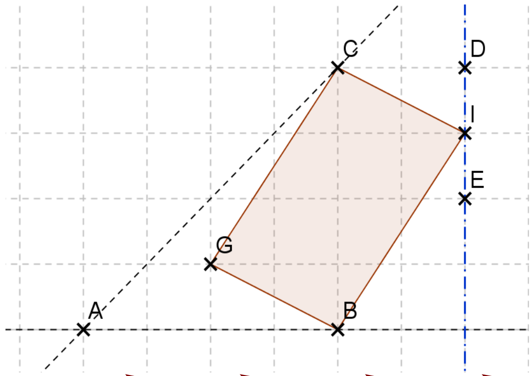
2de **TD n°2 sur les vecteurs**

1) Coordonnées



a) A, B et C étant trois points non-alignés, quelles sont les coordonnées de A, B et C dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$?

$A(0\ ;0)$, $B(1\ ;0)$ et $C(0\ ;1)$

Soient D, E, I et G les points définis par :

$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, I milieu de $[DE]$ et $G(\frac{1}{4}\ ;\frac{1}{4})$

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AC}$,

I étant le milieu de $[DE]$ on a :

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AC}+1\times\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AC})$ donc $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}\times\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\times\overrightarrow{AC})=\frac{3}{4}\times\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\times\overrightarrow{AC}$.

Déterminer les coordonnées de D, E et I puis placer D, E, I et G sur la figure.

D'après les égalités précédentes (et celle de l'énoncé pour E), on a :

$D(\frac{1}{2}\ ;1)$, $E(1\ ;\frac{1}{2})$ et $I(\frac{3}{4}\ ;\frac{3}{4})$

NB : Les points sont reportés dans la figure avec les coordonnées ou avec les égalités vectorielles (cela revient au même).

Montrer que le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(-1\ ;1)$ et que celles de $\overrightarrow{ED}$ sont $(\frac{-1}{2}\ ;\frac{1}{2})$.

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-1\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AC}$.

Dans la base $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$, les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$ sont donc bien $(-1\ ;1)$.

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}$ d'après la relation de Chasles « soustractive »

(*on peut écrire* $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}$ *qui est plus simple parfois à utiliser*),

donc $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-(\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AC}$ (*on a remplacé* $\overrightarrow{AE}$ *et* $\overrightarrow{AD}$ *par ce que l'on avait obtenu et on a utilisé les propriétés du calcul vectoriel*).

Finalement, $\overrightarrow{ED}=-\overrightarrow{DE}=\frac{-1}{2}\times\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AC}$.

Dans la base $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$, les coordonnées de $\overrightarrow{ED}$ sont donc bien $(\frac{-1}{2}\ ;\frac{1}{2})$.

En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire ?

On peut écrire : $\overrightarrow{ED}=\frac{-1}{2}\times\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc colinéaires. Les droites (EB) et (BC) sont par conséquent parallèles.

Montrer que les points A, G et I sont alignés.

D'après les coordonnées de G et de I, $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\times\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\times\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\times\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\times\overrightarrow{AC}=3\times(\frac{1}{4}\times\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\times\overrightarrow{AC})=3\times\overrightarrow{AG}$. $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont donc colinéaires.

Les droites (AI) et (AG) étant parallèles, les points A, I et G sont alignés.

[*Remarque : d'après le 5ème postulat d'Euclide, il n'y a qu'une seule droite passant par A parallèle à la droite (AI)*]

Montrer que $GBIC$ est un parallélogramme.

Il faut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont égaux.

Avec les coordonnées de points c'est facile car $\overrightarrow{GB}$ a pour coordonnées $(x_B-x_G\ ;y_B-y_G)$,

or $B(1;0)$ et $G(\frac{1}{4}\ ;\frac{1}{4})$, donc $\overrightarrow{GB}$ a pour coordonnées $(1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\ ;0-\frac{1}{4}=\frac{-1}{4})$.

De même, $\overrightarrow{CI}$ a pour coordonnées $(x_I-x_C\ ;y_I-y_C)$, or $I(\frac{3}{4}\ ;\frac{3}{4})$ et $C(0;1)$,

donc $\overrightarrow{CI}$ a pour coordonnées $(\frac{3}{4}-0=\frac{3}{4}\ ;\frac{3}{4}-1=\frac{-1}{4})$. Les deux vecteurs $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{CI}$ ayant des coordonnées égales sont égaux, le quadrilatère $GBIC$ est un parallélogramme.

