DS n°2 : Droites & Vecteurs — CORRECTION

Barème : 1,5–2–3–4–4,5–5

1) Simplifier les écritures vectorielles suivantes :

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DB}-(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DA}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}$

$\vec{v}=\overrightarrow{BA}-(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DA})+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

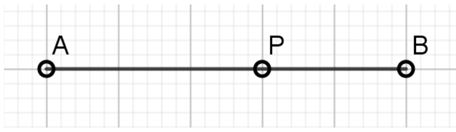
$\vec{w}=3\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})-2\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$
$=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}$

2) *P* est le point défini par l'égalité $4\overrightarrow{PA}=6\overrightarrow{BP}$.
Exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, puis faire une figure où vous placerez les points *A, B* et *P*.

$4\overrightarrow{PA}=6\overrightarrow{BP}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{PA}=6(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})\Leftrightarrow 4\overrightarrow{PA}=6\overrightarrow{AP}-6\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AB}=6\overrightarrow{AP}+4\overrightarrow{AP}\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AB}=10\overrightarrow{AP}$.

D'après cette égalité, on tire $\overrightarrow{AP}=\frac{6}{10}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

Prenons un segment de 5 carreaux et plaçons *A, B* et *P*.



3) *A, B* et *C* sont trois points distincts et non-alignés. Pour chaque réel *k*, on détermine les points *M* et *N* tels que : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+(1-k)\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}=(1-k)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

a) Montrer que, quel que soit *k,* les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=(1-k)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+(1-k)\overrightarrow{AC})=(1-k)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-(1-k)\overrightarrow{AC}$.

D'où $\overrightarrow{MN}=(1-k-\frac{1}{2})\overrightarrow{AB}+(\frac{1}{2}-1+k)\overrightarrow{AC}=(\frac{1}{2}-k)\overrightarrow{AB}+(\frac{-1}{2}+k)\overrightarrow{AC}$.

C'est là qu'il faut faire un gros effort algébrique et remarquer que $\frac{1}{2}-k=-(\frac{-1}{2}+k)$.

Finalement, on a $\overrightarrow{MN}=(\frac{1}{2}-k)\overrightarrow{AB}-(\frac{1}{2}-k)\overrightarrow{AC}=(\frac{1}{2}-k)(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=(\frac{1}{2}-k)\overrightarrow{CB}=(k-\frac{1}{2})\overrightarrow{BC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc colinéaires puisqu'on peut écrire $\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{BC}$ avec $\lambda=k-\frac{1}{2}$.

Une autre méthode : Dans le repère (*A*, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) les coordonnées de *B*, *C*, *M* et *N* sont *B*(1 ; 0), *C*(0 ; 1), *M*($\frac{1}{2}$; $1-k$) et *N*($1-k$; $\frac{1}{2}$).

On en déduit les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ (-1 ; 1) et $\overrightarrow{MN}$ ($1-k-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-k$; $\frac{1}{2}-(1-k)=\frac{-1}{2}+k$).

Le déterminant de ces vecteurs est $1\times(\frac{1}{2}-k)-(-1)\times(\frac{-1}{2}+k)=\frac{1}{2}-k+(\frac{-1}{2}+k)=0$ donc ils sont colinéaires.

b) Déterminer la (ou les) valeur(s) de *k* pour laquelle(lesquelles) :

- *M*=*N*
- *BCMN* est un parallélogramme
- *BCNM* est un parallélogramme

M=*N* quand $\overrightarrow{MN}=\vec{0}$, c'est-à-dire quand $(k-\frac{1}{2})\overrightarrow{BC}=\vec{0}$, et comme *B*≠*C*, quand $k-\frac{1}{2}=0$, soit $k=\frac{1}{2}$.

BCMN est un parallélogramme quand $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CB}$, autrement dit quand $\frac{1}{2}-k=1$, soit $k=\frac{1}{2}-1=\frac{-1}{2}$.

