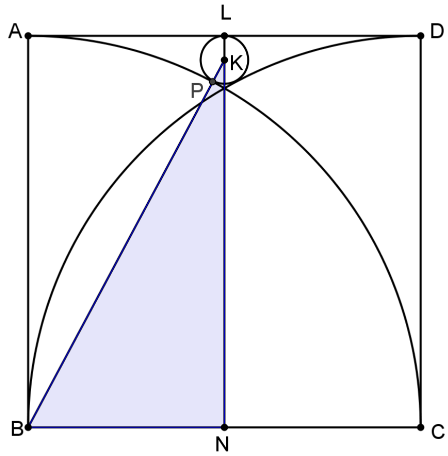
II] Sangaku

Les *sangakus* sont des tablettes votives placées dans les temples au Japon qui représentent des situations géométriques mêlant cercles et polygones. Un résultat est indiqué, ou suggéré, souvent sans preuve.
En voici un qui provient de la tristement célèbre province de Fukushima.

☻Ce sangaku s'intéresse aux rapports de longueur existants entre les rayons des cercles et les côtés des carrés de cette figure où les cercles et le petit carré n'ont qu'un point de contact avec chacun des quarts de cercle tracés dans le grand carré. En notant c_1 et c_2 les côtés du petit et du grand carré, r_1 et r_2 les rayons du petit et du grand cercle, déterminer les rapports $\frac{r_1}{c_2}$, $\frac{c_1}{c_2}$, $\frac{r_2}{c_2}$ et $\frac{r_1}{r_2}$ (*trois fois le théorème de Pythagore*).



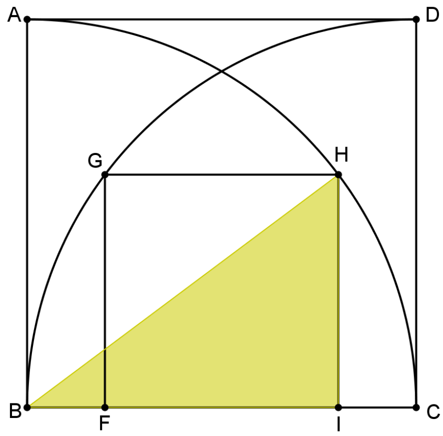
Commençons par le petit cercle de rayon r_1 qui ne dépend que du grand carré, de côté c_2.



Considérons le triangle BNK rectangle en N (N est le milieu de $[BC]$ et K le centre du petit cercle).
Bien évidemment, $NK = c_2 - r_1$ ($NK = NL - LK$)
et aussi $BK = c_2 + r_1$ ($BK = BP + PK$).
Appliquons le théorème de Pythagore (ピタゴラスの定理 en japonais) au triangle BNK : $BK^2 = BN^2 + NK^2$, soit $(c_2+r_1)^2 = (\frac{c_2}{2})^2 + (c_2 - r_1)^2$.
Développons et supprimons les $c_2{}^2 + r_1{}^2$ qui apparaissent des deux côtés du signe = : $2c_2r_1 = \frac{c_2{}^2}{4} - 2c_2r_1$,
soit $4c_2r_1 = \frac{c_2{}^2}{4}$ ou encore, en multipliant par $\frac{4}{c_2}$: $16r_1 = c_2$.

Finalement, on obtient notre premier rapport : $\boxed{\frac{r_1}{c_2} = \frac{1}{16}}$

Passons en dessous de l'ogive formée par les deux quarts de cercle.

