5.1 Corrections

5.1.1 Dénombrement

Correction de l'exercice 5.1 (Factorielles)

1) Combien de zéros y a t-il à la fin du grand nombre 2019! ? Certainement beaucoup.

Pour qu'apparaisse un zéro, il faut multiplier par 5 un nombre pair car, dans la table des produits entre chiffres (voir ci-contre), aucune autre possibilité n'existe. Si un facteur de 2019! est divisible par 5 il va produire 1 zéro (en se combinant à un nombre pair) ; s'il est divisible par $25 = 5^2$ il va en produire 2 ; etc. Si les nombres d'entiers $1 \leqslant n \leqslant 2019$ divisibles par 5, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$ et $5^4 = 625$ sont désignés par n_1, n_2, n_3 et n_4, alors le nombre de zéros produits est $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$. En effet, dans la grande liste des facteurs il se trouvera toujours assez de facteurs 2 (un nombre sur deux est pair, un nombre sur quatre contient 2 facteurs 2, etc.) pour se combiner avec les facteurs 5 pour faire $5 \times 2 = 10$ (1 zéro ajouté), $5^2 \times 2^2 = 10^2$ (2 zéros ajoutés), $5^3 \times 2^3 = 10^3$ (3 zéros ajoutés) et $5^4 \times 2^4 = 10^4$ (4 zéros ajoutés).

		2	3	4	5	6	7	8	9
	×	|	|	|	|	|	|	|	|
2	–	4	6	8	10	12	14	16	18
3	–	6	9	12	15	18	21	24	27
4	–	8	12	16	20	24	28	32	36
5	–	10	15	20	25	30	35	40	45
6	–	12	18	24	30	36	42	48	54
7	–	14	21	28	35	42	49	56	63
8	–	16	24	32	40	48	56	64	72
9	–	18	27	36	45	54	63	72	81

Quand on va multiplier par $1875 = 3 \times 625$ par exemple, ce nombre étant divisible à la fois par 5, 5^2, 5^3 et 5^4, cela ajoute 1 à n_1, n_2, n_3 et n_4 et cela ajoute 4 zéros au produit final. Un exemple plus simple et plus classique : quand on va multiplier par $10 = 2 \times 5$, comme 10 est divisible par 5, on ajoute 1 à n_1 et 1 zéro au produit final.
Combien y a t-il de nombres divisibles par 5 et inférieurs à 2019 ?
Comme $\frac{2019}{5} = 403,8$, il y en a $n_1 = 403$.
Combien y a t-il de nombres divisibles par 25 et inférieurs à 2019 ?
Comme $\frac{2019}{25} = 80,76$, il y en a $n_2 = 80$.
De même, comme $\frac{2019}{125} = 16,152$, il y a $n_3 = 16$ nombres divisibles par 125 et inférieurs à 2019 et, comme $\frac{2019}{625} = 3,2304$, il y a $n_4 = 3$ nombres divisibles par 625 et inférieurs à 2019.
Finalement, il y a $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 403 + 80 + 16 + 3 = 502$ zéros à la fin de 2019!.
Cela parait énorme mais ce nombre est énorme, il a 5799 chiffres [1] dont les 502 derniers sont des zéros.

2) Quels sont les trois derniers chiffres du très grand nombre $1! + 2! + 3! + \cdots + 2018! + 2019!$?
L'étude précédente nous a fait observer le fait que, très rapidement, il y a beaucoup de zéros à la fin d'une factorielle :

- 1 zéro à partir de 5! (il y a $n_1 = 1$ nombre divisible par 5)
- 2 zéros à partir de 10! (il y a $n_1 = 2$ nombres divisibles par 5)
- 3 zéros à partir de 15! (il y a $n_1 = 3$ nombres divisibles par 5)
- 4 zéros à partir de 20! (il y a $n_1 = 4$ nombres divisibles par 5)
- 6 zéros à partir de 25! (il y a $n_1 = 5$ nombres divisibles par 5 et $n_2 = 1$ nombre divisible par 5) et je le prouve aux sceptiques $25! = 15511210043330985984000000$

Pour la somme $\sum_{k=1}^{2019} k!$, comme on ne veut savoir que les trois derniers chiffres, il suffit de connaître la somme $\sum_{k=1}^{14} k!$. Au delà, les factorielles ajoutées ne changeront pas ces trois derniers chiffres.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{14} k! =& 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720 + 5040 + 40320 + 362880 + 3628800 + 39916800 + \\ & + 479001600 + 6227020800 + 87178291200 = 93928268313\end{aligned}$$

Les trois derniers chiffres de $\sum_{k=1}^{2019} k!$ sont donc 313.
Ce n'était pas demandé mais combien a de chiffres ce très grand nombre et quels sont ses trois premiers chiffres ? On a dit que 2019! a 5799 chiffres, mais 2018! n'a que 5795 chiffres. En l'ajoutant à 2019!, on ne changera pas le nombre de chiffres ! De même, pour les autres factorielles ajoutées qui ne modifieront que les chiffres de rang inférieur. Comme $2019! = 191137104\cdots$ (5790 chiffres derrière) et $2018! = 94669\cdots$ (5790 chiffres derrière), la somme $\sum_{k=1}^{2019} k!$ commence par $19123\cdots$ et n'a que 5799 chiffres.