BCNM est un parallélogramme quand $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}$, autrement dit quand $k-\frac{1}{2}=1$, soit $k=\frac{3}{2}$.

Avec les coordonnées : *M*=*N* quand $\overrightarrow{MN}=\vec{0}$, soit $\frac{1}{2}-k=0$ et $\frac{-1}{2}+k=0$, ce qui conduit à $k=\frac{1}{2}$.

BCMN est un parallélogramme quand $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}$, soit $\frac{1}{2}-k=1$ et $\frac{-1}{2}+k=-1$, donc $k=\frac{-1}{2}$.

BCNM est un parallélogramme quand $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}$, soit $\frac{1}{2}-k=-1$ et $\frac{-1}{2}+k=1$, donc $k=\frac{3}{2}$.

4) Dans un repère, les points *A, B, C, D* ont pour coordonnées *A*(−1 ; 2), *B*(3 ; 0), *C*(0 ; 5), *D*(6 ; 2).

a) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

On a $\overrightarrow{AB}(3-(-1)=4\ ;\ 0-2=-2)$ et $\overrightarrow{CD}(6-0=6\ ;\ 2-5=-3)$ donc $\overrightarrow{AB}(4\ ;\ -2)$ et $\overrightarrow{CD}(6\ ;\ -3)$.

b) Montrer que (*AB*)//(*CD*).

Montrons que *det*($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$)=0

On a *det*($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$)= $4\times(-3)-6\times(-2)=-12+12=0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont par conséquent colinéaires et les droites (*AB*) et (*CD*) sont donc parallèles.

b) Déterminer l'équation réduite de la droite (*CD*) ?

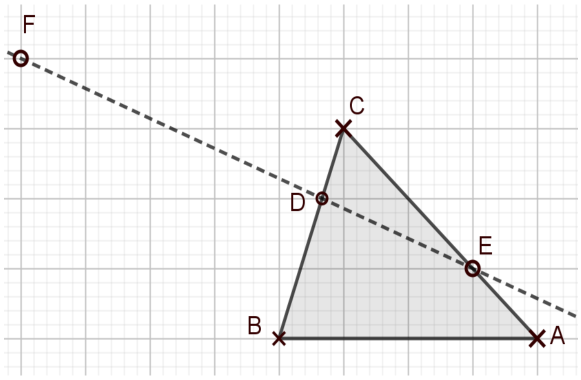
L'équation réduite de (*CD*) est de la forme $y=ax+b$,

- comme *C* est sur cette droite, on a *b*=5.
- comme *D* est sur cette droite $2=a\times 6+5$, soit $a=\frac{-3}{6}=\frac{-1}{2}$.

L'équation réduite de (*CD*) est donc $y=\frac{-1}{2}x+5$.

c) Déterminer une équation cartésienne de la droite (*AB*) de la forme $x+\beta y+\gamma=0$.
Comme on a montré que (*AB*)//(*CD*), les deux équations ont le même coefficient directeur $a=\frac{-1}{2}$. L'équation réduite de (*AB*) est de la forme $y=\frac{-1}{2}x+b'$, avec b' vérifiant l'égalité pour le point *B* : $0=\frac{-1}{2}\times 3+b'$. On a donc $b'=\frac{3}{2}$ et $y=\frac{-1}{2}x+\frac{3}{2}$. Cela s'écrit aussi $\frac{1}{2}x+y-\frac{3}{2}=0$ ou $x+2y-3=0$ qui est l'équation cartésienne cherchée.