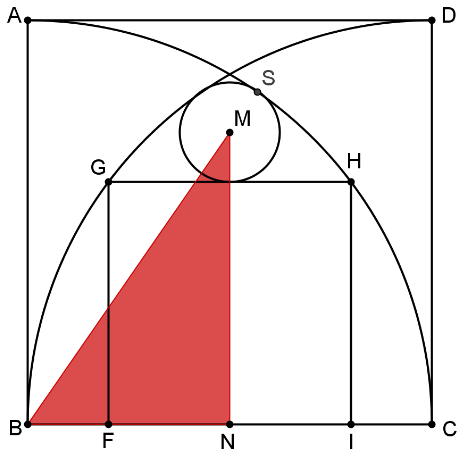


Considérons le triangle BIH rectangle en I.
On a $BF = IC = \frac{c_2 - c_1}{2}$ car $FI = c_1$, $BC = c_2$ et $BF + IC = c_2 - c_1$.
et donc, en appliquant le théorème de Pythagore au triangle BIH :
$BH^2 = BI^2 + IH^2$, soit $c_2{}^2 = (\frac{c_2 - c_1}{2} + c_1)^2 + c_1{}^2$.
Simplifions l'écriture de BI avant de développer :
On obtient $c_2{}^2 = (\frac{c_2 + c_1}{2})^2 + c_1{}^2$,
puis $c_2{}^2 = \frac{1}{4}(c_2{}^2 + 2c_1c_2 + c_1{}^2) + c_1{}^2$.
Multiplions par 4 : $4c_2{}^2 = c_2{}^2 + 2c_1c_2 + c_1{}^2 + 4c_1{}^2$,
simplifions et divisons par $(c_2)^2$: $3 = 2\frac{c_1}{c_2} + 5(\frac{c_1}{c_2})^2$.
Le rapport cherché $\frac{c_1}{c_2}$ est donc une solution de l'équation du second degré en x : $3 = 2x + 5x^2$ que l'on écrit plutôt $5x^2 + 2x - 3 = 0$. Le discriminant de cette équation est positif $\Delta = 2^2 - 4 \times 5 \times (-3) = 4 + 60 = 64 = 8^2$.
L'équation a donc deux solutions qui sont $x = \frac{-2+8}{10} = \frac{3}{5}$ et $x = \frac{-2-8}{10} = -1$. Cette dernière solution n'est pas possible car le rapport cherché est nécessairement positif (rapport de deux longueurs).

Finalement, on obtient notre second rapport : $\boxed{\frac{c_1}{c_2} = \frac{3}{5}}$

Le petit côté mesure donc 60% du grand carré.

Il ne reste plus qu'à s'intéresser au grand cercle de rayon r_2.



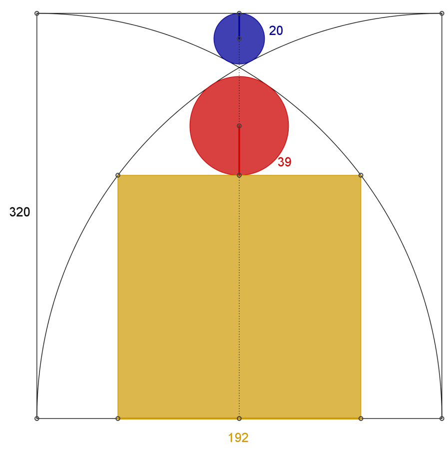
Considérons le triangle BNM rectangle en N (M est le centre du grand cercle).
On a $BM = c_2 - r_2$ car $c_2 = BS = BM + MS = BM + r_2$.
On a aussi $NM = c_1 + r_2$, et en remplaçant c_1 par $\frac{3}{5}c_2$ comme on vient de le calculer, cela devient $NM = \frac{3}{5}c_2 + r_2$.
Appliquons le théorème de Pythagore au triangle BNM :
$BM^2 = BN^2 + NM^2$, soit $(c_2 - r_2)^2 = (\frac{c_2}{2})^2 + (\frac{3}{5}c_2 + r_2)^2$.
Développons et supprimons les $r_2{}^2$ qui apparaissent des deux côtés du signe = : $c_2{}^2 - 2c_2r_2 = \frac{c_2{}^2}{4} + \frac{9}{25}c_2{}^2 + \frac{6}{5}c_2r_2$,

soit $c_2{}^2(1-\frac{1}{4}-\frac{9}{25})+c_2 r_2(-2-\frac{6}{5})=0$

ou $c_2{}^2(\frac{100-25-9\times 4}{100})+c_2 r_2(\frac{-16}{5})=0$, ou encore (en multipliant par 100) $39c_2{}^2-320c_2 r_2=0$.

Divisons par $(c_2)^2$: $39-320\frac{r_2}{c_2}=0$.

