2de TD n°1 sur les équations : Factorisation, Équation-produit-nul & Équation du second degré

CORRECTION

1) Les sept étapes du raisonnement

Résoudre les équations suivantes.

Indications : factoriser à partir de l'étape 2 ; retrouver la forme $(x+b)^2+c=0$ à partir de l'étape 3 et, plus généralement, la forme $a[(x+b)^2+c]=0$ à partir de l'étape 5.

E_1 : $(2x-1)(3x+5)=0$

E_1 équivaut successivement à $2x-1=0$ ou $3x+5=0$ et $x=\frac{1}{2}$ ou $x=\frac{-5}{3}$. Les solutions sont $\frac{1}{2}$ et $-\frac{5}{3}$.

E_2 : $3(2x+7)=4x^2+14x$

E_2 équivaut successivement à $3(2x+7)=2x(2x+7)$; $(3-2x)(2x+7)=0$; $3-2x=0$ ou $2x+7=0$; $x=\frac{3}{2}$ ou $x=\frac{-7}{2}$. Il a fallu factoriser. Attention : ceux qui simplifient par $2x+7$ perdent une solution.

E_3 : $x^2+6x+9=0$

E_3 équivaut successivement à $(x+3)^2=0$; $x+3=0$; $x=-3$. La factorisation est immédiate ici.

E_4 : $x^2+6x+5=0$

E_4 équivaut successivement à $x^2+6x+9-9+5=0$; $(x+3)^2-4=0$; $(x+3+2)(x+3-2)=0$; $(x+5)(x+1)=0$; $x=-5$ ou $x=-1$. La factorisation est plus délicate, elle demande l'emploi d'une astuce de calcul (+9−9) et ensuite la factorisation de a^2-b^2 en $(a-b)(a+b)$.

E_5 : $4x^2-20x+25=0$

E_5 équivaut successivement à $(2x-5)^2=0$; $2x-5=0$; $x=\frac{5}{2}=2{,}5$. La factorisation est immédiate ici.

E_6 : $4x^2-20x-11=0$

E_6 équivaut successivement à $4x^2-20x+25-25-11=0$; $(2x-5)^2-36=0$; $(2x-5+6)(2x-5-6)=0$; $(2x+1)(2x-11)=0$; $x=\frac{-1}{2}$ ou $x=\frac{11}{2}$. La factorisation est plus délicate, elle demande l'emploi d'une astuce de calcul (+25−25) et ensuite la factorisation de a^2-b^2.

E_7 : $2x^2-10x+5=0$

E_7 équivaut successivement à $2(x^2-5x+\frac{5}{2})=0$; $x^2-5x+\frac{5}{2}=0$; $(x-\frac{5}{2})^2-(\frac{5}{2})^2+\frac{5}{2}=0$;
$(x-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}+\frac{10}{4}=0$; $(x-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}+\frac{10}{4}=0$; $(x-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2})(x-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2})=0$
$x=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}$ ou $x=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}$.

La factorisation est du même genre que la précédente mais un peu plus technique. Le secret est de se débarrasser du coefficient de x^2 le plus vite possible (ici, on a mis 2 en facteur, ce qui revient à diviser par 2)

Pour vous entraîner un peu plus sur ces étapes, voici d'autres équations à résoudre :

E'_1 : $(1+3x)(4x-7)=0$; E'_2 : $5(3x-1)+2x=6x^2$; E'_3 : $x^2-4x+4=0$; E'_4 : $-x^2+4x-1=0$;
E'_5 : $9x^2+24x+16=0$; E'_6 : $9x^2-24x+12=0$; E'_7 : $x^2+x+1=0$

Nous nous contenterons ici de donner les solutions et une forme intermédiaire, les méthodes étant analogues à celles de la première série.

E'_1 : $x=\frac{-1}{3}$ ou $x=\frac{7}{4}$;

E'_2 : $x=\frac{1}{3}$ ou $x=\frac{5}{2}$ (la forme factorisée étant $(3x-1)(5-2x)=0$) ;

E'_3 : $x=2$ (la forme factorisée étant $(x-2)^2=0$) ;

E'_4 : $x=2+\sqrt{3}$ ou $x=2-\sqrt{3}$ (les formes intermédiaires : $(x-2)^2-3=0$, puis $(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})=0$) ;

E'$_5$: $x=\frac{-4}{3}$ (la forme intermédiaire $(3x+4)^2=0$ ne s'annulant qu'une fois) ;

E'$_6$: $x=2$ ou $x=\frac{2}{3}$ (la forme intermédiaire est $(3x-4)^2-4=0$) ;

E'$_7$: *impossible* (la forme intermédiaire $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0$ ne s'annulant pas).

