

Une élève m'a demandé de rectifier sa note de DMI. J'ai noté B- pour cette élève (Clara BM), ce qui fait 15/20. Si c'est une erreur peut-elle me scanner la 1^{ère} page de ce DM que je constate mon erreur (ph.moutou@free.fr)...

Les notes de ce DS seront en ligne dès que j'aurai fini la correction.

Bonnes vacances à tous ! Reposez-vous bien.

1) a) E et F sont deux points distincts.

Combien de point(s) M vérifient les égalités indépendantes suivantes (Justifier votre réponse) :

(1) $\vec{EM} = \vec{MF}$

Un seul, c'est la traduction vectorielle du fait que M est le milieu de $[EF]$.

(2) $\vec{EM} + \vec{MF} = \vec{EF}$

Une infinité, c'est la relation de Chasles, N peut être n'importe où, la relation est toujours vraie.

(3) $\vec{EM} = \vec{FM}$

Aucun car la relation est toujours fautive car elle équivaut successivement à $\vec{EM} = \vec{EM} - \vec{EF}$, $\vec{0} = -\vec{EF}$ et donc $\vec{EF} = \vec{0}$, ce qui ne se peut pas puisque $E \neq F$.

b) Simplifier les écritures vectorielles suivantes :

$$\vec{u} = \vec{ED} + \vec{AB} - \vec{AC} + \vec{DE} = \vec{ED} + \vec{DE} + \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}.$$

$$\vec{v} = \vec{MA} - \vec{MF} + \vec{FA} = \vec{FA} + \vec{FA} = 2\vec{FA}.$$

$$\vec{w} = \vec{AP} - \vec{AQ} + \vec{EQ} - \vec{EP} = \vec{QP} + \vec{PQ} = \vec{0}.$$

c) P est le point défini par l'égalité $3\vec{PE} + 5\vec{PF} = \vec{0}$.

Exprimer \vec{EP} en fonction de \vec{EF} , puis placer le point P sur la figure.

On a $3\vec{PE} + 5(\vec{PE} + \vec{EF}) = 8\vec{PE} + 5\vec{EF} = \vec{0}$, et donc $8\vec{PE} = -5\vec{EF} = 5\vec{FE}$ ou $\vec{PE} = \frac{5}{8}\vec{FE}$ ou encore $\vec{EP} = \frac{5}{8}\vec{EF}$.



2) a) ABC est un triangle quelconque. Compléter la figure en plaçant les points D, E, F et G tels que (justifier d'une phrase ou d'un calcul vectoriel) :

$$D \text{ est tel que } \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$$

Règle du parallélogramme : D est le 4^{ème} sommet du parallélogramme $CABD$.

$$E \text{ est tel que } \vec{EA} = \frac{1}{2}\vec{BA} + \vec{BC}$$

On peut placer B' tel que $\vec{BB}' = \frac{1}{2}\vec{BA}$, puis B'' tel que $\vec{B'B''} = \vec{BC}$. E est alors le 4^{ème} sommet du parallélogramme $BB''AE$.

$$F \text{ est tel que } \vec{BA} + \vec{BC} = 2\vec{BF}$$

$$\text{On a } (\vec{BF} + \vec{FA}) + (\vec{BF} + \vec{FC}) = 2\vec{BF},$$

d'où $\vec{FA} + \vec{FC} = \vec{0}$, le point F est le milieu de $[AC]$.

$$G \text{ est tel que } \vec{AG} + \vec{BG} = \vec{CG}$$

(exprimer \vec{AG} en fonction de \vec{AB} et \vec{AC}).

On a $\vec{AG} = \vec{CG} - \vec{BG} = \vec{CB}$, d'où G est le 4^{ème} sommet du parallélogramme $BCAG$.

b) A, B, C, D et E sont cinq points tels que :

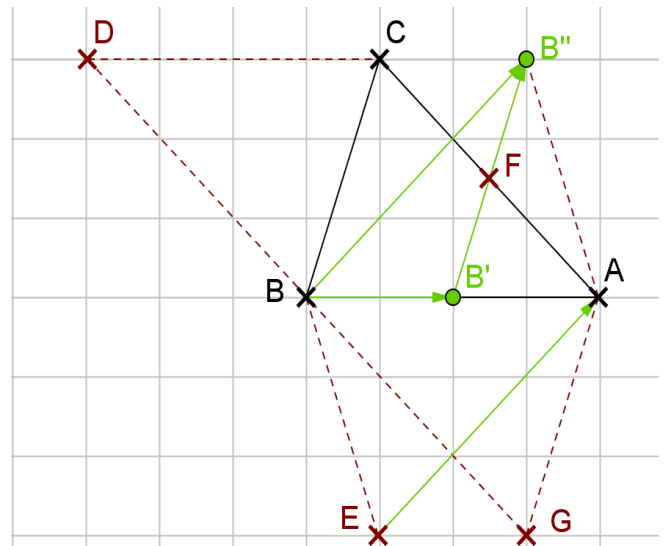
$$\vec{EA} + \vec{EC} = \vec{EB} + \vec{ED}.$$

Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Cet exercice était sur la feuille TD n°1 (verso). Décomposons $\vec{EA} + \vec{EC} = \vec{EB} + \vec{ED}$:

$\vec{EA} + (\vec{EA} + \vec{AC}) = (\vec{EA} + \vec{AB}) + (\vec{EA} + \vec{AD})$. On peut supprimer $2\vec{EA}$ dans les deux membres et obtenir : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ qui définit bien C comme le 4^{ème} sommet du parallélogramme $BADC$ ou, ce qui revient au même, $ABCD$.

On ajoute à cette figure les points I et J définis par les égalités $\vec{AI} = 2\vec{AD}$ et $\vec{AJ} = 3\vec{AB} - \vec{AD}$.



Montrer que $\vec{CI} = \vec{BD}$ puis que $\vec{CJ} = -2\vec{BD}$.

$$\vec{CI} = \vec{AI} - \vec{AC} = 2\vec{AD} - (\vec{AB} + \vec{AD}) = -\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{BA} + \vec{AD} = \vec{BD}.$$

$$\vec{CJ} = \vec{BJ} - \vec{BC} = (2\vec{AB} - \vec{AD}) - \vec{AD} = 2\vec{AB} - 2\vec{AD} = 2(\vec{AB} + \vec{DA}) = 2\vec{DB} = -2\vec{BD}.$$

Donc on a $\vec{CJ} = -2\vec{BD} = -2\vec{CI}$.

Que peut-on en déduire pour les points C , I et J ?

Les vecteurs \vec{CJ} et \vec{CI} étant colinéaires, les droites (CJ) et (CI) sont parallèles, donc confondues (car elles ont un point commun : C).

3) Le point G est le centre de gravité d'un triangle ABC .

a) Quelle égalité vectorielle vérifie-t-il ?

Le centre de gravité G de ABC vérifie l'égalité $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

b) Montrer que pour tout point M du plan on a $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$?

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = (\vec{MG} + \vec{GA}) + (\vec{MG} + \vec{GB}) + (\vec{MG} + \vec{GC}) = 3\vec{MG} + (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}),$$

or $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$. On en déduit que $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG} + \vec{0} = 3\vec{MG}$.

c) On nomme A' , B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

Exprimer $\vec{AA'}$ sous la forme $x\vec{AB} + y\vec{AC}$, puis trouver une égalité semblable pour $\vec{BB'}$ et $\vec{CC'}$.

A' , B' et C' étant les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, on a $2\vec{AA'} = \vec{AB} + \vec{AC}$,

soit $\vec{AA'} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$. De même on a $\vec{BB'} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC})$ et $\vec{CC'} = \frac{1}{2}(\vec{CB} + \vec{CA})$.

Montrer alors que $\vec{GA'} + \vec{GB'} + \vec{GC'} = \vec{0}$. Que peut-on en déduire pour le triangle $A'B'C'$?

$$\vec{GA'} + \vec{GB'} + \vec{GC'} = (\vec{GA} + \vec{AA'}) + (\vec{GB} + \vec{BB'}) + (\vec{GC} + \vec{CC'}) = (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) + (\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'}).$$

Comme $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ on a $\vec{GA'} + \vec{GB'} + \vec{GC'} = \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'}$.

D'après la question précédente, on peut écrire :

$$\vec{GA'} + \vec{GB'} + \vec{GC'} = \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BA} + \vec{BC} + \vec{CB} + \vec{CA}) = \frac{1}{2}(\vec{0}) = \vec{0}.$$

Le point G est donc, aussi (il l'est de ABC), le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.

d) Soit M un point tel que $a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC} = \vec{0}$ où a , b et c sont trois réels non nuls tels que $a+b+c \neq 0$. Montrer que les coordonnées de M dans le repère (A, \vec{AB}, \vec{AC}) sont $(\frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{a+b+c})$.