1. Pour effectuer ce type de calcul, connaître ces chiffres et leur nombre, on peut se rendre sur le site `https://calculis.net/factorielle`

Correction de l'exercice 5.2 (Immatriculations)
a) Combien de véhicules peuvent être immatriculés avec le nouveau SIV (système d'immatriculation des véhicules) ? Il faut choisir 2 lettres, puis 3 chiffres et enfin 2 lettres. L'identifiant territorial ne compte pas, il ne peut pas y avoir AB-123-AB avec deux identifiants territoriaux différents (un à Paris et l'autre dans le Loiret par exemple) car ce numéro est national.
On a $26^2 = 676$ façons de choisir 2 lettres ordonnées (AB différent de BA), $10^3 = 1000$ façons de choisir 3 chiffres ordonnées en supposant que l'on utilise des nombres comme 012, même écrit 12. Finalement, on peut immatriculer $676 \times 1000 \times 676 = 456\,976\,000$ véhicules avec ce nouveau SIV.
En réalité il y a beaucoup moins d'immatriculations possibles du fait qu'on enlève les I, O et U (jugés trop proches de 1, 0 et V) ainsi que les groupes SS et WW du bloc de gauche (pourquoi le WW, les blocs KK, PD, PQ, QQ, ou WC n'étant pas supprimés ? Ce bloc était utilisé pour les véhicules en attente d'immatriculation) et SS du bloc de droite ; on enlève aussi le 000. Il y a donc $[(23 \times 23) - 2] \times 999 \times [(23 \times 23) - 1] = 277\,977\,744$ immatriculations possibles avec le nouveau SIV.
Malgré le fait que les deux-roues sont également immatriculés avec le SIV, la durée de vie prévisible de ce système est estimée à 80 ans. Cela laisse encore de la marge.

b) Combien de véhicules pouvaient être immatriculés avec l'ancien système FNI (fichier national des immatriculations) dans le département de Paris ? Il y a $10^4 = 10000$ numéros d'ordre d'un à quatre chiffres. Pour les séries d'une à trois lettres, il y a 26 séries d'une lettre, $26^2 = 676$ séries de deux lettres et $26^3 = 17576$ séries de trois lettres, soit $26 + 676 + 17576 = 18278$ séries d'une à trois lettres. Il y a donc potentiellement $10000 \times 17576 = 175\,760\,000$ immatriculations possibles avec l'ancien système pour le département de Paris.
Il y a 96 codes départementaux à deux chiffres (Corse $2A$ et $2B$ comprise) et une douzaine de codes à trois chiffres (départements d'outre-mer). Dans chaque département, on peut trouver un même début : par exemple, $1975GM75$ à Paris et $1975GM45$ dans le Loiret. On constate que cet ancien système conduit à un nombre plus grand de possibilités. Mais en réalité, comme le souligne l'énoncé, il allait être dépassé à Paris (on s'est arrêté au numéro $523RQD75$ en 2009). Il faut dire que le numéro était changé lors d'un déménagement ou d'une vente du véhicule, dès lors que le département d'immatriculation changeait. Un même véhicule pouvait ainsi avoir 2, 3 ou plus numéros différents durant son existence.
Pour davantage d'informations : `http://plaque.free.fr/eur-f/f-1950-2004.html`.

Correction de l'exercice 5.3 (Jeu de cubes)
(DM facultatif : cet exercice sera corrigé ultérieurement)

