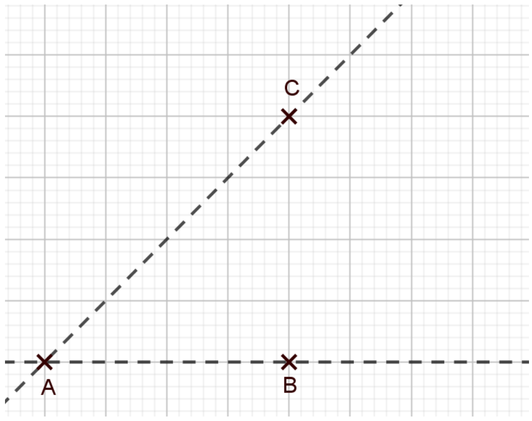
TD n°2 sur les vecteurs

1) Coordonnées



a) A, B et C sont trois points non-alignés. Quelles sont les coordonnées de A, B et C dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$?
Soient D, E, I et G les points définis par :
$\vec{CD}=\frac{1}{2}\vec{AB}$, $\vec{AE}=\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AC}$, I milieu de $[DE]$ et $G(\frac{1}{4};\frac{1}{4})$
Exprimer les vecteurs $\vec{AD}$ et $\vec{AI}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
Déterminer les coordonnées de D, E et I.
Placer D, E, I et G sur la figure.
Montrer que le vecteur $\vec{BC}$ a pour coordonnées $(-1;1)$ et que celles de $\vec{ED}$ sont $(\frac{-1}{2};\frac{1}{2})$.
En déduire que les vecteurs $\vec{BC}$ et $\vec{ED}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire ?
Montrer que les points A, G et I sont alignés.
Montrer que $GBIC$ est un parallélogramme.

b) Soient A, B et C trois points non-alignés du plan.
Déterminer, si possible, les réels x et y tels que $\vec{AM}=x\vec{AB}+y\vec{AC}$ dans les cas suivants :

$$2\vec{MC}-\vec{MB}=\vec{AB}\ ;\ \vec{MB}-4\vec{AB}=2\vec{CB}\ ;\ 2\vec{AB}=\vec{MC}+\vec{BC}\ ;$$
$$\vec{BM}-\vec{AM}=\vec{AC}\ ;\ 3\vec{MA}+2\vec{MB}=4\vec{MC}\ ;\ \vec{AM}+\vec{BC}=\vec{AC}+\vec{BM}$$

En déduire, à chaque fois, les coordonnées du point M dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$.

2) Colinéarité / Alignement & Parallélisme / Déterminant

a) $ABCD$ est un parallélogramme. L est le milieu de $[AB]$. I, J, K et E sont définis par :

$$\vec{AI}=\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{2}{3}\vec{BC}\ ;\ 3\vec{DJ}=2\vec{AD}-3\vec{CB}\ ;\ \vec{KA}+2\vec{KB}=\vec{0}\ ;\ \vec{DE}=\frac{2}{3}\vec{DL}$$

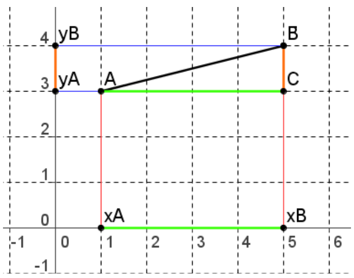
Les points A, E et C sont-ils alignés ? [Déterminer les coordonnées des points dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$]
Montrer que I, J et K sont alignés.

b) A, B et C sont trois points non-alignés du plan. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\vec{u}=2\vec{AB}-\vec{AC}$ et $\vec{v}=-6\vec{AB}+3\vec{AC}$. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

c) E et F sont définis par $\vec{BE}=2\vec{CA}$ et $\vec{AF}=\frac{-1}{2}\vec{AB}+\vec{AC}$.
Placer E et F sur la figure. Montrer que $\vec{AE}=\vec{AB}-2\vec{AC}$.
En déduire que l'on a $\vec{AE}=-2\vec{AF}$. Que peut-on en déduire pour les points A, E et F ?
Soit G le milieu de $[AB]$. Exprimer le vecteur $\vec{CG}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
Montrer que $(CG)//(AF)$.

3) Calculs de distances

Rappel de cours : Pour calculer des distances avec les coordonnées, nous *devons* utiliser un repère *orthonormé* (les directions des vecteurs de la base sont *perpendiculaires* et ces vecteurs ont *la même longueur*). Dans ces conditions, la distance AB est égale à $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.



a) Soient trois points $A(3;3)$, $B(4;6)$ et $C(6;2)$.
Quelle est la nature du triangle ABC ?

b) Soient trois points $D(-1;-1)$, $E(-5;0)$ et $F(-4;4)$.
Quelle est la nature du triangle DEF ?

c) Soient trois points $G(-1;-1)$, $H(-2;1)$ et $I(x;y)$. On voudrait déterminer les valeurs de x et y pour que le triangle GHI soit équilatéral.
Poser le système d'équations que doit vérifier les solutions.
Montrer que ce système implique que $2x-4y+3=0$ (équation de la médiatrice de $[GH]$).
En déduire alors que l'abscisse de I doit vérifier $x^2+3x-\frac{3}{4}=0$.
Montrer que cette équation s'écrit aussi $(x+\frac{3}{2})^2-3=0$ et conclure (il y a deux solutions).