1. Quelques factorisations

a) factorisations simples

$A=6x-2+x(3x-1)=(2+x)(3x-1)$;

$B=12x^3-20x^2(x+1)-8x(x^2-1)=4x(3x^2-5x(x+1)-2(x^2-1))$, la factorisation est faite à ce stade mais on va généralement jusqu'à réduire chacun des facteurs :

$B=4x(3x^2-5x^2-5x-2x^2+2)=4x(-4x^2-5x+2)$. Ici on s'arrête, la factorisation du facteur du 2d degré étant, pour l'instant, inconnue.

b) factorisations utilisant une identité remarquable

$C=x^2-4=(x-2)(x+2)$; $D=4x^2-(3x-2)^2=(2x-(3x-2))(2x+(3x-2))=(-x+2)(5x-2)$

2. Signe d'une expression affine (1er degré) et d'un produit d'expressions affines

a) Résoudre l'inéquation $3x-1>0$,
puis compléter la ligne donnant le signe de $3x-1$ dans le tableau ci-dessous.

$3x-1>0 \Leftrightarrow 3x>1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$.

Le signe de $3x-1$ est donc + pour $x\in]\frac{1}{3};+\infty[$ et − ailleurs.

b) Résoudre l'inéquation $1-2x<0$,
puis compléter la ligne donnant le signe de $1-2x$ dans le tableau ci-dessous.

$1-2x<0 \Leftrightarrow -2x<-1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$ (la division par -2 change le sens de l'inégalité).

Le signe de $1-2x$ est donc − pour $x\in]\frac{1}{2};+\infty[$ et + ailleurs.

c) Déterminer les solutions de l'inéquation $(3x-1)(1-2x)\geq 0$ en achevant le tableau de signe :

Valeur de x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $3x-1$		−	0	+		+	
Signe de $1-2x$		+		+	0	−	
$(3x-1)(1-2x)$		−	0	+	0	−	

Solutions de l'inéquation : $x\in[\frac{1}{3};\frac{1}{2}]$. On peut aussi noter cela $\frac{1}{3}\leq x\leq\frac{1}{2}$.

3. Inéquations à résoudre (en faisant un tableau de signes)

a) Produits

I_1 : $2x(3x-1)(1-2x)<0$

Le signe de l'expression $2x$ n'est pas difficile à déterminer : c'est celui de x ($2x>0 \Leftrightarrow x>0$).

Les valeurs de x qui annulent les facteurs sont 0, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$. Comme elles sont dans l'ordre, plaçons les dans le tableau de signes que nous complétons pour avoir le signe de $P(x)$, le produit des trois facteurs.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x$		−	0	+		+		+	
$3x-1$		−		−	0	+		+	
$1-2x$		+		+		+	0	−	
$P(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

L'inéquation I_1 a donc pour solutions :

$x\in]-\infty;0[\cup]\frac{1}{3};\frac{1}{2}[$

I_2 : $-4(x-1)^2(x^2+1)(22-7x)(x-\pi)\geq 0$

On remarque que les trois premiers facteurs ne changent jamais de signe : $(x-1)^2\geq 0$ car c'est un carré ; $x^2+1\geq 1>0$; $-4<0$. Il peut juste s'annuler pour $x=1$. Les deux autres facteurs changent de signe : $22-7x>0 \Leftrightarrow x<\frac{22}{7}$ et $x-\pi>0 \Leftrightarrow x>\pi$.

x	$-\infty$		1		π		$\frac{22}{7}$		$+\infty$
$-4(x-1)^2(x^2+1)$		−	0	−		−		−	
$22-7x$		+		+		+	0	−	
$x-\pi$		−		−	0	+		+	
$P(x)$		+	0	+	0	−	0	+	

L'inéquation I_2 a donc pour solutions :

$x\in]-\infty;\pi]\cup[\frac{22}{7};+\infty[$

NB : si l'équation était $-4(x-1)^2(x^2+1)(22-7x)(x-\pi)\leq 0$ (négatif ou nul au lieu de positif ou nul), les solutions seraient $x\in[\pi;\frac{22}{7}]\cup\{1\}$ car pour x = 1 l'expression est nulle (à cause de $(x-1)^2$).

b) Quotients

Attention : les signes des expressions au dénominateur comptent aussi !