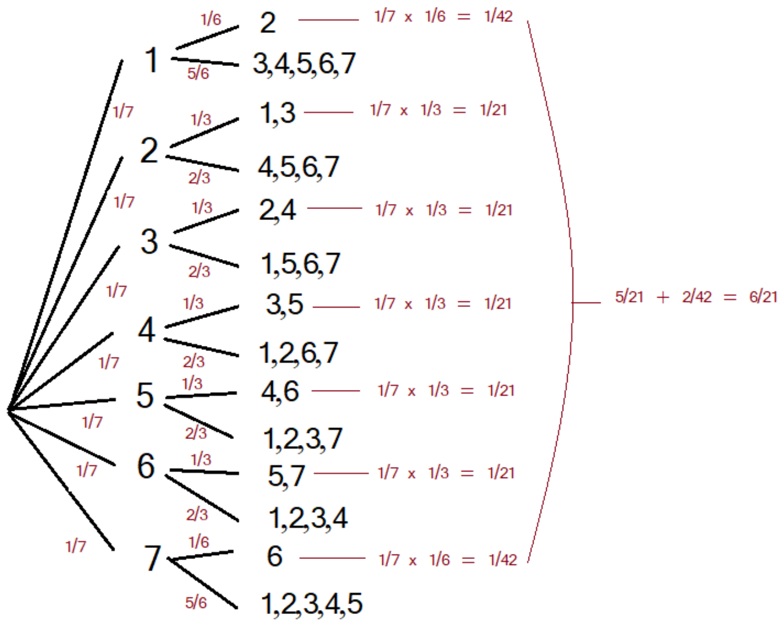
Correction de l'exercice 5.4 (Taille maximale du désordre)
(DM facultatif : cet exercice sera corrigé ultérieurement)

5.1.2 Equiprobabilité

Correction de l'exercice 5.5 (La photo)
1a) Technique de *dénombrement*
Le nombre d'ordres possibles : on doit choisir une permutation des 7 président(e)s. Il y a $7! = 5040$ ordres possibles des 7 présidents (on choisit d'abord le premier parmi les 7, puis le second parmi les 6 restants, etc.). Le nombre d'ordres réalisant l'évènement considéré : on choisit d'abord la place du 1[er] président de la paire France/États-Unis à partir de la gauche (6 places possibles de 1 à 6), on choisit ensuite l'ordre dans lequel sont placés les présidents de la paire (2 ordres différents F/E ou E/F) et enfin on choisit une permutation des 5 autres président(e)s (il y a $5! = 120$ ordres possibles). Au total, cela fait $6 \times 2 \times 120 = 1440$ placements favorables. La probabilité que les présidents des États-Unis et de la France soient côte à côte au prochain sommet du G7 est donc de $\frac{1440}{5040} = \frac{2}{7} \approx 0,2857$.

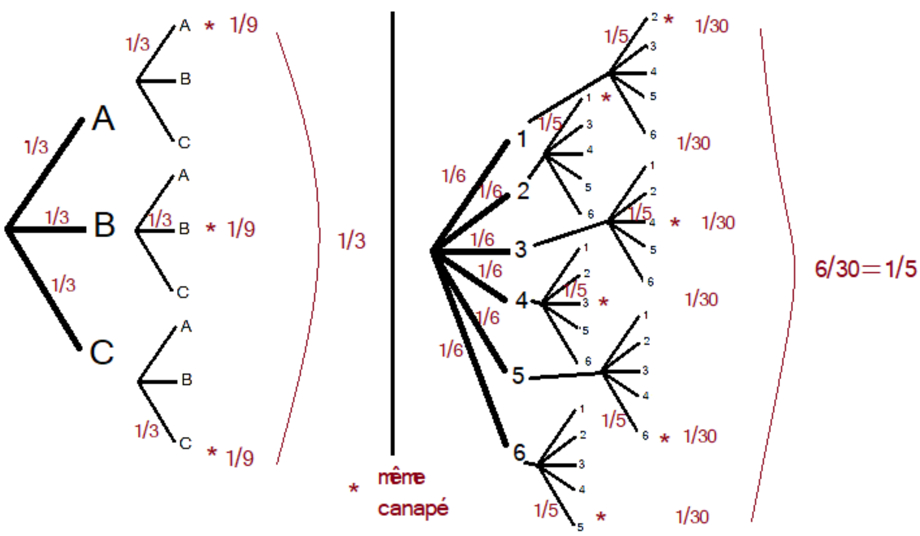
1b) L'*arbre de probabilités*
J'ai dessiné cet arbre où, au 1[er] nœud, sont les 7 places possibles du président des États-Unis et, au 2[e] nœud, les différentes places possibles du président de la France. Il devrait y avoir 42 branches à cet

arbre, mais pour simplifier j'ai regroupé celles qui réalisent l'évènement considéré (complétées jusqu'à la valeur de la probabilité du chemin) et celles qui ne le réalisent pas. La somme des probabilités de tous les chemins qui réalisent l'évènement considéré est de $\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$.



2) Pour le sommet du G20, la méthode du dénombrement conduit à la probabilité de $\frac{19\times2\times18!}{20!} = \frac{19\times2}{20\times19} = \frac{1}{10} = 0,1$.
Si on réalise un arbre de probabilités, on arrive à la somme suivante $2 \times \frac{1}{20} \times \frac{1}{19} + 18 \times \frac{1}{20} \times \frac{2}{19} = \frac{2+18\times2}{20\times19} = \frac{38}{20\times19} = \frac{1}{10} = 0,1$.