2) Autres équations du second degré

a) Transformer les égalités en mettant au même dénominateur, puis résoudre dans $\mathbb{R}$:

E$_1$: $x+\frac{1}{x}=3$

On met au même dénominateur toute l'équation et on écrit qu'une fraction est nulle si son numérateur est nul et son dénominateur non nul (les valeurs interdites sont celles qui annulent le dénominateur).

E$_1$ équivaut successivement à $\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3x}{x}$; $\frac{x^2+1-3x}{x}=0$; $x^2-3x+1=0$ et $x\neq 0$.

Remarque : on aurait pu aussi multiplier E$_1$ directement par $x\neq 0$ et obtenir $x^2-3x+1=0$.

On factorise : $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+1=0$; $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=0$; $\left(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=0$.

Les solutions de cette équation sont donc $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$ qui sont bien différentes de 0.

E$_2$: $\frac{3x-4}{x+1}=\frac{2x+5}{3x+4}$.

Il faut avoir $\frac{(3x-4)(3x+4)}{(x+1)(3x+4)}=\frac{(2x+5)(x+1)}{(x+1)(3x+4)}$ et $x\neq -1$ et $x\neq\frac{-4}{3}$.

Les dénominateurs ne s'annulant alors pas, on peut écrire l'équation $(3x-4)(3x+4)=(2x+5)(x+1)$, soit $9x^2-16=2x^2+7x+5$ ou encore $7x^2-7x-21=0$ ou, en divisant par 7 : $x^2-x-3=0$ ou $(x-\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2-3=0$ ou aussi $(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1+12}{4}=0$ ou $(x-\frac{1}{2})^2-(\frac{\sqrt{13}}{2})^2=0$ ou $(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2})(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2})=0$.

Les solutions de cette équation sont donc $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$ et $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$ qui sont bien différentes des valeurs interdites.

E$_3$: $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=3$. Cette équation s'écrit : $\frac{(x-2)+2(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{3(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$.

On ne peut avoir $x-1=0$ ou $x-2=0$, donc il faut que $x\neq 1$ et $x\neq 2$.

Dans ces conditions, on peut supprimer le dénominateur et écrire l'équation :

$(x-2)+2(x-1)=3(x-1)(x-2)$, donc ou $3x-4=3(x^2-3x+2)$ encore $3x^2-12x+10=0$ ou bien, en divisant par 3 : $x^2-4x+\frac{10}{3}=0$.

Cette équation s'écrit aussi : $(x-2)^2-(2)^2+\frac{10}{3}=0$; $(x-2)^2-\frac{12}{3}+\frac{10}{3}=0$; $(x-2)^2-\frac{2}{3}=0$;

$(x-2-\sqrt{\frac{2}{3}})(x-2+\sqrt{\frac{2}{3}})=0$ et finalement $x=2+\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $x=2-\sqrt{\frac{2}{3}}$.

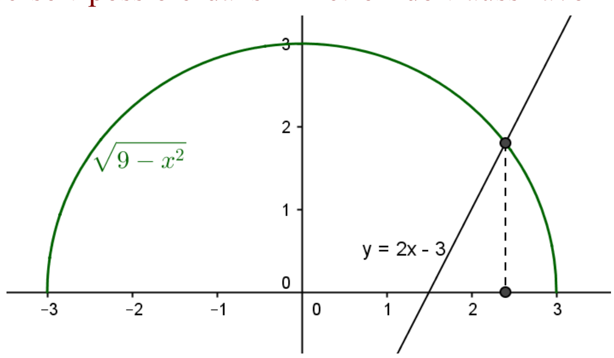
b) Résoudre en tenant compte des valeurs interdites (il y a deux inéquations à résoudre pour cela) :

E$_1$: $\sqrt{9-x^2}=2x-3$

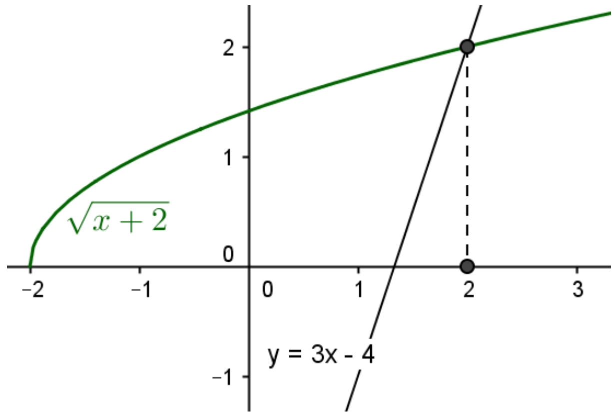
On donne l'ensemble de définition (valeurs qui rendent possible le calcul de la racine carrée) et on élève au carré les deux membres de l'équation.