Remarque : sans les coordonnées de points et la relation existant entre celles-ci et les coordonnées de vecteurs, on aurait pu faire du calcul vectoriel :

$\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}-(\frac{1}{4}\times\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\times\overrightarrow{AC})=\frac{3}{4}\times\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\times\overrightarrow{AC}$ (on retrouve les coordonnées de $\overrightarrow{GB}$),

$\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\times\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\times\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\times\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\times\overrightarrow{AC}$ (on retrouve les coordonnées de $\overrightarrow{CI}$).

La conclusion est inchangée.

b) Soient A, B et C trois points non-alignés du plan.

Déterminer, si possible, les réels x et y tels que $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ dans les cas suivants.

En déduire, à chaque fois, les coordonnées du point M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Nous allons utiliser massivement la relation de Chasles « soustractive » qui a le mérite de donner directement les deux vecteurs de la décomposition à partir du même point choisi.

$2\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$

On a $2\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}=2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM})-(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM})=\overrightarrow{AB}$ et donc $2\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}$ et, en regroupant $\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

Cette relation permet de placer M par rapport à A, B et C ou (ce qui revient au même) à donner les coordonnées du point M dans le repère $(A,\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$: $M(-2\ ;2)$.

$\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CB}$

On a $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM})-4\overrightarrow{AB}=2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$; $-\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AM}=-5\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

Ce qui permet de placer M par rapport à A, B et C ou (ce qui revient au même) à donner les coordonnées du point M dans le repère $(A,\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$: $M(-5\ ;\ 2)$.

$2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BC}$

On a $2\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$; $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AM}=-3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

Ce qui permet de placer M par rapport à A, B et C ou (ce qui revient au même) à donner les coordonnées du point M dans le repère $(A,\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$: $M(-3\ ;2)$.

$\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}$

On a $(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$; $\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Cette dernière égalité est fausse en général (pour que ce soit vrai, il faudrait que A, B et C soient confondus) donc on ne peut pas trouver de point M qui la satisfasse. Il n'y a pas de solution, donc pas de coordonnées.

[*Remarque : pour faire un parallèle avec les nombres :*
c'est comme l'équation $4(3+x)-2(1+2x)=5$ *qui conduit à* $10=5$. *Ceci est toujours faux.*
Il n'y a donc pas de solution à cette équation.]

$3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MC}$

On a $-3\overrightarrow{AM}+2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM})=4(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM})$; $-5\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$.

Ce qui permet de placer M par rapport à A, B et C ou (ce qui revient au même) à donner les coordonnées du point M dans le repère $(A,\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$: $M(2\ ;\ -4)$.

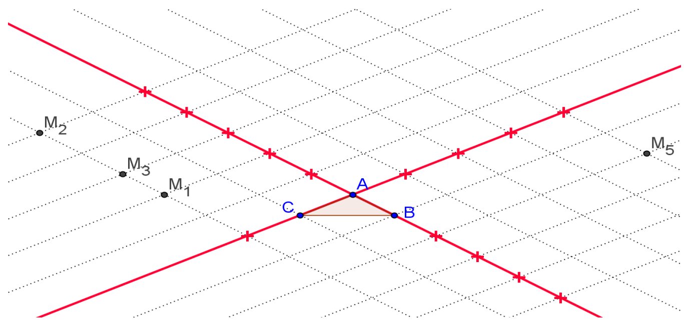
$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}$

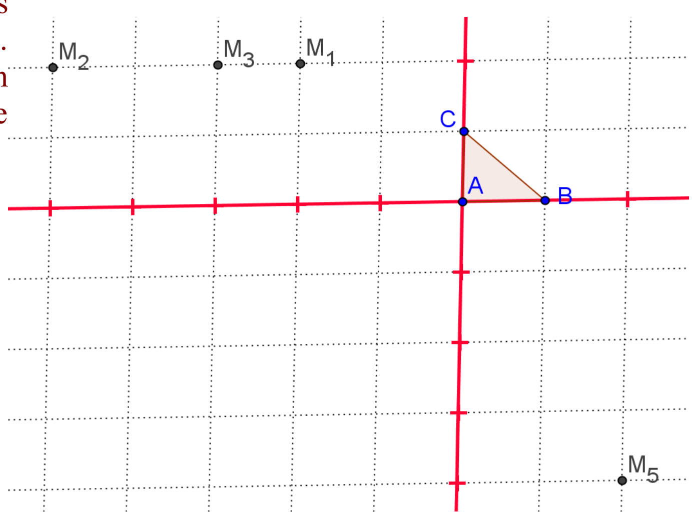
On a $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$ ce qui s'écrit $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$ ou $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$.