Correction de l'exercice 5.6 (Les canapés)
Remarque préliminaire : Il est entendu que si deux personnes s'assoient côte à côte sur le même canapé alors qu'il y a trois canapés disponibles, ce n'est jamais par hasard ! Elles doivent avoir (au moins) une bonne raison de le faire. Mais dans cet exercice théorique, le contexte n'est qu'un prétexte : il faut supposer que les objets animés suivent scrupuleusement les règles imposées par la consigne, quitte à adopter un comportement contre nature. Il serait plus judicieux de donner à cet exercice un autre contexte : par exemple, un hôtel de trois étages contient deux chambres à chaque étage. L'hôtel étant vide, deux personnes arrivent successivement et choisissent aléatoirement une chambre. Quelle est la probabilité qu'elles se logent au même étage ?
Ceci dit, dressons les arbres de probabilité des deux situations.



a) Mode 1
Les trois boules étant équiprobables, la 1re personne a une chance sur trois d'aller dans un des canapés. La 2e personne a également une chance sur trois d'aller dans un des canapés. Il y a donc trois possibilités que les deux personnes soient dans le même canapé sachant qu'il y a $3^2 = 9$ cas possibles en tout. La probabilité est donc de $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} \approx 0,2222$ que les deux personnes s'asseyent côte à côte sur le même canapé.

b) Mode 2
Les six boules étant équiprobables et les canapés étant désignés par autant d'issues équiprobables des dés, la 1re personne a deux chances sur six, soit une chance sur trois, d'aller dans un des canapés. Á l'issue de ce premier tirage, la boule n'est pas remise, pour éviter que la même place soit indiquée pour les deux personnes. La 2e personne a donc une chance sur cinq d'aller dans le même canapé que la 1re. La probabilité est donc de $\frac{1}{5} \approx 0,2$ que les deux personnes s'asseyent côte à côte sur le même canapé.

La morale de cette histoire est que l'expression « se placer au hasard » est imprécise : la procédure utilisée pour mimer le hasard influe sur le résultat.

Correction de l'exercice 5.7 (Marche aléatoire)
1a) Évènements E1 :
La fourmi est en A au bout de 30 s après être partie de A. Elle choisit toutes les 10 s un des 3 chemins qui se présentent à chaque sommet : il y a $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$ chemins possibles et équiprobables. Parmi ces 27 chemins, seuls les chemins $A-B-C-A$, $A-B-D-A$, $A-C-B-A$, $A-C-D-A$, $A-D-B-A$ et $A-D-C-A$ la font se retrouver en A.
Il y a 6 cas favorables et 27 possibles, la probabilité est donc de $\frac{6}{27} = \frac{2}{9} \approx 0,2222$.
Évènements E2 :
La fourmi n'est jamais passée par le sommet B durant les 30 premières secondes après être partie de A. Parmi les 27 chemins possibles, seuls les chemins $A-D-C-A$, $A-D-C-D$, $A-D-A-D$, $A-D-A-C$, $A-C-D-A$, $A-C-D-C$, $A-C-A-C$ et $A-C-A-D$ lui font éviter de passer en B.
Il y a 8 cas favorables et 27 possibles, la probabilité est donc de $\frac{8}{27} \approx 0,2963$.

1b) Les évènements p_n et q_n sont complémentaires, c'est-à-dire que $p_n = 1 - q_n$ et, de même, on a $p_{n-1} = 1 - q_{n-1}$ et $p_{n-2} = 1 - q_{n-2}$. Ceci dit, exprimons p_n en fonction de p_{n-1} et q_{n-1} :
$p_n = q_{n-1} \times \frac{1}{3}$ car, pour se retrouver en A au temps n, la fourmi ne devait pas y être au temps $n-1$, et quel que soit le sommet non-A où elle se trouvait au temps $n-1$, elle a toujours la même probabilité $\frac{1}{3}$ de se rendre en A.
De même, exprimons q_n en fonction de p_{n-1} et q_{n-1} :
$q_n = p_{n-1} \times 1 + q_{n-1} \times \frac{2}{3}$ car, pour ne pas se retrouver en A au temps n, la fourmi pouvait être ou ne pas être en A au temps $n-1$, dans le 1er cas elle était forcée de ne pas y être au temps n (d'où le 1 de la formule précédente), et dans le second, quel que soit le sommet non-A où elle se trouvait au temps $n-1$, elle a toujours la même probabilité $\frac{2}{3}$ de ne pas se rendre en A.
Si je remplace p_{n-1} par $q_{n-2} \times \frac{1}{3}$ (cette expression vient de la re formule) dans la dernière formule, j'obtiens $q_n = q_{n-2} \times \frac{1}{3} + q_{n-1} \times \frac{2}{3}$, soit $q_n = q_{n-1} \times \frac{2}{3} + q_{n-2} \times \frac{1}{3}$ qui est bien une relation de récurrence de type $u_n = \frac{2}{3}u_{n-1} + \frac{1}{3}u_{n-2}$.
En remplaçant q_{n-1} par $1 - p_{n-1}$ et q_{n-2} par $1 - p_{n-2}$, j'obtiens l'expression $1 - p_n = (1 - p_{n-1}) \times \frac{2}{3} + (1 - p_{n-2}) \times \frac{1}{3}$ qui se transforme aisément en $p_n = p_{n-1} \times \frac{2}{3} + p_{n-2} \times \frac{1}{3}$ qui est bien aussi une relation de récurrence de type $u_n = \frac{2}{3}u_{n-1} + \frac{1}{3}u_{n-2}$.
Comme $p_0 = 1$ (la fourmi est en A au début) et $p_1 = 0$ (la fourmi n'est plus en A au bout de 10 s), on trouve successivement :

