2de **TD n°3 sur les vecteurs**

exercices d'entraînement (à corriger avant l'évaluation, mardi 18 octobre)

<u>Rappel de cours</u> : Les vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$. Quand on ne cherche pas explicitement le nombre k, on peut calculer la quantité $xy'-yx'$ qui porte le nom de déterminant du couple de vecteur $(\vec{u},\vec{v})$ et qui se note $det(\vec{u},\vec{v})$. Cette quantité est nulle lorsque $\vec{u}=k\vec{v}$ ce qui permet d'affirmer que $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont colinéaires si $det(\vec{u},\vec{v})=0$.

4) <u>Colinéarité/Alignement/Déterminant</u>

A, B et C sont trois points non-alignés du plan.

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}=-6\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$.

Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

On a deux méthodes : trouver k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$ ou bien utiliser le fait que le déterminant des vecteurs est nul.

Ici, on a $\vec{v}=-6\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=-3(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=-3\vec{u}$ (ce n'est pas difficile de trouver ce qui se met en facteur)

<u>Autre méthode</u> : les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base ($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) sont $\vec{u}(2\,;-1)$ et $\vec{v}(-6\,;3)$ et $det(\vec{u}\,;\vec{v})=2\times3-(-6)\times(-1)=6-6=0$ donc les vecteurs sont colinéaires (cette méthode ne permet pas de trouver le coefficient k, mais il n'était pas demandé).

NB : Si l'on n'a pas vu en cours, ou si on a oublié ce qu'est le déterminant, on peut dire que pour avoir $\vec{u}=k\vec{v}$, il faut que les coordonnées de ces deux vecteurs vérifient les égalités :

- $2=k\times(-6)$ (c'est la composante selon $\overrightarrow{AB}$)
- $-1=k\times3$ (c'est la composante selon $\overrightarrow{AC}$).

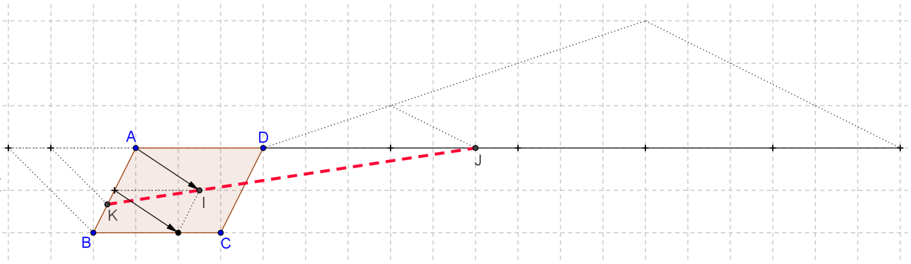
La 1ère égalité donne $k=\frac{2}{-6}=\frac{-1}{3}$ et la 2de donne $k=\frac{-1}{3}$ directement.

Comme il s'agit du même nombre k, on peut en déduire que les vecteurs sont colinéaires.

b) D est le 4ème sommet du parallélogramme $ABCD$.

I, J et K sont définis par $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $3\overrightarrow{DJ}=2\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$.

Montrer que I, J et K sont alignés.



Cet exercice est déjà présent sur la feuille n°2. Ce doublon est une erreur involontaire.

Montrons que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires en calculant les coordonnées des points *I, J* et *K* dans le repère (A, $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$) :

- $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, donc $I(\frac{1}{2}\,;\frac{2}{3})$.
- $3\overrightarrow{DJ}=3(\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AD})=2\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{CB}$, d'où $3\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{CB}+3\overrightarrow{AD}=8\overrightarrow{AD}$ et donc $J(0\,;\frac{8}{3})$.
- $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=3\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, d'où $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et donc $K(\frac{2}{3}\,;0)$.

On trouve alors que $\overrightarrow{IJ}(-\frac{1}{2}\,;2)$ et $\overrightarrow{JK}(\frac{2}{3}\,;-\frac{8}{3})$

et $det(\overrightarrow{IJ}\,;\overrightarrow{JK})=(\frac{-1}{2})\times(\frac{-8}{3})-(2)\times(\frac{2}{3})=\frac{8}{6}-\frac{4}{3}=0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont bien colinéaires et, par conséquent, les points *I, J* et *K* sont bien alignés.