Il faut avoir $9-x^2\geq 0$ pour que le calcul de la racine carrée soit possible dans $\mathbb{R}$ et on doit aussi avoir $2x-3\geq 0$ car une racine carrée est toujours positive. Donc il faut que $x^2\leq 9$: cela revient à avoir $x^2-3^2\leq 0$, soit $(x-3)(x+3)\leq 0$. Le tableau de signes peut aider alors et on conclut que $-3\leq x\leq 3$. Il faut aussi que $x\geq\frac{3}{2}$. Globalement, on retiendra que x doit vérifier $\frac{3}{2}\leq x\leq 3$. Dans ces conditions, on élève au carré les deux membres de l'équation :

on doit avoir $9-x^2=(2x-3)^2=4x^2-12x+9$,



soit $5x^2-12x=0$ ou $x(5x-12)=0$. Les solutions de cette équation sont donc $x_1=0$ et $x_2=\frac{12}{5}=2{,}4$. Ils reste à vérifier que ces valeurs respectent la condition $\frac{3}{2}\leq x\leq 3$. Seule la seconde de ces valeurs convient. La seule solution est donc $x=2{,}4$. On voit sur le graphique les courbes d'équations $y=\sqrt{9-x^2}$ (un beau demi-cercle) et $y=2x-3$ qui ne se coupent qu'en un point d'abscisse 2,4.



E_2 : $\sqrt{x+2}=3x-4$

Il faut avoir $x+2\geq 0$ pour que le calcul de la racine carrée soit possible dans $\mathbb{R}$ et il faut que $3x-4\geq 0$ car une racine carrée est toujours positive. Donc il faut que $x\geq -2$ et $x\geq\frac{4}{3}$, soit simplement $x\geq\frac{4}{3}$. On élève alors au carré les deux membres de l'équation, on doit avoir $x+2=(3x-4)^2=9x^2-24x+16$, soit $9x^2-25x+14=0$ ou $9[(x-\frac{25}{18})^2-(\frac{25}{18})^2+\frac{14}{9}]=0$ ou aussi, en supprimant le 9 et en continuant les calculs : $(x-\frac{25}{18})^2+\frac{(-625+504)}{324}=0$ ou $(x-\frac{25}{18})^2-\frac{121}{324}=0$, soit $(x-\frac{25}{18})^2-(\frac{11}{18})^2=0$. Factorisons $(x-\frac{25}{18}-\frac{11}{18})(x-\frac{25}{18}+\frac{11}{18})=0$, cela conduit à $(x-\frac{36}{18})(x-\frac{14}{18})=0$, soit $(x-2)(x-\frac{7}{9})=0$. Il y a deux solutions qui sont $x_1=2$ et $x_2=\frac{7}{9}$ mais une seule vérifie $x\geq\frac{4}{3}$, la première. On voit sur le graphique les courbes d'équations $y=\sqrt{x+2}$ et $y=3x-4$ qui ne se coupent qu'en un point d'abscisse 2.

c) Résoudre en trouvant une solution évidente α puis en factorisant sous la forme $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)=0$:

E : $-x^3-3x^2+13x+15=0$

Pour cette équation, on ne dispose pas (pas encore) d'une méthode générale, mais on pourra remarquer que -1 est une solution. Ainsi on peut mettre $(x+1)$ en facteur, et obtenir alors une équation produit-nul de la façon habituelle (en continuant la factorisation).

En effet, on a $-(-1)^3-3(-1)^2+13(-1)+15=1-3-13+15=0$ et donc l'expression $-x^3-3x^2+13x+15$ s'annulant lorsque $x=-1$, donc lorsque $x+1=0$, on peut écrire :

$-x^3-3x^2+13x+15=(x+1)(ax^2+bx+c)$.

Développons cette dernière expression : $(x+1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$.