- $p_2 = p_1 \times \frac{2}{3} + p_0 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \approx 0,3333$
- $p_3 = p_2 \times \frac{2}{3} + p_1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \approx 0,2222$ (ce que nous avions trouvé au a)
- $p_4 = p_3 \times \frac{2}{3} + p_2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27} + \frac{1}{9} = \frac{7}{27} \approx 0,2593$
- $p_5 = p_4 \times \frac{2}{3} + p_3 \times \frac{1}{3} = \frac{14}{81} + \frac{2}{27} = \frac{20}{81} \approx 0,2469$
- $p_6 = p_5 \times \frac{2}{3} + p_4 \times \frac{1}{3} = \frac{40}{243} + \frac{7}{81} = \frac{61}{243} \approx 0,2510$

On semble s'acheminer vers la probabilité de $\frac{1}{4} = 0,25$, par des valeurs alternativement au-dessous et en dessus de cette valeur. Cette probabilité est naturelle pour un tétraèdre qui contient 4 sommets équiprobables, l'influence de la position initiale se faisant de moins en moins sentir.
La programmation de cette suite récurrente ne pose pas de difficulté majeure (la calculatrice le fait très bien). On trouve par exemple $p_{10} \approx 0,2500127$, $p_{14} \approx 0,2500002$ et $p_{15} \approx 0,2499999$. Ensuite ma calculatrice *Numworks* ne me donne plus que $0,25$ car elle ne fournit que des valeurs approchées à 7 chiffres décimaux.

Si r_n est la probabilité que la fourmi ne soit jamais passée par le sommet B durant les $n \times 10$ s premières secondes, alors $r_{n+1} = r_n \times \frac{2}{3}$ car quel que soit le sommet non-B où elle se trouvait au temps n, elle a toujours la même probabilité $\frac{2}{3}$ de se rendre sur un autre sommet non-B (de A elle peut aller en C ou en D, de C elle peut aller en A ou en D et de D elle peut aller en C ou en A).
La suite (r_n) est donc géométrique de raison $\frac{2}{3}$. On a $r_n = r_0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2^n}{3^n}$ car $r_0 = 1$ (la fourmi n'est pas en B au départ). La limite de r_n est zéro : tôt ou tard, la fourmi aléatoire passera par B. Ne pas passer par B une infinité de fois reviendrait à ne jamais obtenir le chiffre 4 avec un dé tétraédrique numéroté de 1 à 4.

2) La fourmi a le choix entre trois arêtes quand elle est en E, F, G ou H et quatre quand elle est en S.
a) Pour parcourir le chemin $EFESE$, la fourmi doit choisir d'aller vers F alors qu'elle a 3 choix possibles, puis vers E alors qu'elle a 3 choix possibles, puis vers S alors qu'elle a 3 choix possibles et enfin vers E alors qu'elle a 4 choix possibles. La probabilité de ce chemin est $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3^3 \times 4} = \frac{1}{108}$.

b) Si la fourmi parcourt deux arêtes en partant de E, la probabilité qu'elle arrive :

- En E : $2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{9} + \frac{1}{12} = \frac{11}{36} \approx 0,3056$
  (les trois chemins possibles sont $E-F-E$, $E-H-E$ et $E-S-E$).
- En F : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \approx 0,0833$ (le seul chemin possible est $E-S-F$).
- En G : $2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{36} \approx 0,3056$
  (les trois chemins possibles sont $E-F-G$, $E-H-G$ et $E-S-G$).
- En S : $2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \approx 0,2222$
  (les deux chemins possibles sont $E-F-S$, $E-H-S$).

c) Si la fourmi parcourt trois arêtes en partant de E, la probabilité qu'elle arrive en S est

$$2 \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{11}{36} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{27} \approx 0,2593$$