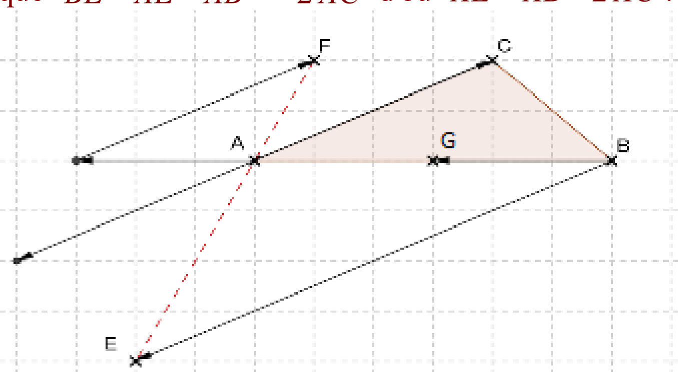
c) E et F sont définis par $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Placer E et F sur la figure. Montrer que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

La relation de Chasles soustractive nous permet d'écrire que $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

En déduire que l'on a $\overrightarrow{AE}=-2\overrightarrow{AF}$.

Que peut-on en déduire pour les points A, E et F ?



On a $-2\overrightarrow{AF}=-2(\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{2}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$, et donc $-2\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}$. Les points A, E et F sont alignés (droite en pointillés rouges).

Soit G le milieu de [AB]. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Montrer que (CG)//(AF).

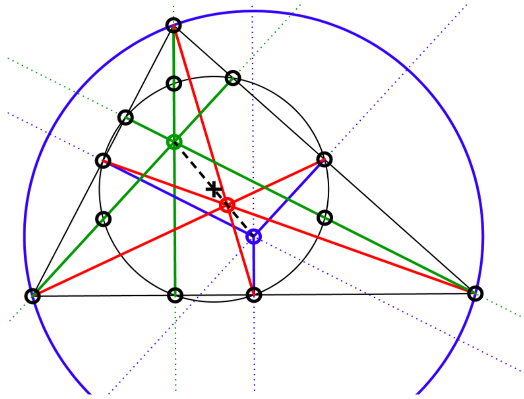
Puisque G est le milieu de [AB], on a $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CG}$,

et donc $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}))=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.
Comme $\overrightarrow{AF}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, on remarque que $\overrightarrow{AF}=-(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=-\overrightarrow{CG}$.
Les vecteurs étant colinéaires (ils sont opposés), les droites qui les supportent sont parallèles.
On a, de plus, $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{GC}$ et donc *AFCG* est un parallélogramme (ce qui se voit sur la figure).

5) Une belle propriété du triangle : la droite d'Euler

ABC est un triangle. *A'*, *B'* et *C'* sont les milieux respectifs des côtés [*BC*], [*CA*] et [*AB*] ; *G* est le centre de gravité (il vérifie l'égalité $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$) ; *O* est le centre du cercle circonscrit ; *H* est l'orthocentre. L'objet de cet exercice est de montrer que *O, G* et *H* sont alignés.

a) Sur la figure ci-contre, tracer en rouge les médianes, en bleu les médiatrice, en vert les hauteurs. Tracer le cercle circonscrit. Identifier *O, G* et *H*.



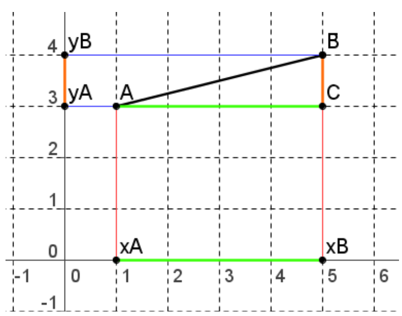
Voici. Il semble que sur la figure de la feuille, les trois points alignés, au centre, ne sont pas *O*, *G* et *H*. Il manque *G* le centre de gravité (à l'intersection des médianes). Le point supplémentaire (la croix noire sur cette figure) est le centre du cercle des neuf points (tracé aussi en noir ici, voir le sujet du DM n°2). Le cercle circonscrit (en bleu) a pour centre *O*, l'intersection des médiatrices.

