2de — de l'équation-produit-nul à l'équation du second degré en 7 étapes

CORRECTION

1) Résoudre les équations suivantes :

E1 : $(2x-1)(3x+5)=0$

E1 équivaut successivement à $2x-1=0$ ou $3x+5=0$ et $x=\frac{1}{2}$ ou $x=\frac{-5}{3}$.

Les solutions sont $\frac{1}{2}$ et $-\frac{5}{3}$.

E2 : $3(2x+7)=4x^2+14x$

E2 équivaut successivement à $3(2x+7)=2x(2x+7)$; $(3-2x)(2x+7)=0$; $3-2x=0$ ou $2x+7=0$; $x=\frac{3}{2}$ ou $x=\frac{-7}{2}$. Les solutions sont $\frac{3}{2}$ et $-\frac{7}{2}$.

Il a fallu factoriser. Attention : ceux qui simplifient par $2x+7$ perdent une solution !

E3 : $x^2+6x+9=0$

E3 équivaut successivement à $(x+3)^2=0$; $x+3=0$; $x=-3$. La seule solution est -3.

La factorisation est immédiate ici (2ème identité remarquable).

Indication pour les suivantes : retrouver la forme $(x+b)^2+c=0$

E4 : $x^2+6x+5=0$

E4 équivaut successivement à $x^2+6x+9-9+5=0$; $(x+3)^2-4=0$; $(x+3+2)(x+3-2)=0$; $(x+5)(x+1)=0$; $x=-5$ ou $x=-1$.

La factorisation est plus délicate, elle demande l'emploi d'une astuce de calcul (+9−9) et ensuite la factorisation de a^2-b^2 en $(a-b)(a+b)$.

E5 : $4x^2-20x+25=0$

E5 équivaut successivement à $(2x-5)^2=0$; $2x-5=0$; $x=\frac{5}{2}$. La seule solution est $\frac{5}{2}=2{,}5$.

La factorisation est immédiate ici (encore la 2ème identité remarquable).

Si on veut obtenir, comme il est suggéré, la forme $(x+b)^2+c=0$, il faut tout diviser par 4. E5 équivaut alors successivement à $x^2-5x+\frac{25}{4}=0$; $(x-\frac{5}{2})^2=0$, soit $b=\frac{-5}{2}$ et $c=0$, la fin ne pose pas de problème

E6 : $4x^2-20x-11=0$

E6 équivaut successivement à $4x^2-20x+25-25-11=0$; $(2x-5)^2-36=0$; $(2x-5+6)(2x-5-6)=0$; $(2x+1)(2x-11)=0$; $x=\frac{-1}{2}$ ou $x=\frac{11}{2}$. La factorisation est plus délicate, elle demande l'emploi d'une astuce de calcul (+25−25) et ensuite la factorisation de a^2-b^2.

Si on veut obtenir, comme il est suggéré, la forme $(x+b)^2+c=0$, il faut encore ici tout diviser par 4.

E6 équivaut alors successivement à $x^2-5x-\frac{11}{4}=0$; $(x-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}-\frac{11}{4}=0$; $(x-\frac{5}{2})^2-\frac{36}{4}=0$ et la fin ne pose pas de problème : on factorise et réduit $(x-\frac{5}{2}-\frac{6}{2})(x-\frac{5}{2}+\frac{6}{2})=0 \Leftrightarrow (x-\frac{11}{2})(x+\frac{1}{2})=0$ et on résout $x=\frac{-1}{2}$ ou $x=\frac{11}{2}$.

Indication pour la dernière : retrouver la forme $a[(x+b)^2+c]=0$

E7 : $2x^2-10x+5=0$

E7 équivaut successivement à $2(x^2-5x+\frac{5}{2})=0$; $x^2-5x+\frac{5}{2}=0$; $(x-\frac{5}{2})^2-(\frac{5}{2})^2+\frac{5}{2}=0$; $(x-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}+\frac{10}{4}=0$; $(x-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}+\frac{10}{4}=0$; $(x-\frac{5}{2})^2-(\frac{\sqrt{15}}{2})^2=0$; $(x-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2})(x-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2})=0$; $x=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}$ ou $x=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}$.

La factorisation est du même genre que la précédente mais un peu plus technique. Le secret est de se débarrasser du coefficient de x^2 le plus vite possible (ici, on a mis 2 en facteur, ce qui revient à diviser par 2)

2) Pour s'entraîner un peu plus sur ces étapes, une autre série de 7 équations à résoudre :

E'$_1$: $(1+3x)(4x-7)=0$. Solutions : $\frac{-1}{3}$ et $\frac{7}{4}$

E'$_2$: $5(3x-1)+2x=6x^2$. Solutions : $\frac{1}{3}$ et $\frac{5}{2}$ (la forme factorisée étant $(3x-1)(5-2x)=0$)

E'$_3$: $x^2-4x+4=0$. Solution : $x=2$ (la forme factorisée étant $(x-2)^2=0$) ;

E'$_4$: $-x^2+4x-1=0$. Solutions : $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$

(les formes intermédiaires : $(x-2)^2-3=0$, puis $(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})=0$)

E'$_5$: $9x^2+24x+16=0$. Solution : $x=\frac{-4}{3}$ (la forme intermédiaire $(3x+4)^2=0$ ne s'annulant qu'une fois)

E'$_6$: $9x^2-24x+12=0$. Solutions : 2 et $\frac{2}{3}$ (la forme intermédiaire est $(3x-4)^2-4=0$)

E'$_7$: $x^2+x+1=0$ *impossible* (la forme intermédiaire $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0$ ne s'annulant pas).

3) Pour formaliser ce qu'on fait à la dernière étape :

a) écrire $ax^2+bx+c=0$ sous la forme $a[x^2+b'x+c']=0$ où a' et b' sont des coefficients à déterminer.

$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}]=0$ D'où $b'=\frac{b}{a}$ et $c'=\frac{c}{a}$.

b) écrire $a[x^2+b'x+c']=0$ sous la forme $a[(x+b'')^2+c'']=0$ où b'' et c'' sont à déterminer.

$a[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}]=0 \Leftrightarrow a[(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}]=0$ d'où $b''=\frac{b}{2a}$ et $c''=-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}=\frac{-b^2+4ac}{(2a)^2}$.

c) reconnaître pourquoi on peut factoriser lorsque $c''\leq 0$. Dans ce cas, en posant $c''=-d^2$, factoriser.
En déduire une expression littérale des solutions.

Lorsque $c''=-\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}\leq 0$, on reconnaît une différence de carrés entre les crochets. On peut donc factoriser. En posant $\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}=d^2\geq 0$, l'équation s'écrit $a[(x+\frac{b}{2a})^2-d^2]=0$ et alors la factorisation est $a(x+\frac{b}{2a}-d)(x+\frac{b}{2a}+d)=0$. Ce qui nous donne les solutions $x=\frac{-b}{2a}+d$ et $x=\frac{-b}{2a}-d$.

NB : Généralement, on pose plutôt $b^2-4ac=\Delta$ et la discussion porte sur le signe de Δ :

- si $\Delta\geq 0$, alors on peut factoriser, et comme l'équation s'écrit $a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{(2a)^2}]=0$, la factorisation est $a(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})=0$, ce qui nous donne les solutions distinctes $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Dans le cas où $\Delta=0$, les deux solutions fusionnent en une seule.
- si $\Delta<0$, on ne peut pas factoriser, et l'équation n'a pas de solution.