En effet, en notant X un sommet non-S, les quatre chemins possibles sont $E-X-F-S$, $E-X-H-S$, $E-X-E-S$ et $E-X-G-S$. Les deux premiers ont la même probabilité de $\frac{1}{12} \times \frac{1}{3}$ car pour faire $E-X-F-S$, cela suppose d'être en F après la 2ᵉ étape et nous avons vu que ce chemin avait une probabilité de $\frac{1}{12}$ après quoi il faut aller en S ; de même pour $E-X-H-S$ qui passe par H au lieu de F, ce qui revient au même. Les deux derniers ont la même probabilité de $\frac{11}{36} \times \frac{1}{3}$ car ils supposent d'être en G après la 2ᵉ étape, ou en E ce qui revient au même du point de vue des probabilités.

d) Pour $n \geqslant 1$, on note p_n la probabilité d'arriver en S après n étapes.
Pour arriver en S après $n+1$ étapes, il faut partir d'un sommet quelconque qui n'est pas S à l'étape n. Comme $1 - p_n$ est la probabilité de ne pas être arrivé en S après n étapes (évènement contraire d'être arrivé en S après n étapes), on en déduit que $p_{n+1} = (1 - p_n) \times \frac{1}{3}$ car quel que soit le sommet non-S où elle se trouvait au temps n, elle a toujours la même probabilité $\frac{1}{3}$ de se rendre sur le sommet S.
En posant $u_n = p_n - \frac{1}{4}$, on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{4} &= \left[(1 - p_n) \times \frac{1}{3}\right] - \frac{1}{4} \\
&= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3}p_n = \frac{1}{12} - \frac{1}{3}p_n \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - p_n\right) = \frac{1}{3}(-u_n) = -\frac{1}{3}u_n
\end{aligned}$$

Ainsi $\forall n \geqslant 1, u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n$, la suite u est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ car $p_1 = \frac{1}{3}$ (la fourmi partant de E a une chance sur 3 d'aller en S en 1 étape). Finalement $u_n = \frac{1}{12} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. On en déduit que $p_n = u_n + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3\times(-3)^{n-1}}\right)$.
Testons cette formule avec $n = 3$ pour la vérifier : $p_3 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3\times(-3)^2}\right) = \frac{28}{4\times 27} = \frac{7}{27}$. On retrouve bien la valeur déterminée dans la question c.
La limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$ est $\frac{1}{4}$ car le terme $\frac{1}{3\times(-3)^{n-1}}$ tend vers zéro, $(-3)^{n-1}$ tendant vers $\pm\infty$. Cette limite n'est pas intuitive, alors qu'il y a 5 sommets on ne s'attend pas à ce que celui-là ait cette probabilité : cela signifie que la probabilité d'être en E par exemple, ou un quelconque des autres sommets du carré de base, est de $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$.

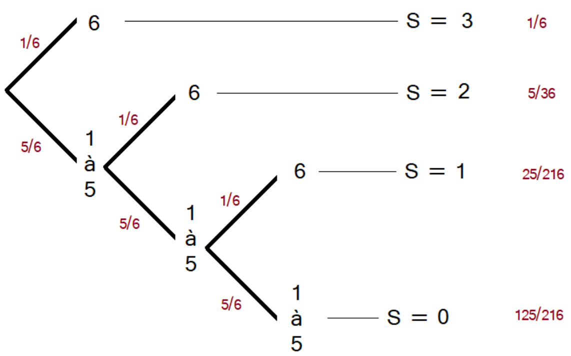
Correction de l'exercice 5.8 (Paradoxe)
L'affirmation « le sac contenant deux boules est composé de façon *équiprobable* de l'une des paires suivantes $\{(R,R),(R,B),(B,B),(B,R)\}$ », est un peu rapide, voire précipitée. Comme on l'a vu dans l'exercice précédent, selon la mode opératoire qui simule le hasard pour introduire les boules dans le sac, on peut obtenir des résultats différents :
On peut imaginer des modes opératoires qui conduisent à avoir un sac contenant deux boules pouvant être chacune blanche ou rouge sans que la probabilité d'avoir une couleur particulière soit de $\frac{1}{2}$. Par exemple on tire deux boules d'un sac qui contient 50 boules rouges et 100 boules blanches. Dans ce cas là, le problème parait mal posé : il faudrait préciser comment le sac a été rempli pour lever cette ambigüité.
Imaginons que le problème est bien posé, on sait que l'opérateur qui a rempli le sac a tiré deux jetons d'un sac contenant autant de jetons marqués R que de jetons marqués B et qu'il en a tiré deux, consécutivement, en remettant entre les deux tirages le jeton tiré dans le sac. La probabilité de chacune des paires est alors vraiment de $\frac{1}{4}$ et celles-ci sont bien équiprobables. Même dans ce cas – et on peut imaginer d'autres processus opératoires qui conduisent à l'équiprobabilité des paires initiales – la conclusion de Lewis Caroll est trompeuse : la probabilité calculée de $\frac{2}{3}$ n'est pas la probabilité de tirer une boule rouge dans un sac contenant trois boules ; c'est la probabilité de tirer une boule rouge dans un sac contenant trois boules *sachant qu'une des boules est rouge*. Cette connaissance fait toute la différence.