Finalement, on obtient notre troisième rapport : $\boxed{\frac{r_2}{c_2}=\frac{39}{320}}$



Un simple calcul nous donne alors le dernier rapport :

$$\boxed{\frac{r_1}{r_2}=\frac{\frac{r_1}{c_2}}{\frac{r_2}{c_2}}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{39}{320}}=\frac{1}{16}\times\frac{320}{39}=\frac{20}{39}}$$

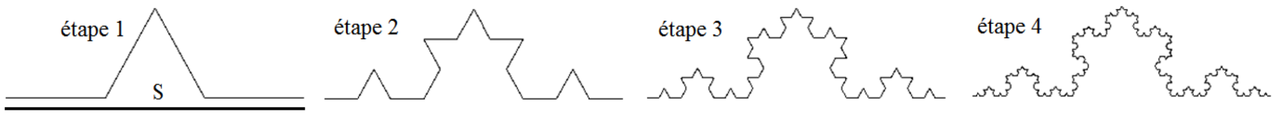
☻Quel est la plus petite valeur du côté du grand carré pour que les quatre longueurs soient entières ?

Si on prend $c_2=320$, on a $r_1=\frac{320}{16}=20$, $r_2=39$ et $c_1=\frac{3\times 320}{5}=192$.

Comme 39 est un nombre premier, on ne peut trouver un diviseur commun de ces nombres pour diminuer encore ces valeurs. Notre double sangaku tient dans un carré d'arête 320 (cette connaissance simplifie grandement la réalisation d'une figure exacte).

III] Flocon fractal

Un segment S de longueur *l* est brisé en trois parties égales, puis remplacé par quatre parties égales comme le montre le schéma ci-dessous. On recommence ensuite sur chacun des segments de longueurs $\frac{l}{3}$, de façon répétitive, jusqu'à l'infini. Si on note L_n la longueur de la ligne brisée obtenue à la $n^{\text{ième}}$ étape de cet algorithme et qu'on prend $l=1$, on a $L_0 = 1$ et $L_1 = \frac{4}{3}$.



☻Jusqu'à quelle étape n faut-il aller pour que la ligne brisée mesure plus de $10l$?
(*indication : résoudre dans* $\mathbb{N}$*, avec un tableur, l'inéquation en* n : $L_n > 10L_0$)

La fraction de la longueur du segment S qui est tracée par la ligne brisée de la première étape est $L_1=\frac{4}{3}L_0$. À l'étape suivante chaque segment est découpé comme à la 1ère étape, et il n'en reste que les $\frac{4}{3}$. Donc, à la 2ème étape, il en reste les $\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{16}{9}$, et on a $L_2=\frac{4}{3}L_1=(\frac{4}{3})^2 L_0=\frac{16}{9}L_0\approx 1{,}78\,L_0$.

Aux étapes suivantes on aura $L_3=\frac{4}{3}L_2=(\frac{4}{3})^3 L_0=\frac{64}{27}L_0\approx 2{,}37\,L_0$, puis $L_4=\frac{4}{3}L_3=(\frac{4}{3})^4 L_0=\frac{256}{81}L_0\approx 3{,}16\,L_0$ et $L_5=\frac{1024}{243}L_0\approx 4{,}21\,L_0$. Les résultats sont indiqués dans le tableau ci-dessous jusqu'à l'étape 9.

étape	1	2	3	4	5	6	7	8	9
numérateur	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
dénominateur	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
quotient	1,33	1,78	2,37	3,16	4,21	5,62	7,49	9,99	13,32

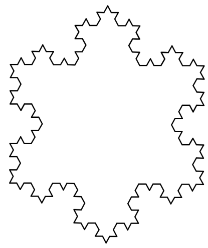
On voit qu'alors, la longueur de la ligne brisée dépasse 10 fois celle du segment S initial.
Le nombre n cherché est donc 9.