I_3 : $\dfrac{2x(1+x)}{(1+2x)(1+3x)} \leq 0$

Les valeurs de x qui annulent les facteurs sont 0, -1 , $\frac{-1}{2}$ et $\frac{-1}{3}$. Dans l'ordre, il s'agit de -1 , $\frac{-1}{2}$, $\frac{-1}{3}$ et 0. Plaçons les dans le tableau de signes que nous complétons pour avoir le signe de $Q(x)$, le quotient des deux premiers facteurs par les deux derniers. Pour les valeurs interdites, on met ‖.

x	$-\infty$		-1		$\frac{-1}{2}$		$\frac{-1}{3}$		0		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$1+2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$1+3x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$Q(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	

L'inéquation I_3 a donc pour solutions : $x \in [-1\,;-\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{3}\,;0]$ (noter les crochets qui rejettent les valeurs interdites)

c) Factoriser puis étudier le signe du produit

I_4 : $(3x-5)^2 \leq 4$

(penser à utiliser une identité remarquable)

L'inéquation se transforme successivement en $(3x-5)^2-2^2 \leq 0$ et $(3x-7)(3x-3) \leq 0$.

Il ne reste plus qu'à faire le tableau de signes et conclure... aux solutions $x \in [1\,;\frac{7}{3}]$.

I_5 : $2(9x^2-1)-(3x-1)(2x+1) \geq 0$

(factorisation classique, presque « évidente »)

L'inéquation se transforme successivement en $2(3x-1)(3x+1)-(3x-1)(2x+1) \geq 0$ et puis $(3x-1)[2(3x+1)-(2x+1)] \geq 0$, soit $(3x-1)(6x+2-2x-1) \geq 0$ ou encore $(3x-1)(4x+1) \geq 0$.

Il ne reste plus qu'à faire le tableau de signes et conclure... aux solutions $x \in]-\infty\,;-\frac{1}{4}]\cup[\frac{1}{3}\,;+\infty[$.

Question : et si on ne voit pas la factorisation ?

Si on développe, en supposant qu'on ne fasse pas d'erreur, on obtient une expression développée du 2^{d} degré dans le membre de gauche : $12x^2-x-1 \geq 0$. Pour factoriser ici, il faut utiliser une formule (pas encore étudiée) ou bien une astuce de calcul algébrique. La voici :

$$12x^2-x-1 \geq 0 = \frac{1}{3}(36x^2-3x-3) = \frac{1}{3}\left(\left(6x-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2-3\right) = \frac{1}{3}\left(\left(6x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{49}{16}\right) = \frac{1}{3}\left(6x-\frac{1}{4}-\frac{7}{4}\right)\left(6x-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\right)$$

Voilà, on arrive finalement sur $\frac{1}{3}\left(6x-\frac{8}{4}\right)\left(6x+\frac{6}{4}\right) = \frac{1}{3}(6x-2)\left(6x+\frac{3}{2}\right)$, mais c'est plus simple de faire avec la factorisation « évidente ». Pour ceux qui ne sont toujours pas convaincus, le passage difficile s'explique par le développement suivant : $\left(6x-\frac{1}{4}\right)^2 = (6x)^2-2\times(6x)\times\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 36x^2-3x+\left(\frac{1}{4}\right)^2$ … Mais on reviendra sur ce point en cours.

I_6 : $x^2-2x \leq 3$

(on peut penser à mettre l'inéquation sous la forme $(x-\alpha)^2+\beta \leq 0$, où α et β sont des nombres à déterminer)

L'inéquation se transforme successivement en $x^2-2x-3 \leq 0$ et puis, pour ne par devoir repasser par la formule, $(x-1)^2-1^2-3 \leq 0$, soit $(x-1)^2-4 \leq 0$ ou encore $(x-3)(x+1) \leq 0$.

Il ne reste plus qu'à faire le tableau de signes et conclure... aux solutions $x \in [-1\,;3]$.

d) Mettre tout dans le même membre, au même dénominateur, puis étudier le signe du quotient

I_7 : $\dfrac{2x}{1+3x} < 1$

L'inéquation se transforme successivement en $\frac{2x}{1+3x}-1<0$ puis, en mettant au même dénominateur, $\frac{2x-(1+3x)}{1+3x}<0$ et enfin $\frac{-x-1}{1+3x}<0$ ou $\frac{x+1}{1+3x}>0$.