5.1.3 Variables aléatoires

Correction de l'exercice 5.9 (Jeux de dés)
1) Jeu avec un dé :
L'arbre des probabilités de ce jeu est donné dans l'illustration ci-dessous.

- $P(S=0) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$ (on ne tire aucun 6 en 3 tirages)
- $P(S=1) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$ (on tire un 6 pour la 1re fois au 3e tirage)
- $P(S=2) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$ (on tire un 6 pour la 1re fois au 2e tirage)
- $P(S=3) = \frac{1}{6}$ (on tire un 6 pour la 1re fois au 1er tirage)

Vérification $\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216} + \frac{125}{216} = \frac{36+30+25+125}{216} = \frac{216}{216} = 1$



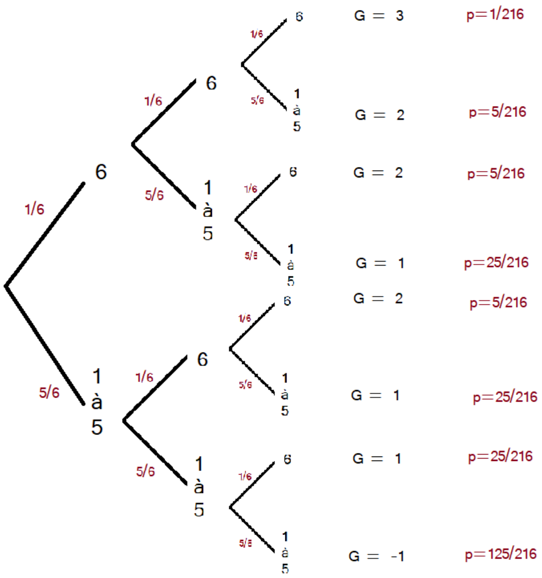
L'espérance de la variable S à ce jeu est $3\times\frac{1}{6}+2\times\frac{5}{36}+1\times\frac{25}{216}+0\times\frac{125}{216}=\frac{1}{2}+\frac{5}{18}+\frac{25}{216}=\frac{193}{216}\approx 0,8935$.

2) Jeu avec trois dés :

L'arbre des probabilités de ce jeu est donné dans l'illustration ci-dessous.

- $P(G=-1)=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$ (on ne tire aucun 6 en 3 tirages)
- $P(G=1)=3\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{75}{216}$ (on tire un seul 6 en 3 tirages, il y a trois possibilités selon le dé avec lequel on obtient le 6)
- $P(G=2)=3\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{15}{216}$ (on tire deux 6 en 3 tirages, il y a trois possibilités selon le dé avec lequel on n'obtient pas le 6)
- $P(G=3)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{216}$ (on tire trois 6 en 3 tirages)

Vérification $\frac{1}{216}+\frac{15}{216}+\frac{75}{216}+\frac{125}{216}=\frac{1+15+75+125}{216}=\frac{216}{216}=1$



L'espérance de la variable G à ce jeu est $3\times\frac{1}{216}+2\times\frac{15}{216}+1\times\frac{75}{216}-1\times\frac{125}{216}=\frac{3+30+75-125}{216}=\frac{-17}{216}\approx -0,08$€.

Le jeu est presque inoffensif mais on y perd généralement environ 8 centimes à chaque partie.

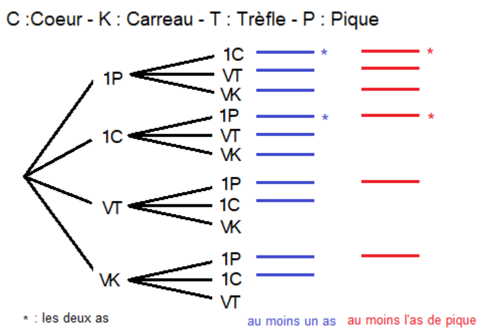
Correction de l'exercice 5.10 (Jeux de cartes)

1) Jeux avec quatre cartes :

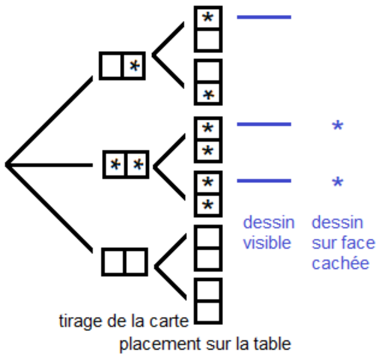
J'ai représenté sur la figure ci-dessous l'arbre des probabilités associé à cette expérience : il y a en tout $3\times 4=12$ éventualités équiprobables pour la constitution des mains. Parmi ces 12 mains, 10 contiennent au moins un as (en bleu) dont 6 contiennent au moins l'as de pique (en rouge). Parmi les 10 (ou 6) mains équiprobables contenant un as (ou au moins l'as de pique), il y en a toujours 2 qui en contiennent deux.