5) *ABC* est le triangle quelconque ci-contre.
a) Compléter la figure en plaçant les points *D, E* et *F* tels que (justifier la construction à l'aide d'un calcul vectoriel) :



- *D* est tel que $3\overrightarrow{BD}=2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

On a $3\overrightarrow{BD}=2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=2\overrightarrow{BC}$, soit $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

- *E* est tel que $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CE}$

On a $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AE}+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE})+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE})=3\overrightarrow{AE}+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA})$,
donc $3\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}$, soit $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

- *F* est tel que $3\overrightarrow{FB}=-4\overrightarrow{AC}$

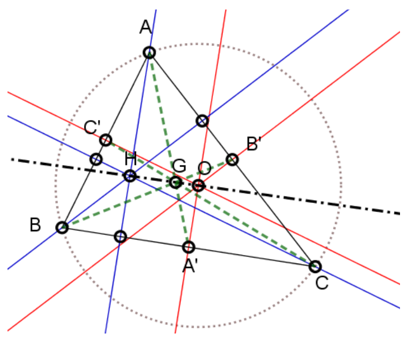
On a $\overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.
Plaçons maintenant les points sur la figure (voir ci-contre).

b) Montrer que *D*, *E*, *F* sont alignés.
Cela se voit sur la figure mais la preuve doit être donnée.
On peut faire du calcul vectoriel (c'est compliqué) :
Comme $\overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, on a $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.
Comme $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, soit $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$ on a
$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}-(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
On remarque alors que $\overrightarrow{ED}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{-1}{2}(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC})=\frac{-1}{2}\overrightarrow{FD}$, la colinéarité de $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{FD}$ est équivalente au parallélisme de (*ED*) et (*FD*), ce qui entraîne l'alignement de *D*, *E* et *F*.

Autre méthode :
On peut faire avec les coordonnées dans un repère d'origine *B*, par exemple le repère (*B*, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$).
Comme $3\overrightarrow{BD}=2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$, on a $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{-2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et donc $D(\frac{-2}{3}\ ;\ \frac{2}{3})$.
Comme $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, on a $\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et donc $\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et donc $E(-1\ ;\ \frac{1}{3})$.
Comme $\overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$, on a $F(0\ ;\ \frac{4}{3})$.
Calculons maintenant les coordonnées de $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$:
$\overrightarrow{DE}(-1+\frac{2}{3}=\frac{-1}{3};\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{-1}{3})$ et $\overrightarrow{EF}(0+1=1;\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1)$.
On s'aperçoit alors que $3\overrightarrow{DE}(1;1)$ et $\overrightarrow{EF}(1;1)$ sont égaux, on conclut à la colinéarité de $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{EF}$, équivalente au parallélisme de (*DE*) et (*EF*), ce qui entraîne l'alignement de *D*, *E* et *F*.

6) *ABC* est un triangle. *A'*, *B'* et *C'* sont les milieux respectifs des côtés [*BC*], [*CA*] et [*AB*] ; *G* est le centre de gravité ; *O* est le centre du cercle circonscrit (intersection des médiatrices) ; *H* est l'orthocentre (intersection des hauteurs).

a) La figure ci-contre représente un triangle *ABC* et son cercle circonscrit. Identifier *A, B, C, A', B', C', O, G* et *H*, puis tracer en traits pleins les médiatrice et les hauteurs et en pointillés les médianes.
Les Points *A, B* et *C* pouvant être intervertis, il faut intervertir *A', B'* et *C'* en conséquence. Les centres *H*, *G* et *O* par contre sont inamovibles.



b) Soit *K* le point défini par la relation $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ (♦).
Établir les relations $\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{CK}=2\overrightarrow{OC'}$.
D'après la relation (♦), on a $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, on a donc $\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.
Mais $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA'}$ car *A'* est le milieu de [*BC*] et $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}=\vec{0}$. On a donc $\overrightarrow{AK}=\vec{0}+2\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA'}$.

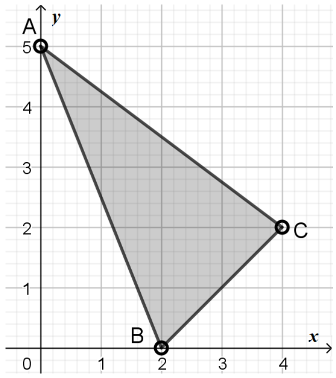
Même chose pour les deux autres égalités, en permutant les points A, B, C et A', B', C' en conséquence .