Une longue remarque : Si l'on devait résoudre l'inéquation $L_n>10L_0$ par le calcul, on n'a pas encore en 2de les outils algébriques nécessaires. En effet, cette inéquation s'écrit $L_n=(\frac{4}{3})^n L_0>10\,L_0$ qui se simplifie en $(\frac{4}{3})^n>10$. Nous avons donc privilégié l'utilisation du tableur qui est particulièrement adapté à cette situation. En terminale on pourra utiliser le logarithme (touche log de la calculatrice) qui permet de déterminer le premier réel n qui est solution : $\log((\frac{4}{3})^n)>\log 10$ devient $n(\log 4-\log 3)>\log 10$ et donc $n>\frac{\log 10}{\log 4-\log 3}$, soit $n>8{,}0039$. Cela confirme bien notre valeur de n presque égale à 8, mais cela n'apporte rien de plus, la valeur réelle trouvée par cette méthode n'ayant aucun sens ici (n est un entier).

Pour que la ligne brisée mesure plus de 100 fois celle du segment S initial, il suffit d'aller jusqu'à l'étape n=17 ainsi qu'on peut le constater sur l'extrait du tableau ci-dessous.

étape	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
numérateur	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576	4194304	16777216	67108864	268435456	1073741824	4294967296	17179869184
dénominateur	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	177147	531441	1594323	4782969	14348907	43046721	129140163
quotient	1,33	1,78	2,37	3,16	4,21	5,62	7,49	9,99	13,32	17,76	23,68	31,57	42,09	56,12	74,83	99,77	133,03

On a juste prolongé le tableau précédent en « tirant » sur la poignée des cellules où se calcule la puissance du numérateur et du dénominateur, selon la formule =PUISSANCE(B20;C19). Si la cellule B20 contient 4 et la cellule C19 contient 2, alors cette formule permet de calculer 4², mais en tirant sur la poignée vers la droite, on obtient un peu plus loin =PUISSANCE(B20;R19) et si R19 contient 17 cela donne 4^{17}.
En prolongeant les calculs avec le tableur, on montre qu'au bout de n=80 étapes la ligne brisée mesure près de 10 milliards de fois celle de S, montrant comment cette longueur peut devenir infinie. Les numérateurs et dénominateurs sont alors gigantesques ($1{,}46\times10^{48}$ pour le numérateur et $1{,}48\times10^{38}$ pour le dénominateur).
La méthode algébrique nous donnerait $n>\frac{2\log10}{\log4-\log3}\approx16{,}78$ (il suffit de doubler n_1) et pour n_3 la valeur pour laquelle la longueur de la ligne brisée dépasse 10 milliards de fois celle de départ (valeur qui n'était pas demandé), on trouve juste 10 fois n car $\frac{10\log10}{\log4-\log3}\approx80{,}08$. On devine qu'au bout de 8008 étapes, la longueur sera 10^{1000} fois celle de départ approximativement. Si on part d'une ligne de longueur 1 *cm*, au bout de 8008 étapes, la ligne brisée mesurera 1×10^{1000} *cm*, soit 1×10^{995} *km* ! Comparez cette longueur avec la distance Terre-Soleil égale à $1{,}5\times10^{8}$ *km*, ou bien encore la distance Terre-Vega (une étoile proche de notre système solaire qui n'est qu'à 25 années-lumières du Soleil) qui vaut environ $2{,}5\times10^{14}$ *km*... Que pensez-vous de cela ? Une erreur de calcul se serait-elle glissée insidieusement ? Non, même pas. Il s'agit cependant d'une longueur complètement théorique que l'on peut calculer mais que l'on ne peut réaliser par aucun moyen matériel. Essayez seulement de dessiner cette courbe jusqu'à l'étape 5 : les traits sont si petits qu'on ne les distinguent pas de ceux de l'étape 4 (c'est pourquoi nous nous sommes arrêté à l'étape 3).



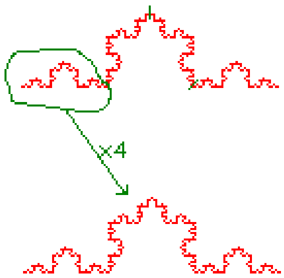
☻ Avec trois lignes ainsi brisées, on forme ce curieux polygone appelé flocon de Koch. Déterminer l'aire K_n de ce flocon aux trois premières étapes de sa construction.
Notons N_n le nombre de segments de longueur L_n dans le flocon : $N_n=4\times N_{n-1}$ car on fait quatre segments à partir d'un seul segment, à l'étape précédente.
Comme $N_0=3$ (le flocon initial est un triangle équilatéral), on a ainsi $N_1=4\times N_0=12$, $N_2=4\times N_1=4^2\times3=48$, $N_3=4\times N_2=4^3\times3=192$, etc. D'une manière générale, on comprend que l'on va avoir $N_n=4^n\times3$. Pour les étapes n=9 et n=17, il va y avoir, respectivement, $N=4^9\times3=786\,432$ et $N=4^{17}\times3=51\,539\,607\,552$ segments au total !