b) Soit *K* le point défini par la relation $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\,(1)$.
Établir les relations $\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{CK}=2\overrightarrow{OC'}$.
En déduire que *K* appartient aux hauteurs du triangle *ABC*. Comment appelle t-on *K* ?
$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ d'après (1) et Chasles, d'où $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.
En introduisant le milieu *A'* de [*BC*], on obtient $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'C}=2\overrightarrow{OA'}$.
De même, en intervertissant les sommets *A, B* et *C*, on obtient $\overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{CK}=2\overrightarrow{OC'}$.
La relation $\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{OA'}$ montre que (*AK*) et (*OA'*) sont parallèles (car les vecteurs correspondants sont colinéaires). La droite (*AK*) est donc perpendiculaire au côté [*BC*] du triangle (comme la médiatrice (*OA'*) de ce côté). Comme, en outre, elle passe par définition par *A*, il s'agit de la hauteur du triangle issue de *A*. De même, les deux autres droites (*BK*) et (*CK*) sont des hauteurs du triangle.
Le point *K* est donc le point de concours des hauteurs du triangle. On l'appelle l'orthocentre du triangle et on a noté ce point H précédemment. Ces deux points sont confondus : *H=K*.

c) Déduire de (1) l'égalité $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$. Que peut-on en conclure pour les points *O, G* et *H* ?
Avec *H=K*, la relation (1) s'écrit :
$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC})=3\overrightarrow{OG}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})=3\overrightarrow{OG}$ car, par définition du centre de gravité *G*, celui-ci vérifie l'égalité $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
La droite (*OH*) est donc parallèle à la droite (*OG*). D'après l'axiome d'Euclide, (*OH*) et (*OG*) sont donc une seule et même droite. C'est cette droite qui s'appelle droite de Euler du triangle. Autrement dit, les points *O, G* et *H* sont alignés sur la droite de Euler. On peut préciser la position des points : *G* est situé sur [*OH*] au 1/3 de ce segment en partant de *O*. Nous avons tracé le segment [*OH*] sur la figure, où on constate que *G* est bien situé comme on vient de le dire.

6) Calculs de distances

Rappel de cours : Pour calculer des distances avec les coordonnées, nous *devons* utiliser un repère *orthonormé* (les directions des vecteurs de la base sont *perpendiculaires* et ces vecteurs ont *la même longueur*). Dans ces conditions, la distance *AB* est égale à $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.



a) Soient trois points *A*(3 ; 3), *B*(4 ; 6) et *C*(6 ; 2).
Quelle est la nature du triangle *ABC* ?
On calcule les longueurs des côtés du triangle *ABC* :
$AB=\sqrt{(4-3)^2+(6-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$,
$AC=\sqrt{(6-3)^2+(2-3)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$ et
$BC=\sqrt{(6-4)^2+(2-6)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$. Le triangle *ABC* est isocèle en *A* puisque *AB=AC*.

Mais $AB^2+AC^2=10+10=20=BC^2$. Le triangle ABC est rectangle en A puisque ses côtés vérifient l'égalité de Pythagore. Finalement, le triangle ABC est un triangle isocèle-rectangle en A, un demi-carré.

b) Soient trois points $D(-1\ ;-1)$, $E(-5\ ;0)$ et $F(-4\ ;4)$.
Quelle est la nature du triangle DEF ?
On calcule les longueurs des côtés du triangle DEF :
$DE=\sqrt{(-5+1)^2+(0+1)^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$,
$DF=\sqrt{(-4+1)^2+(4+1)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$ et
$EF=\sqrt{(-4+5)^2+(4-0)^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$.
De plus, on a $DE^2+EF^2=17+17=34=DF^2$.
Le triangle DEF est un triangle isocèle-rectangle en E.

