2^{de} DS n°2 sur les Vecteurs CORRECTION

Ce DS, qui a été donné l'an dernier, vous donne une idée de celui que vous aurez vendredi mais il n'y a là presque rien sur les équations de droites alors que nous avons insisté cette année sur ce point...

1) a) E et F sont deux points distincts.

Combien de point(s) M vérifient les égalités indépendantes suivantes (Justifier votre réponse) :

(1) $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{MF}$

Un seul, c'est la traduction vectorielle du fait que M est le milieu de $[EF]$.

(2) $\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{EF}$

Une infinité, c'est la relation de Chasles, N peut être n'importe où, la relation est toujours vraie.

(3) $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{FM}$

Aucun car la relation est toujours fausse car elle équivaut successivement à $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EM}-\overrightarrow{EF}$, $\vec{0}=-\overrightarrow{EF}$ et donc $\overrightarrow{EF}=\vec{0}$, ce qui ne se peut pas puisque $E\neq F$.

b) Simplifier les écritures vectorielles suivantes :

$\vec{u}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.

$\vec{v}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FA}=2\overrightarrow{FA}$.

$\vec{w}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{EQ}-\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PQ}=\vec{0}$.

c) P est le point défini par l'égalité $3\overrightarrow{PE}+5\overrightarrow{PF}=\vec{0}$.

Exprimer $\overrightarrow{EP}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$, puis placer le point P sur la figure.

On a $3\overrightarrow{PE}+5(\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EF})=8\overrightarrow{PE}+5\overrightarrow{EF}=\vec{0}$, et donc $8\overrightarrow{PE}=-5\overrightarrow{EF}=5\overrightarrow{FE}$ ou $\overrightarrow{PE}=\frac{5}{8}\overrightarrow{FE}$ ou encore $\overrightarrow{EP}=\frac{5}{8}\overrightarrow{EF}$.

2) a) ABC est un triangle quelconque. Compléter la figure en plaçant les points D, E, F et G tels que (justifier d'une phrase ou d'un calcul vectoriel) :

D est tel que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Règle du parallélogramme : D est le 4ème sommet du parallélogramme $CABD$.

E est tel que $\overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

On peut placer B' tel que $\overrightarrow{BB'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, puis B'' tel que $\overrightarrow{B'B''}=\overrightarrow{BC}$. E est alors le 4ème sommet du parallélogramme $BB''AE$.

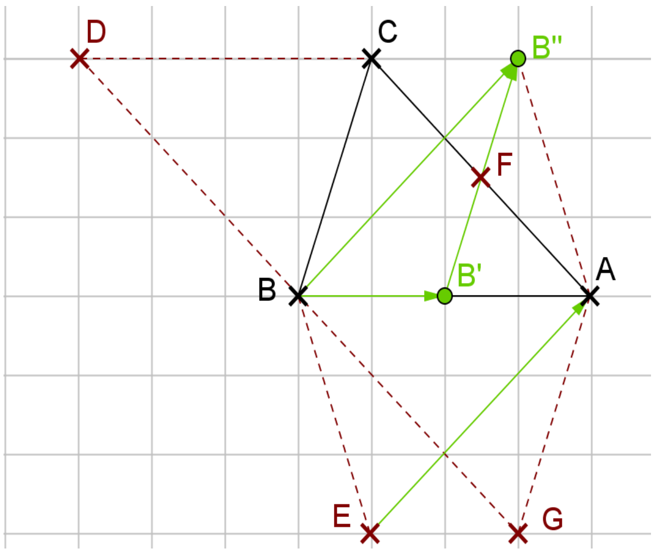
F est tel que $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BF}$

On a $(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FA})+(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC})=2\overrightarrow{BF}$,

d'où $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$, le point F est le milieu de $[AC]$.

G est tel que $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{CG}$

(exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$).



On a $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{CG}-\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{CB}$, d'où G est le 4ème sommet du parallélogramme $BCAG$.

b) A, B, C, D et E sont cinq points tels que :

$$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED}.$$

Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Cet exercice était sur la feuille TD n°1 (verso). Décomposons $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED}$:

$\overrightarrow{EA}+(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD})$. On peut supprimer $2\overrightarrow{EA}$ dans les deux membres et obtenir : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ qui définit bien C comme le 4ème sommet du parallélogramme $BADC$ ou, ce qui revient au même, $ABCD$.

On ajoute à cette figure les points I et J définis par les égalités $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$.

Montrer que $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{BD}$ puis que $\overrightarrow{CJ}=-2\overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{BJ}-\overrightarrow{BC}=(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA})=2\overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{BD}$.

Donc on a $\overrightarrow{CJ}=-2\overrightarrow{BD}=-2\overrightarrow{CI}$.

Que peut-on en déduire pour les points *C, I* et *J* ?

Les vecteurs $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{CI}$ étant colinéaires, les droites (*CJ*) et (*CI*) sont parallèles, donc confondues (car elles ont un point commun : *C*).

3) Le point *G* est le centre de gravité d'un triangle *ABC*.

a) Quelle égalité vectorielle vérifie t-il ?

Le centre de gravité *G* de *ABC* vérifie l'égalité $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

b) Montrer que pour tout point *M* du plan on a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$?