Expliquer pourquoi le point K appartient aux hauteurs du triangle ABC. Comment appelle t-on K ?
K est l'orthocentre du triangle ABC car d'après les relations précédentes :
$\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{OA'}$ montre que $(AK)//(OA')$. Or, (OA') est la médiatrice de $[BC]$, donc une droite perpendiculaire à (BC). (AK) est donc perpendiculaire à (BC) et passe par A, c'est donc la hauteur issue de A. Même chose pour les autres hauteurs.

c) Rappeler la définition vectorielle du point G. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
Déduire de (♦) l'égalité $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.
D'après la question 2, le point H vérifie donc (♦) : $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$
On en déduit que $\overrightarrow{OH}=(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC})=3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{OG}$.

Que peut-on en conclure pour les points O, G et H ? On peut en conclure que les points O, G et H sont alignés sur une droite (cette droite s'appelle la droite d'Euler du triangle).

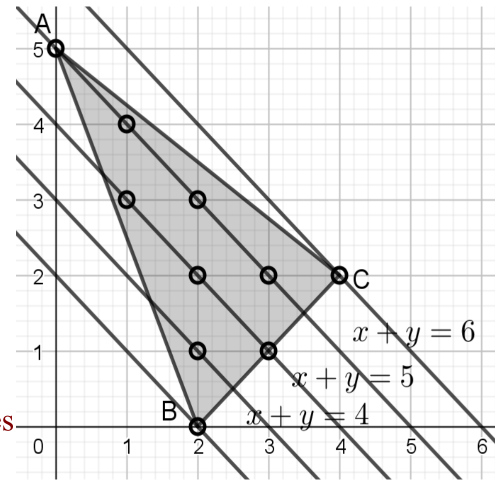
Bonus (2 *pts*) :
Le triangle ABC de la figure ci-contre et la surface grise à l'intérieur forment un domaine D. Un point $M(x\,;y)$ est dans D si ses coordonnées vérifient un ensemble de contraintes (inéquations en x et y).



a) Déterminer les contraintes vérifiées par tout point $M(x\,;y)$ appartenant à D.
Il faut déterminer les équations des trois droites :
(AB) : $y=\frac{-5}{2}x+5$ le coefficient directeur est la diminution des y quand x augmente de 1 et l'ordonnée à l'origine est l'ordonnée de A.
(AC) : $y=\frac{-3}{4}x+5$ le coefficient directeur est la diminution des y quand x augmente de 1 et l'ordonnée à l'origine est l'ordonnée de A.
(BC) : $y=x-2$ le coefficient directeur est l'augmentation des y quand x augmente de 1 et l'ordonnée à l'origine est trouvée en prolongeant (BC) jusqu'à l'axe des ordonnées.
Le système des inéquations pour qu'un point soit à l'intérieur du triangle :

$$\begin{cases} y\geq\dfrac{-5}{2}x+5 & (AB) \\ y\leq\dfrac{-3}{4}x+5 & (AC) \\ y\geq x-2 & (BC) \end{cases}$$

Pour déterminer le sens des inégalités, ce n'est pas difficile. Avec les équations réduites, il suffit d'observer si on est en-dessus (≥) ou en-dessous (≤) de la droite.



b) Combien de points de D ont-ils des coordonnées entières ?
Il y en a dix (les compter sur la figure).
Parmi ceux-ci, donner celui qui maximise la somme $S(x,y)=x+y$.
Les droites d'équation $x+y=C^{ste}$ sont parallèles.
Nous en avons tracé plusieurs qui traversent le domaine D.
La plus grande valeur de cette somme compatible avec les contraintes du domaine D est 6. Un seul point possède cette valeur : le point C.