Cette égalité étant toujours vraie, le point M peut être placé n'importe où.

[*Pour faire un parallèle avec les nombres :*
c'est comme l'équation $4(2+x)-2(1+2x)=6$ *qui conduit à* $6=6$. *Ceci est toujours vrai.*
Il y a donc une infinité de solution à cette équation. N'importe quelle valeur réelle convient pour x.]

Pour illustrer cet exercice (mais ce n'était pas demandé dans la consigne), on peut noter les quatre points M constructibles M_1, M_2, M_3 et M_5 (le point M_4 n'est pas constructible et le point M_6 peut être choisi n'importe où). Nous avons choisi deux triangles ABC pour montrer qu'on s'éloigne parfois du repère orthogonal habituel (à droite horizontal/vertical).





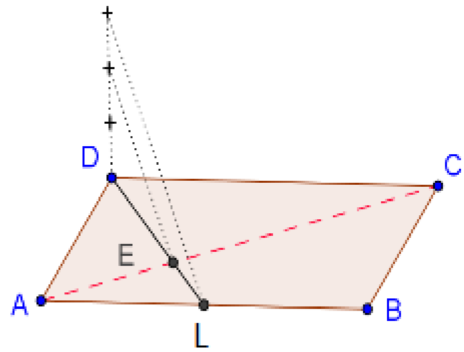
2) <u>Colinéarité / Alignement & Parallélisme / Déterminant</u>

a) $ABCD$ est un parallélogramme. L est le milieu de $[AB]$. I, J, K et E sont définis par :

$$\overrightarrow{AI}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\tfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}\ ;\ 3\overrightarrow{DJ}=2\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}\ ;\ \overrightarrow{DE}=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{DL}$$

Les points A, E et C sont-ils alignés ? [Déterminer les coordonnées des points dans le repère $(A,\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD})$]

On a, bien sûr, $A(0\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 0)$ et $D(0\ ;\ 1)$ car on est dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, on a $C(1\ ;\ 1)$ (c'est la règle du parallélogramme).



L étant le milieu de [AB], on a $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et donc $L(\frac{1}{2}\ ;\ 0)$.
Comme E vérifie $\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DL}$, on a aussi $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AD})$ et donc $\overrightarrow{AE}=(1-\frac{2}{3})\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
On en déduit que les coordonnées de E sont $E(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3})$.
Les points A, E et C sont-ils alignés ? Cela semble le cas sur la figure (vous remarquerez l'astuce utilisant le théorème de Thalès pour placer E).
Vérifions-le en calculant le déterminant de $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AE}(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3})$, $\overrightarrow{AC}(1\ ;\ 1)$
on a donc $det(\overrightarrow{AE}\ ;\ \overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$. Les points sont bien alignés.
Si vous n'avez pas envie de calculer le déterminant, on peut aussi chercher à exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc bien colinéaires.
La conclusion en découle.

Montrer que I, J et K sont alignés.
On peut essayer de trouver k tel que $\overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{IK}$. Décomposons ces deux vecteurs dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

- Comme $3\overrightarrow{DJ}=3(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ})=2\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{CB}$ (d'après l'égalité qui définit le point J),

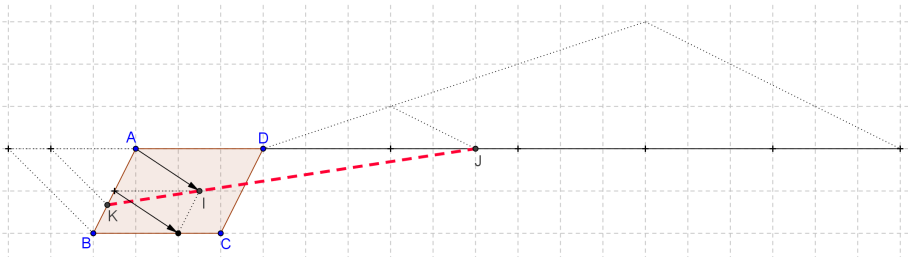
soit $3\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{AI}+3\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{CB}$,
on a donc $3\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{CB}-3\overrightarrow{DA}-3\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{AI}=8\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AI}$.
On a pu simplifier car, $ABCD$ étant un parallélogramme, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.
Remplaçons $\overrightarrow{AI}$ par ce que nous dit la 1ère égalité (celle qui définit le point I):
$3\overrightarrow{IJ}=8\overrightarrow{BC}-3(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC})=\frac{-3}{2}\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{BC}$. On trouve finalement $\overrightarrow{IJ}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$.