Occupons-nous des longueurs L_n des segments dans le flocon à 'étape n.
On a $L_n=\frac{1}{3}\times L_{n-1}$ car on divise pour réaliser l'étape n, la longueur d'un segment de l'étape $n-1$ par 3. Ainsi, si $L_0=1$ on a $L_1=\frac{1}{3}\approx0{,}333$, $L_2=(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{9}\approx0{,}111$, $L_3=(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27}\approx0{,}037$, etc. D'une manière générale, on comprend que l'on va avoir $L_n=(\frac{1}{3})^n=\frac{1}{3^n}$. Pour les étapes n=9 et n=17, il va y avoir, respectivement, $L=\frac{1}{3^9}=\frac{1}{19683}\approx5\times10^{-5}$ et $L=\frac{1}{3^{17}}=\frac{1}{129140163}\approx8\times10^{-9}$ unité de longueur. Si l'unité est le mètre (on part d'un triangle de 1 *m* de côté), à l'étape n=9, lorsque la longueur du flocon dépasse 10 fois celle du triangle de départ, la longueur de chacun des segments (il y en a plus de 260 000) a été divisée par près de 20 000 et n'est plus que de 5 centièmes de *mm* soit 50 *µm* (le *µm*, on dit aussi « micron », est le millionième de *m*). Il est déjà impossible de dessiner la courbe à cette étape, les stylos les plus fins (les pixels les plus petits) faisant des traits (des points) de 1 dixième de *mm* d'épaisseur (de côté), soit 100 *µm*.

L'aire du flocon à l'étape n est noté K_n. Si la longueur du côté du triangle initial vaut $L_0=1$ *m*, alors on montre facilement que $K_0=\frac{\sqrt3}{4}\approx0{,}433$ *m²* ($\frac{\sqrt3}{2}$ est la hauteur du triangle équilatéral de côté 1). En passant à l'étape 1, on ajoute $N_0=3$ triangles dont les côtés mesurent $L_1=\frac{1}{3}L_0=\frac{1}{3}$ *m*. On ajoute donc une surface égale à $3\times(\frac{1}{3})^2\times\frac{\sqrt3}{4}=\frac{\sqrt3}{12}$, soit encore $\frac{1}{3}\times K_0\approx0{,}144$ *m²*. La surface totale du flocon à l'étape 1 est donc égale à $K_1=K_0+\frac{K_0}{3}=\frac{4}{3}\times K_0$. De même, lorsqu'on passe à l'étape 2, on ajoute $N_1=12$ triangles dont les côtés mesurent $L_2=\frac{1}{9}L_0=\frac{1}{9}$ *m*. On ajoute donc une surface égale à $12\times(\frac{1}{9})^2\times\frac{\sqrt3}{4}=\frac{\sqrt3}{27}=\frac{4}{27}\times A_0\approx0{,}064$ *m²*. La surface totale du flocon à l'étape 2 est donc égale à $K_2=\frac{4K_0}{3}+\frac{4K_0}{27}=\frac{40}{27}\times K_0=\frac{10\sqrt3}{27}\approx0{,}641$ *m²*. Lorsqu'on passe à l'étape 3, on ajoute $N_2=48$ triangles dont les côtés mesurent $L_3=\frac{1}{27}L_0=\frac{1}{27}$ *m*. On ajoute donc une surface égale à $48\times(\frac{1}{27})^2\times\frac{\sqrt3}{4}=\frac{4\sqrt3}{243}=\frac{48}{729}\times K_0\approx0{,}028$ *m²*. La surface totale du flocon à l'étape 3 est donc égale à $K_3=\frac{40K_0}{27}+\frac{48K_0}{729}=\frac{376}{243}\times K_0\approx0{,}670$ *m²*.
Ensuite, et à chaque étape, on ajoute une aire égale à $K_n-K_{n-1}=N_{n-1}\times(L_n)^2\times K_0$ car pour chaque segment de l'étape d'avant (il y en a N_{n-1}), on ajoute un triangle dont les côtés mesurent L_n (son aire vaut $(L_n)^2\times\frac{\sqrt3}{4}=(L_n)^2\times K_0$). Le mieux à faire pour calculer ces nombres est d'utiliser le tableur.