a) Si la personne annonce « j'ai un as », la probabilité qu'elle ait deux as est de $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

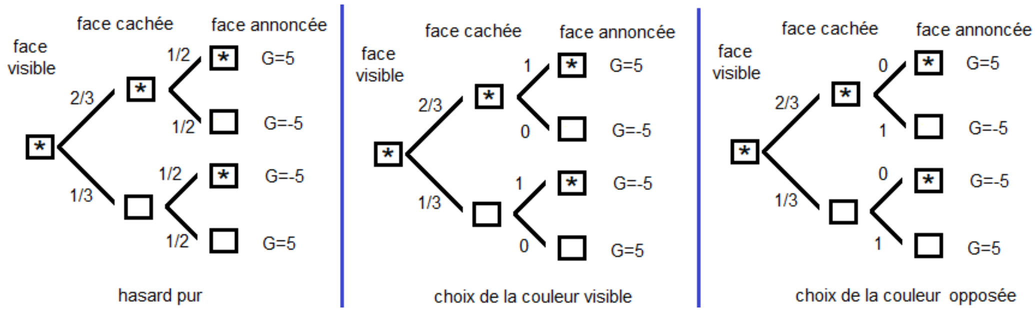
b) Si la personne annonce « j'ai l'as de pique », elle se trouve dans la situation analysée en rouge (6 cas possibles équiprobables et 2 cas favorables) et la probabilité qu'elle ait deux as est de $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.



2) Jeu avec trois cartes :
Ce jeu pose le problème de l'équiprobabilité : qu'est-ce qui est vraiment équiprobable ? Si on voit un dessin, cela élimine la carte ne contenant aucun dessin, il reste donc deux cartes. La probabilité de l'une semble être $\frac{1}{2}$ mais en réalité il n'en est rien car les deux possibilités ne sont pas équiprobables... Ce qui l'est, ce sont les 3 cartes initiales. Le fait de pouvoir en supprimer une ne change pas cette équiprobabilité des cartes initiales : en voyant un dessin, la carte ne contenant aucun dessin est éliminée, et la probabilité que la face cachée ait un dessin est de $\frac{2}{3}$ et non de $\frac{1}{2}$.
Pour l'expliquer, j'ai tracé cet arbre qui montre les six possibilités équiprobables (on tire d'abord la carte du sac et puis on la place en cachant une des faces). Le fait de pouvoir supprimer une carte des possibilités enlève 2 de ces éventualités équiprobables ; il en reste 4 dont une seule ne contient pas de dessin visible et, sur les 3 autres possibles, 2 contiennent un dessin caché. Donc si on voit un dessin, la probabilité que la face cachée en contienne un est de $\frac{2}{3}$.



Déterminons la probabilité de gagner et l'espérance du gain selon la stratégie. Pour cela j'ai tracé de nouveaux arbres en indiquant la probabilité des éventualités selon les stratégies. Le gain est une variable aléatoire qui ne peut prendre que deux valeurs (5 et -5).



a) On tire à pile ou face le type de face annoncé (arbre de gauche).
En supposant que la face visible contienne un dessin, la probabilité de gagner est égale à $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
Pareil si la face visible ne contient pas de dessin.
Comme $P(G = 5) = \frac{1}{2}$ et $P(G = -5) = \frac{1}{2}$, l'espérance de G est nulle.

b) On annonce systématiquement le même type que la face visible (arbre du milieu).
En supposant que la face visible contienne un dessin, la probabilité de gagner est égale à $\frac{2}{3}\times1+\frac{1}{3}\times0 = \frac{2}{3}$.
Pareil si la face visible ne contient pas de dessin.
Comme $P(G = 5) = \frac{2}{3}$ et $P(G = -5) = \frac{1}{3}$, l'espérance de G est $5 \times \frac{2}{3} - 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$.
Cette stratégie est gagnante.

c) On annonce systématiquement le type opposé à celui de la face visible (arbre de droite).
En supposant que la face visible contienne un dessin, la probabilité de gagner est égale à $\frac{2}{3}\times0+\frac{1}{3}\times1 = \frac{1}{3}$.
Pareil si la face visible ne contient pas de dessin.
Comme $P(G = 5) = \frac{1}{3}$ et $P(G = -5) = \frac{2}{3}$, l'espérance de G est $5 \times \frac{1}{3} - 5 \times \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$.
Cette stratégie est perdante.