- Il reste à effectuer la même chose pour $\overrightarrow{IK}$:

Comme $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{KA}+2(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB})=3\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ (égalité définissant le point K), soit $3\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{AB}$, on a $3(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IK})=-2\overrightarrow{AB}$, et donc $-3\overrightarrow{IK}=-2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{IA}=-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AI}$.
Remplaçons $\overrightarrow{AI}$ par ce que nous dit la 1ère égalité : $-3\overrightarrow{IK}=-2\overrightarrow{AB}+3(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC})=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{IJ}$.
On a finalement $-3\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IJ}$. $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont donc colinéaires, les points I, J et K sont alignés.
Le résultat était attendu (l'énoncé insinuait qu'il existait un nombre k, il suffisait de le vérifier..).

N'y a t-il pas une méthode plus simple ? On peut penser faire la figure : ne pas perdre de temps à cela. C'est assez compliqué. On peut se tromper. Ce n'est, dans tous les cas, pas une preuve. Néanmoins, nous avons fait une figure où l'on voit que les points sont bien alignés. Pour la construction des points, il faut revenir aux définitions vectorielles de l'énoncé. Pour placer J, nous sommes partis de l'égalité un peu transformée : $3\overrightarrow{DJ}=2\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{AD}=5\overrightarrow{AD}$, soit $\overrightarrow{DJ}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AD}$ (vous remarquerez l'astuce utilisant le théorème de Thalès pour placer J). Pour placer K, nous sommes partis de l'égalité un peu transformée : $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et avons également utilisé le théorème de Thalès pour placer K.

On aurait pu déterminer une équation de la droite (IJ) et vérifier que les cordonnées de K la vérifie.
On peut aussi montrer que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires avec les coordonnées des points et des vecteurs et le calcul du déterminant).



Situons-nous dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD})$ sans oublier que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ($ABCD$ est un parallélogramme).

- $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, donc $I(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{2}{3})$.
- $3\overrightarrow{DJ}=3(\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AD})=2\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{CB}$, d'où $3\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{CB}+3\overrightarrow{AD}=8\overrightarrow{AD}$ et donc $J(0\ ;\ \frac{8}{3})$.
- $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=3\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, d'où $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et donc $K(\frac{2}{3}\ ;\ 0)$.

On trouve alors que $\overrightarrow{IJ}(-\frac{1}{2}\ ;\ 2)$ et $\overrightarrow{JK}(\frac{2}{3}\ ;\ -\frac{8}{3})$
et $det(\overrightarrow{IJ}\ ;\ \overrightarrow{JK})=(\frac{-1}{2})\times(\frac{-8}{3})-(2)\times(\frac{2}{3})=\frac{8}{6}-\frac{4}{3}=0$.

Est-ce plus simple ? Vous en jugerez. De toutes les façons envisagées ce n'est pas immédiat, il y a du calcul. Il n'est pas exclu que l'un de vous pense à une méthode plus simple.

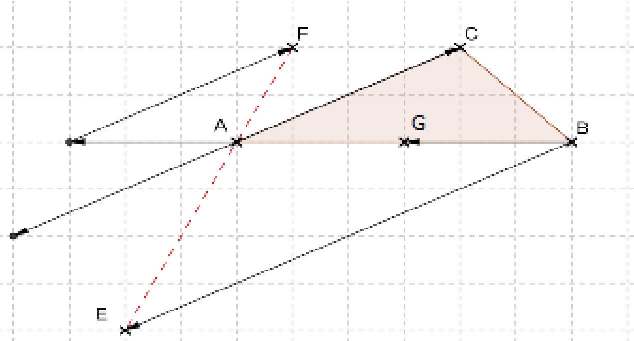
b) A, B et C sont trois points non-alignés du plan. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}=-6\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