c) Soient trois points $G(-1\ ;-1)$, $H(-2\ ;1)$ et $I(x\ ;y)$. On voudrait déterminer les valeurs de x et y pour que le triangle GHI soit équilatéral. Poser le système d'équations que doit vérifier les solutions.
Montrer que ce système implique que $2x-4y+3=0$ (équation de la médiatrice de $[GH]$).
En déduire alors que l'abscisse de I doit vérifier $x^2+3x-\frac{3}{4}=0$.
Montrer que cette équation s'écrit aussi $(x+\frac{3}{2})^2-3=0$ et conclure (il y a deux solutions).
On calcule les carrés des longueurs des côtés du triangle GHI.
$GH^2=(-2+1)^2+(1+1)^2=1+4=5$, $GI^2=(x+1)^2+(y+1)^2$ et $IH^2=(x+2)^2+(y-1)^2$.
Ces longueurs doivent être égales pour que le triangle GHI soit équilatéral. Leur carré également.
On doit donc avoir, d'une part $(x+1)^2+(y+1)^2=5$ et, d'autre part $(x+1)^2+(y+1)^2=(x+2)^2+(y-1)^2$.
Developpons cette dernière égalité : $x^2+2x+1+y^2+2y+1=x^2+4x+4+y^2-2y+1$.
Simplifions, il vient : $2x+2y+2=4x-2y+5$.
Regoupons tout dans le membre de gauche : $-2x+4y-3=0$.
On obtient bien, en changeant de signe : $2x-4y+3=0$ qui est l'équation cartésienne d'une droite.
Cette équation peut aussi s'écrire $4y=2x+3$ ou encore $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$ qui est l'équation réduite.
Cette droite traduit le fait que $GI=IH$, autrement dit que I est sur la médiatrice de $[GH]$.
L'autre égalité, qui traduit $GH=GI$, autrement dit que G est sur la médiatrice de $[IH]$, s'écrit alors
$(x+1)^2+(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}+1)^2=5$, soit $(x+1)^2+(\frac{1}{2}x+\frac{7}{4})^2=5$.
Développons : $x^2+2x+1+\frac{x^2}{4}+(\frac{7}{4})^2+\frac{7x}{4}=5$.
Regroupons : $\frac{5}{4}x^2+\frac{15x}{4}+1+(\frac{7}{4})^2-5=0$, soit $\frac{5}{4}x^2+\frac{15x}{4}+\frac{16+49-80}{16}=0$ ou encore $\frac{5}{4}x^2+\frac{15x}{4}+\frac{-15}{16}=0$.
Multiplions par 16 : $20x^2+60x-15=0$; divisons par 5 : $4x^2+12x-3=0$.
Cette égalité est bien égale, en divisant encore par 4, à $x^2+3x-\frac{3}{4}=0$
ce qui se met sous la forme $(x+\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2-\frac{3}{4}=0$,
soit $(x+\frac{3}{2})^2-(\frac{9}{4}+\frac{3}{4})=0$
ou encore $(x+\frac{3}{2})^2-3=0$.
On en déduit que x doit vérifier
$(x+\frac{3}{2}-\sqrt{3})(x+\frac{3}{2}+\sqrt{3})=0$
et donc que soit $x+\frac{3}{2}-\sqrt{3}=0$, soit $x+\frac{3}{2}+\sqrt{3}=0$.
Finalement,
$x=\frac{-3}{2}+\sqrt{3}\approx 0{,}232$ ou $x=\frac{-3}{2}-\sqrt{3}\approx -3{,}232$.
On en déduit alors la valeur de y :
$y=\frac{1}{2}(\frac{-3}{2}+\sqrt{3})+\frac{3}{4}$ ou $y=\frac{1}{2}(\frac{-3}{2}-\sqrt{3})+\frac{3}{4}$,
ce qui se simplifie en
$y=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}866$ ou $y=\frac{-\sqrt{3}}{2}\approx -0{,}866$.
Les deux points I qui conviennent ont pour coordonnées $I_1(\frac{-3}{2}+\sqrt{3}\ ;\frac{\sqrt{3}}{2})$ et $I_2(\frac{-3}{2}-\sqrt{3}\ ;-\frac{\sqrt{3}}{2})$.
La figure nous montre ces deux points.