Etape	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ln	1	0,33	0,11	0,04	0,01	0	0	0	0	0	0,000017
Nn	3	12	48	192	768	3072	12288	49152	196608	786432	3145728
K(n)-K(n-1)		0,144337567	0,064150030	0,028511124	0,012671611	0,005631827	0,002503034	0,001112460	0,000494427	0,000219745	0,000097664
K(n)	0,43301270	0,57735027	0,64150030	0,67001142	0,68268303	0,68831486	0,69081790	0,69193036	0,69242478	0,69264453	0,69274219
P(n)	3	4	5,33	7,11	9,48	12,64	16,86	22,47	29,97	39,95	53,27

☻ Jusqu'à quelle étape n faut-il aller pour que l'augmentation de l'aire du flocon ne représente que 10^{-3} de l'aire du flocon initial (*résoudre dans* $\mathbb{N}$: $K_n - K_{n-1} < 0{,}001K_0$) ?
On voit que pour l'étape 9, l'augmentation de l'aire vaut 0,000219745 alors que le millième de l'aire initiale du flocon est environ de 0,0004330127. L'aire totale du flocon est limitée, même si on poursuit le processus jusqu'à l'infini : après 50 étapes, K_n ne vaut pas beaucoup plus (0,692820323027551) qu'après 10 étapes (0,6927422191429835). On montrera en classe de première que la valeur limite, à l'infini, est égale à $\frac{2}{5}\sqrt{3}$, soit environ 0,692820323027550917410978536602348946777122101524152251222322791780773206763520014.
Par contre la longueur totale (périmètre, noté $P(n)$ dans le tableau) du flocon croit, elle, jusqu'à l'infini : à l'étape 10 elle vaut 53 environ alors qu'elle valait 3 au début. À la 50ème étape le périmètre vaut plus de 5 millions (pour calculer P_n le périmètre, on multiplie simplement T_n par L_n).



La propriété de similarité interne

Le flocon à l'infini ressemble beaucoup au flocon de l'étape 5 ou 6, seul le contour, en devenant infiniment plus complexe, a une longueur qui devient infiniment grande. Ce flocon infini a une propriété étonnante, partagée par toutes les fractales : la *similarité interne*. On peut regarder n'importe quel fragment de cette courbe et l'agrandir : le fragment sera exactement semblable à la courbe d'origine. Comme on le voit sur l'image du haut à droite (à gauche c'est Mr Koch), si on agrandit la partie de gauche d'un coefficient 4, on obtient la même ligne brisée (n'oubliez pas qu'on raisonne ici après avoir recommencé la procédure une infinité de fois). On peut recommencer autant que l'on veut cet agrandissement, le résultat sera toujours identique ! Et on peut faire cela avec n'importe quel fragment (on a choisit celui de gauche mais cela pourrait être celui du centre). Une autre chose étonnante : la courbe n'a pas la dimension 1 attribuée généralement aux lignes, elle a une dimension fractionnaire comprise entre 1 et 2 (dimension d'une surface habituellement), en réalité sa dimension vaut environ 1,26. Ce n'est pas tout-à-fait une ligne et pas tout-à-fait une surface, c'est entre les deux. Une dernière propriété de ce flocon : il pave le plan ! Cela veut dire, qu'associé à plusieurs de ses camarades, dont certains plus petits, il remplit complètement le plan, sans laisser aucun trou (voir ci-contre) ! Sauriez-vous dire combien de fois sont plus petits les petits flocons ? Et quel est le rapport entre les quantités des petits et des grands flocons ?