Par identification des coefficients de ce polynôme du 3ème degré, on trouve que $a=-1$, $c=15$, $b+c=13$ donc $b=13-c=13-15=-2$. Vérifions que $a+b=-3$: $-1+(-2)=-3$. C'est ok, donc on a : $E_2:-(x+1)(x-3)(x+5)=0$. Transformons le 2ème facteur :

$-x^2-2x+15=-(x^2+2x-15)=-((x+1)^2-1-15)=-((x+1)^2-16)=-(x+1-4)(x+1+4)=-(x-3)(x+5)$

Donc $E_2:-(x+1)(x-3)(x+5)=0$ les solutions sont $x=-1$, $x=3$ et $x=-5$.

3) Équations de cercles et de droites

a) Le cercle $\mathcal{C}_1$ a pour centre $A(-1\ ;\ 2)$ et passe par $B(3\ ;\ -1)$.

Écrire la condition sur les distances que doit remplir un point $M(x\ ;\ y)$ pour appartenir à $\mathcal{C}_1$. $AM^2=AB^2$

Traduire cette condition à l'aide des coordonnées pour obtenir la condition sur les coordonnées qui doit être vérifiée pour que M appartienne à $\mathcal{C}_1$, appelée équation du cercle $\mathcal{C}_1$.

$(x-(-1))^2+(y-2)^2=(3-(-1))^2+(-1-2)^2$, soit la relation :

$(x+1)^2+(y-2)^2=4^2+3^2=25=5^2$ qui est l'équation du cercle $\mathcal{C}_1$.

L'équation à résoudre : quelles sont les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ avec les axes de coordonnées

Les intersections de $\mathcal{C}_1$ avec l'axe des ordonnées se trouvent en faisant $x=0$ (équation de l'axe des ordonnées) dans l'équation de $\mathcal{C}_1$: $(1)^2+(y-2)^2=5^2$, soit $(y-2)^2=25-1=24$, et donc $y-2=\sqrt{24}$ ou $y-2=-\sqrt{24}$, ce qui conduit à $y=2+\sqrt{24}\approx 6{,}899$ ou $y=2-\sqrt{24}\approx -2{,}899$.

Les intersections de $\mathcal{C}_1$ avec l'axe des abscisses se trouvent en faisant $y=0$ (équation de l'axe des abscisses) dans l'équation de $\mathcal{C}_1$: $(x+1)^2+(-2)^2=5^2$, soit $(x+1)^2=25-4=21$, et donc $x+1=\sqrt{21}$ ou $x+1=-\sqrt{21}$, ce qui conduit à $x=-1+\sqrt{21}\approx 3{,}582$ ou $x=-1-\sqrt{21}\approx -5{,}582$.

b) La droite $\mathcal{D}_1$ passe par $C(-4\ ;\ 3)$ et passe par $D(-2\ ;\ 4)$.

Écrire la condition sur les vecteurs que doit remplir un point $M(x\ ;\ y)$ pour appartenir à $\mathcal{D}_1$.
$\overrightarrow{CD}$ colinéaire à $\overrightarrow{CM}$, soit $det(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CM})=0$.
Traduire cette condition à l'aide des coordonnées pour obtenir la condition sur les coordonnées qui doit être vérifiée pour que M appartienne à $\mathcal{D}_1$, appelée équation de la droite $\mathcal{D}_1$.
$(x-(-4))(4-3)-(-2-(-4))(y-3)=0$, soit $(x+4)-2(y-3)=0$, soit encore $x-2y+10=0$ qui est une équation de la droite $\mathcal{D}_1$.
L'équation à résoudre : quelles sont les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{D}_1$ avec $\mathcal{C}_1$?
Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{D}_1$ avec $\mathcal{C}_1$ vérifient les 2 équations $(x+1)^2+(y-2)^2=5^2$ et $x-2y+10=0$, soit, en remplaçant x par $2y-10$ dans l'équation de $\mathcal{C}_1$ $(2y-10+1)^2+(y-2)^2=5^2$ qui donne $(2y-9)^2+(y-2)^2=5^2$. En développant, on trouve $4y^2-36y+81+y^2-4y+4=25$ et en réduisant $5y^2-40y+60=0$. Simplifions par 5 : $y^2-8y+12=0$ et factorisons comme au 1) : $(y-4)^2-16+12=0$ et donc, on a $(y-4)^2-4=0$ qui se factorise en $(y-4-2)(y-4+2)=0$ et a pour solutions $y=6$ ou $y=2$.
Les points d'intersections cherchés ont pour coordonnées ($2\times 6-10$; 6) et ($2\times 2-10$; 2), c'est-à-dire (2 ; 6) et (-6 ; 2).