Il ne reste plus qu'à faire le tableau de signes et conclure... aux solutions $x \in]-\infty\,;-1[\cup]-\frac{1}{3}\,;+\infty[$.

I_8 : $\dfrac{1}{x-2} \geq \dfrac{2}{x+3}$

L'inéquation se transforme successivement en $\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+3} \geq 0$ puis, en mettant au même dénominateur, $\frac{x+3-2(x-2)}{(x-2)(x+3)} \geq 0$ et enfin $\frac{-x+7}{(x-2)(x+3)} \geq 0$.

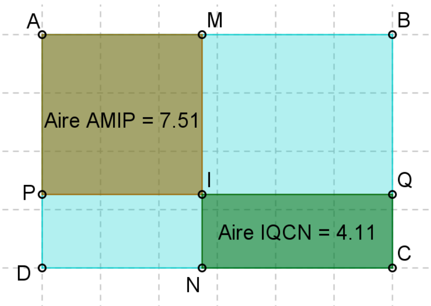
Il ne reste plus qu'à faire le tableau de signes et conclure...solutions $x \in]-\infty\,;-3[\cup]2\,;7]$.

3. Problèmes conduisant à une inéquations

a) En géométrie (extrait de votre manuel, ex.55 p.107) :

ABCD est un rectangle tel que *AB*=6 et *AD*=4. On place *P* sur [*AD*] et *M* sur [*AB*] de manière à avoir *AP*=*AM*=*x*.

Sachant que (*PQ*)//(*AB*) et (*MN*)//(*AD*), *I* étant l'intersection de (*PQ*) et (*MN*), on demande les valeurs de *x* pour que l'aire de *AMIP* soit inférieure à l'aire de *IQCN*.



On doit avoir $x^2 \leq (6-x)(4-x)$, soit $x^2 \leq 24-10x+x^2$ ce qui revient à $0 \leq 24-10x$ et donc $x \leq \frac{24}{10}$. On doit donc avoir $x \in [0\,;2{,}4]$.

b) En physique (extrait de votre manuel, ex.58 p.107) :

Au fur et à mesure qu'une navette spatiale prend de l'altitude, le poids (apparent) de l'astronaute diminue jusqu'à atteindre un état d'apesanteur. Le poids d'un astronaute de 70 kg à l'altitude *x* (en km) au dessus de la mer est donné par $P=70\left(\frac{6400}{6400+x}\right)^2$. À quelle altitude l'astronaute pèsera t-il moins de 5 kg ?

On doit avoir $70\left(\frac{6400}{6400+x}\right)^2 \leq 5$ soit $70 \times 6400^2 \leq 5 \times (6400+x)^2$ (on a tout multiplié par $(6400+x)^2$ qui est positif). On met tout dans le même membre et on divise par 5, cela donne $14 \times 6400^2-(6400+x)^2 \leq 0$. L'expression de gauche se factorise en $(\sqrt{14} \times 6400-(6400+x))(\sqrt{14} \times 6400+(6400+x))$ $(6400 \times (\sqrt{14}-1)-x)(6400 \times (\sqrt{14}+1)+x)$. Cette expression change de signe pour $x=x_1=6400 \times (\sqrt{14}-1) \approx 17546{,}61$ et pour $x=x_2=-6400 \times (\sqrt{14}+1) \approx -30346{,}61$. La première valeur est celle qui se trouve au-dessus de notre tête (à 17 546 *km* de hauteur), la seconde est de l'autre côté de la Terre (12 800 *km* de diamètre), à la même hauteur. On peut faire un tableau de signe pour s'assurer que pour $x>x_1$, l'expression est négative ainsi que pour $x<x_2$.

Une autre approche du même problème à l'aide de GeoGebra (ou d'un autre traceur de courbes) :

On y retrouve tout ce que l'on vient de montrer et en particulier qu'au dessus de 17546 km environ, le poids d'un astronaute qui pèse 70 kg à la surface de la Terre est inférieur à 5 kg (je pense qu'il s'agit d'un abus de langage, habituel pour les poids : on mesure en kg la masse d'un corps, le poids est une force qui s'exprime en Newton : c'est elle qui est inférieur en altitude car l'accélération de la pesanteur est moindre, voir le cours de physique...).