Comme $a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC} = \vec{0}$, on a $a\vec{MA} + b(\vec{MA} + \vec{AB}) + c(\vec{MA} + \vec{AC}) = \vec{0}$,

soit $(a+b+c)\vec{MA} + b\vec{AB} + c\vec{AC} = \vec{0}$ ou $(a+b+c)\vec{AM} = b\vec{AB} + c\vec{AC}$,

et donc $\vec{AM} = \frac{1}{a+b+c}(b\vec{AB} + c\vec{AC})$ ou encore $\vec{AM} = \frac{b}{a+b+c}\vec{AB} + \frac{c}{a+b+c}\vec{AC}$.

Les coordonnées de M dans le repère (A, \vec{AB}, \vec{AC}) sont donc $(\frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{a+b+c})$, avec $a+b+c \neq 0$.

e) Montrer que si $(AM) \parallel (BC)$ alors on doit avoir $b+c=0$.

$$\vec{BC} = -\vec{AB} + \vec{AC} \text{ alors que } \vec{AM} = \frac{b}{a+b+c}\vec{AB} + \frac{c}{a+b+c}\vec{AC}.$$

Ces deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul, c'est-à-dire si et seulement si

$$\frac{b}{a+b+c} \times 1 - \frac{c}{a+b+c} \times (-1) = 0, \text{ soit si et seulement si } \frac{b+c}{a+b+c} = 0.$$

Comme $a+b+c \neq 0$, cela revient à $b+c=0$. Finalement $(AM) \parallel (BC)$ si et seulement si $b+c=0$.

4) On se place dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Les points A , B , C , D et E ont pour coordonnées $A(2;1)$, $B(0;2)$, $C(5; \frac{1}{2})$, $D(3; \frac{5}{2})$ et $E(8;0)$.

a) Calculer les coordonnées de \vec{AB} et \vec{AC} , puis le déterminant de ces vecteurs.

$$\vec{AB}(0-2; 2-1) \text{ donc } \vec{AB}(-2; 1).$$

$$\vec{AC}(5-2; -\frac{1}{2}-1) \text{ donc } \vec{AC}(3; -\frac{3}{2}).$$

$$\det(\vec{AB}; \vec{AC}) = (-2) \times (-\frac{3}{2}) - 3 \times 1 = 3 - 3 = 0.$$

Que peut-on en conclure ? On peut en conclure que A , B et C sont alignés.

b) Montrer que $(AB) \parallel (DE)$. $ABED$ est-il un parallélogramme ? (justifier la réponse)

$$\vec{AB}(-2; 1) \text{ et } \vec{DE}(8-3; 0-\frac{5}{2}) \text{ donc } \vec{DE}(5; -\frac{5}{2}).$$

$$\det(\vec{AB}; \vec{DE}) = (-2) \times (-\frac{5}{2}) - 5 \times 1 = 5 - 5 = 0.$$

Non $ABED$ n'est pas un parallélogramme car, d'après les coordonnées, $\vec{AB} \neq \vec{DE}$ (les vecteurs sont colinéaires, mais ils ne sont pas égaux).

c) Écrire une condition vectorielle pour que le point P appartienne à la parallèle à (AB) passant par C . Si on note $(x;y)$ les coordonnées du point P , traduire cette condition vectorielle sous la forme d'une relation de type $ax+by=c$ (cette relation est dite « équation cartésienne de la droite »).

Pour que $P(x;y)$ appartienne à cette droite, il faut que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CP} soient colinéaires. Or, \overrightarrow{CP} a pour coordonnées $(x-5 ; y+\frac{1}{2})$.

Le déterminant $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CP})$ vaut $(y+\frac{1}{2})\times(-2)-(x-5)\times 1=-x-2y+4$.

$P(x;y)$ appartient à la droite si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CP})=0$.

Une équation de cette droite est donc $-x-2y+4=0$.

On peut aussi écrire cette équation $x+2y=4$ (l'équation cartésienne demandée) ou encore $y=\frac{-1}{2}x+2$ (équation réduite).

Remarque : Comme A, B et C sont alignés, cette droite est la droite (AB) .

On aurait donc pu donner la condition : \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AP} colinéaires ou une relation équivalente.

d) Déterminer l'abscisse x du point P de cette droite d'ordonnée $y=2016$.

L'abscisse du point de la droite d'ordonnée 2016 vérifie $-x-2\times 2016+4=0$.

On a donc $x=-4032+4=-4028$.

Le point P a pour coordonnées $(-4028 ; 2016)$.