On a deux méthodes : trouver k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$ ou bien utiliser le fait que le déterminant des vecteurs est nul.
Ici, on a $\vec{v}=-6\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=-3(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=-3\vec{u}$ (ce n'est pas difficile de trouver ce qui se met en facteur)
Autre méthode : les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base ($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) sont $\vec{u}(2\ ;\ -1)$ et $\vec{v}(-6\ ;\ 3)$ et $det(\vec{u}\ ;\ \vec{v})=2\times3-(-6)\times(-1)=6-6=0$ donc les vecteurs sont colinéaires (cette méthode ne permet pas de trouver le coefficient k, mais il n'était pas demandé).
NB : Si l'on n'a pas vu en cours, ou si on a oublié ce qu'est le déterminant, on peut dire que pour avoir $\vec{u}=k\vec{v}$, il faut que les coordonnées de ces deux vecteurs vérifient les égalités :

- $2=k\times(-6)$ (c'est la composante selon $\overrightarrow{AB}$)
- $-1=k\times3$ (c'est la composante selon $\overrightarrow{AC}$).

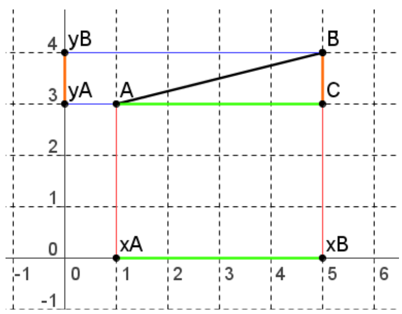
La 1ère égalité donne $k=\frac{2}{-6}=\frac{-1}{3}$ et la 2de donne $k=\frac{-1}{3}$ directement.
Comme il s'agit du même nombre k, on peut en déduire que les vecteurs sont colinéaires.

c) E et F sont définis par $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
Placer E et F sur la figure. Montrer que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.
La relation de Chasles soustractive nous permet d'écrire que $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.



En déduire que l'on a $\overrightarrow{AE}=-2\overrightarrow{AF}$.
Que peut-on en déduire pour les points A, E et F ?
On a $-2\overrightarrow{AF}=-2(\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{2}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$, et donc $-2\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}$. Les points A, E et F sont alignés (droite en pointillés rouges).
Soit G le milieu de $[AB]$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Montrer que $(CG)//(AF)$.
Puisque G est le milieu de $[AB]$, on a $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CG}$,
et donc $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}))=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.
Comme $\overrightarrow{AF}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, on remarque que $\overrightarrow{AF}=-(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=-\overrightarrow{CG}$.
Les vecteurs étant colinéaires (ils sont opposés), les droites qui les supportent sont parallèles.
On a, de plus, $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{GC}$ et donc $AFCG$ est un parallélogramme (ce qui se voit sur la figure).

3) Calculs de distances



Rappel de cours : Pour calculer des distances avec les coordonnées, nous *devons* utiliser un repère *orthonormé* (les directions des vecteurs de la base sont *perpendiculaires* et ces vecteurs ont *la même longueur*). Dans ces conditions, la distance AB est égale à $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

a) Soient trois points $A(3\ ;\ 3)$, $B(4\ ;\ 6)$ et $C(6\ ;\ 2)$.
Quelle est la nature du triangle ABC ?
On calcule les longueurs des côtés du triangle ABC :
$AB=\sqrt{(4-3)^2+(6-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$,
$AC=\sqrt{(6-3)^2+(2-3)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$ et
$BC=\sqrt{(6-4)^2+(2-6)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$. Le triangle ABC est isocèle en A puisque $AB=AC$.
Mais $AB^2+AC^2=10+10=20=BC^2$. Le triangle ABC est rectangle en A puisque ses côtés vérifient l'égalité de Pythagore. Finalement, le triangle ABC est un triangle isocèle-rectangle en A, un demi-carré.

b) Soient trois points $D(-1\ ;\ -1)$, $E(-5\ ;\ 0)$ et $F(-4\ ;\ 4)$.
Quelle est la nature du triangle DEF ?
On calcule les longueurs des côtés du triangle DEF :
$DE=\sqrt{(-5+1)^2+(0+1)^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$,
$DF=\sqrt{(-4+1)^2+(4+1)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$ et
$EF=\sqrt{(-4+5)^2+(4-0)^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$.