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})=3\overrightarrow{MG}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$,

or $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. On en déduit que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}+\vec{0}=3\overrightarrow{MG}$.

c) On nomme *A'*, *B'* et *C'* les milieux respectifs des côtés [*BC*], [*CA*] et [*AB*].

Exprimer $\overrightarrow{AA'}$ sous la forme $x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$, puis trouver une égalité semblable pour $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$.

A', *B'* et *C'* étant les milieux respectifs de [*BC*], [*CA*] et [*AB*], on a $2\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,

soit $\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. De même on a $\overrightarrow{BB'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$ et $\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})$.

Montrer alors que $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$. Que peut-on en déduire pour le triangle *A'B'C'* ?

$\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA'})+(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BB'})+(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CC'})=(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'})$.

Comme $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ on a $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$.

D'après la question précédente, on peut écrire :

$\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})=\frac{1}{2}(\vec{0})=\vec{0}$.

Le point *G* est donc, aussi (il l'est de *ABC*), le centre de gravité du triangle *A'B'C'*.

d) Soit *M* un point tel que $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ où *a*, *b* et *c* sont trois réels non nuls tels que $a+b+c\neq 0$. Montrer que les coordonnées de *M* dans le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) sont $(\frac{b}{a+b+c}\ ;\ \frac{c}{a+b+c})$.

Comme $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, on a $a\overrightarrow{MA}+b(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})+c(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$,

soit $(a+b+c)\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ ou $(a+b+c)\overrightarrow{AM}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$,

et donc $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{a+b+c}(b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC})$ ou encore $\overrightarrow{AM}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$.

Les coordonnées de *M* dans le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) sont donc $(\frac{b}{a+b+c}\ ;\ \frac{c}{a+b+c})$, avec $a+b+c\neq 0$.

e) Montrer que si (*AM*)//(*BC*) alors on doit avoir $b+c=0$.

$\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ alors que $\overrightarrow{AM}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$.

Ces deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul, c'est-à-dire si et seulement si $\frac{b}{a+b+c}\times 1-\frac{c}{a+b+c}\times(-1)=0$, soit si et seulement si $\frac{b+c}{a+b+c}=0$.

Comme $a+b+c\neq 0$, cela revient à $b+c=0$. Finalement (*AM*)//(*BC*) si et seulement si $b+c=0$.

4) On se place dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Les points *A, B, C, D* et *E* ont pour coordonnées $A(2;1)$, $B(0;2)$, $C(5;\frac{-1}{2})$, $D(3;\frac{5}{2})$ et $E(8;0)$.

a) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis le déterminant de ces vecteurs.

$\overrightarrow{AB}(0-2\ ;\ 2-1)$ donc $\overrightarrow{AB}(-2\ ;\ 1)$.

$\overrightarrow{AC}(5-2\ ;\ -\frac{1}{2}-1)$ donc $\overrightarrow{AC}(3\ ;\ -\frac{3}{2})$.

$det(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})=(-2)\times(\frac{-3}{2})-3\times 1=3-3=0$.

Que peut-on en conclure ? On peut en conclure que *A*, *B* et C sont alignés.

b) Montrer que (*AB*)//(*DE*). *ABED* est-il un parallélogramme ? (justifier la réponse)

$\overrightarrow{AB}(-2\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{DE}(8-3\ ;\ 0-\frac{5}{2})$ donc $\overrightarrow{DE}(5\ ;\ -\frac{5}{2})$.

$det(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{DE})=(-2)\times(\frac{-5}{2})-5\times 1=5-5=0$.

Non *ABED* n'est pas un parallélogramme car, d'après les coordonnées, $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{DE}$ (les vecteurs sont colinéaires, mais ils ne sont pas égaux).

c) Écrire une condition vectorielle pour que le point *P* appartienne à la parallèle à (*AB*) passant par *C*. Si on note $(x;y)$ les coordonnées du point *P*, traduire cette condition vectorielle sous la forme d'une relation de type $ax+by=c$ (cette relation est dite « équation cartésienne de la droite »).

Pour que $P(x;y)$ appartienne à cette droite, il faut que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CP}$ soient colinéaires.
Or, $\overrightarrow{CP}$ a pour coordonnées ($x-5$; $y+\frac{1}{2}$).
Le déterminant *det*($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CP}$) vaut $(y+\frac{1}{2})\times(-2)-(x-5)\times1=-x-2y+4$.
$P(x;y)$ appartient à la droite si et seulement si *det*($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM}$)=0.
Une équation de cette droite est donc $-x-2y+4=0$.
On peut aussi écrire cette équation $x+2y=4$ (l'équation cartésienne demandée) ou encore $y=\frac{-1}{2}x+2$ (équation réduite).
Remarque : Comme A, B et C sont alignés, cette droite est la droite (AB).
On aurait donc pu donner la condition : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP}$ colinéaires ou une relation équivalente.
d) Déterminer l'abscisse x du point P de cette droite d'ordonnée y=2016.
L'abscisse du point de la droite d'ordonnée 2016 vérifie $-x-2\times2016+4=0$.
On a donc $x=-4032+4=-4028$.
Le point P a pour coordonnées (-4028 ; 2016).