De plus, on a $DE^2+EF^2=17+17=34=DF^2$.
Le triangle *DEF* est un triangle isocèle-rectangle en *E*.

c) Soient trois points $G(-1\ ;-1)$, $H(-2\ ;1)$ et $I(x\ ;y)$. On voudrait déterminer les valeurs de x et y pour que le triangle *GHI* soit équilatéral. Poser le système d'équations que doit vérifier les solutions. Montrer que ce système implique que $2x-4y+3=0$ (équation de la médiatrice de [*GH*]).
En déduire alors que l'abscisse de *I* doit vérifier $x^2+3x-\frac{3}{4}=0$.
Montrer que cette équation s'écrit aussi $(x+\frac{3}{2})^2-3=0$ et conclure (il y a deux solutions).
On calcule les carrés des longueurs des côtés du triangle *GHI*.
$GH^2=(-2+1)^2+(1+1)^2=1+4=5$, $GI^2=(x+1)^2+(y+1)^2$ et $IH^2=(x+2)^2+(y-1)^2$.
Ces longueurs doivent être égales pour que le triangle *GHI* soit équilatéral. Leur carré également.
On doit donc avoir, d'une part $(x+1)^2+(y+1)^2=5$ et, d'autre part $(x+1)^2+(y+1)^2=(x+2)^2+(y-1)^2$.
Developpons cette dernière égalité : $x^2+2x+1+y^2+2y+1=x^2+4x+4+y^2-2y+1$.
Simplifions, il vient : $2x+2y+2=4x-2y+5$.
Regoupons tout dans le membre de gauche : $-2x+4y-3=0$.
On obtient bien, en changeant de signe : $2x-4y+3=0$ qui est l'équation cartésienne d'une droite.
Cette équation peut aussi s'écrire $4y=2x+3$ ou encore $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$ qui est l'équation réduite.
Cette droite traduit le fait que *GI*=*IH*, autrement dit que *I* est sur la médiatrice de [*GH*].
L'autre égalité, qui traduit *GH*=*GI*, autrement dit que *G* est sur la médiatrice de [*IH*], s'écrit alors $(x+1)^2+(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}+1)^2=5$, soit $(x+1)^2+(\frac{1}{2}x+\frac{7}{4})^2=5$.
Développons : $x^2+2x+1+\frac{x^2}{4}+(\frac{7}{4})^2+\frac{7x}{4}=5$.
Regroupons : $\frac{5}{4}x^2+\frac{15x}{4}+1+(\frac{7}{4})^2-5=0$, soit $\frac{5}{4}x^2+\frac{15x}{4}+\frac{16+49-80}{16}=0$ ou encore $\frac{5}{4}x^2+\frac{15x}{4}+\frac{-15}{16}=0$.
Multiplions par 16 : $20x^2+60x-15=0$; divisons par 5 : $4x^2+12x-3=0$.
Cette égalité est bien égale, en divisant encore par 4, à $x^2+3x-\frac{3}{4}=0$
ce qui se met sous la forme $(x+\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2-\frac{3}{4}=0$,
soit $(x+\frac{3}{2})^2-(\frac{9}{4}+\frac{3}{4})=0$
ou encore $(x+\frac{3}{2})^2-3=0$.
On en déduit que x doit vérifier $(x+\frac{3}{2}-\sqrt{3})(x+\frac{3}{2}+\sqrt{3})=0$
et donc que soit $x+\frac{3}{2}-\sqrt{3}=0$, soit $x+\frac{3}{2}+\sqrt{3}=0$.
Finalement, $x=\frac{-3}{2}+\sqrt{3}\approx 0{,}232$ ou $x=\frac{-3}{2}-\sqrt{3}\approx -3{,}232$.
On en déduit alors la valeur de y : $y=\frac{1}{2}(\frac{-3}{2}+\sqrt{3})+\frac{3}{4}$ ou $y=\frac{1}{2}(\frac{-3}{2}-\sqrt{3})+\frac{3}{4}$,
ce qui se simplifie en $y=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}866$ ou $y=\frac{-\sqrt{3}}{2}\approx -0{,}866$.
Les deux points *I* qui conviennent ont pour coordonnées

$$I_1(\frac{-3}{2}+\sqrt{3}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2})\ \text{ et }\ I_2(\frac{-3}{2}-\sqrt{3}\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

La figure nous montre ces deux points.