5 Exercices de probabilités

Table des matières

5.1 Énoncés

5.1.1 Dénombrement

Exercice 5.1 (Factorielles)
Rappel : la factorielle de l'entier $n \geqslant 1$ est $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$.

a) Combien de zéros y a t-il à la fin du grand nombre $2019!$?

b) Quels sont les trois derniers chiffres du très grand nombre $1! + 2! + 3! + \cdots + 2018! + 2019!$?

Exercice 5.2 (Immatriculations)
L'immatriculation d'un véhicule, depuis le 15 avril 2009, est une série de 7 caractères alphanumériques noirs sur fond blanc : 2 lettres, 1 tiret, 3 chiffres, 1 tiret et 2 lettres. Elle fait, de plus, apparaître, sur sa partie droite et sur fond bleu, un identifiant territorial.
Ce nouveau SIV (SIV : système d'immatriculation des véhicules) s'est substitué à l'ancien dispositif de numérotation qui datait de 1950 et qui, dans une petite dizaine d'années notamment à Paris, ne pouvait plus être viable. Dans l'ancien dispositif, les immatriculations comprennent un numéro d'ordre d'un à quatre chiffres, une série d'une à trois lettres et un code départemental à deux chiffres, sauf exceptions (Corse et départements d'outre-mer).

a) Combien de véhicules peuvent être immatriculés avec le nouveau SIV ?

b) Combien de véhicules pouvaient être immatriculés avec l'ancien SIV à Paris ?

Exercice 5.3 (Jeu de cubes)
Je veux fabriquer un jeu de cubes de bois, tous identiques par leur dimension mais tous différents par leur coloriage.

a) Je peins chacune des faces avec une des deux couleurs à ma disposition (disons Noir et Blanc) de manière à ce qu'aucun cube ne soit peint de la même façon. Combien de cubes différents peut-on peindre ? (*dessiner et colorier des patrons de cube peut suffire car leur nombre se compte avec les doigts des deux mains*)

b) Je peins chacune des faces avec une des trois couleurs à ma disposition (disons Rouge, Blanc et Bleu) de manière à ce qu'aucun cube ne soit peint de la même façon. Combien de cubes différents peut-on peindre ? (*ici, comme il y a trop de cubes pour en colorier les patrons, il faut raisonner par disjonction des cas*)

Exercice 5.4 (Taille maximale du désordre)
On veut colorier N points avec c couleurs de manière à n'avoir jamais k points régulièrement espacés (séparés par une même distance). Le but est de déterminer la valeur maximale de N pour laquelle ce type de coloriage désordonné est possible. Cette taille maximale existe toujours selon un théorème de Franck Ramsey (1903-1930) mais ce théorème ne la donnant pas, il faut, pour chaque valeur du couple $(c;k)$, la déterminer. Le problème devient rapidement très difficile ; il n'est pas encore résolu pour le couple $(3;5)$. Nous nous contenterons d'étudier des cas plus simples :

a) Le cas $(2;3)$: avec 2 couleurs au choix, combien y a t-il de coloriages possibles pour une valeur donnée de N ? Écrire un programme qui génère tous ces différents coloriages et qui les teste, un par un, jusqu'à détecter la présence d'une régularité. Si aucune régularité n'est détectée dans un coloriage : afficher ce coloriage et arrêter les tests. Montrer par ce moyen que pour $N \leqslant 8$ le désordre (ne jamais avoir 3 points régulièrement espacés coloriés de la même couleur) est toujours possible. Vérifier qu'à partir de $N = 9$ il n'y a aucun coloriage en désordre .

b) Les cas $(3;3)$ et $(2;4)$: adapter le programme précédent à ces cas pour tenter de déterminer la valeur maximale de N pour laquelle un coloriage désordonné existe. *Indication : ces valeurs sont difficiles à atteindre à cause du très grand nombre de coloriages à tester. Optimiser la recherche, ou bien se contenter du plus grand des minorants trouvé.*

5.1.2 Equiprobabilité

Exercice 5.5 (La photo)
1) Les sept chefs d'État du G7 [a], réunis à leur sommet annuel, s'alignent pour la photo. Quelle est la probabilité que les présidents des États-Unis et de la France soient côte à côte au prochain sommet qui se tiendra à Biarritz en aout 2019 ? Pour répondre à cette question, on envisagera deux méthodes :

a) Le *dénombrement* : déterminer le nombre d'ordres possibles ainsi que le nombre d'ordres réalisant l'évènement considéré.

b) L'*arbre de probabilités* qui donne, au 1er nœud, les différentes places possibles du président des États-Unis et, au 2e nœud, les différentes places possibles du président de la France.

2) Répondre à la même question pour le Groupe des vingt (G20) (composé de dix-neuf pays et de l'Union européenne) et son prochain sommet qui aura lieu en juin 2019 à Osaka.

a. le « Groupe des sept » est un groupe de discussion et de partenariat économique des sept pays réputés être les plus grandes puissances avancées du monde qui détiennent environ les $\frac{2}{3}$ de la richesse nette mondiale : Allemagne, Canada, États-Unis, France, Italie, Japon et Royaume-Uni.

Exercice 5.6 (Les canapés)
Dans une pièce se trouvent trois canapés deux places. Entrent deux personnes qui vont s'asseoir sur les canapés de façon aléatoire. En suivant l'un des modes opératoires suivants, calculer la probabilité que les deux personnes soient assises côte à côte.

a) Mode 1 : On place trois boules marquées A, B et C dans une urne. Les canapés étant désignés par A, B et C, la 1re personne tire une boule, la remet dans l'urne et va s'asseoir sur le canapé indiqué par la boule. la 2e personne procède de la même façon.

b) Mode 2 : On place six boules marquées de 1 à 6 dans une urne. Les canapés étant numérotés 12, 34 et 56, la 1re personne tire une boule et va s'asseoir sur le canapé contenant le chiffre indiqué par la boule. la 2e personne procède de la même façon.

Exercice 5.7 (Jeu de la voiture et des chèvres)
Lors d'un jeu télévisé, le présentateur montre trois portes fermées au candidat et affirme que derrière l'une d'entre-elles se cache une voiture qui sera offerte si le candidat indique la bonne porte. Derrière chacune des autres porte se cache une chèvre.
Le candidat choisit tout d'abord une porte (pour l'instant on n'ouvre pas cette porte).
Le présentateur ouvre, parmi les deux portes restantes, une porte qui cache une chèvre.
Le candidat a le choix entre maintenir son premier choix ou le modifier. Que conseilleriez-vous au candidat (y a t-il une stratégie meilleure que l'autre) ?
Étudier les deux stratégies en cherchant à utiliser l'équiprobabilité d'une situation.

Exercice 5.8 (Marche aléatoire)
1) Une fourmi se balade sur les arêtes d'un tétraèdre régulier $ABCD$ en partant du sommet A. On suppose que la fourmi parcourt une arête en 10 s et qu'à chaque fois qu'elle arrive à un sommet elle choisit au hasard la prochaine arête à parcourir parmi les trois possibles.

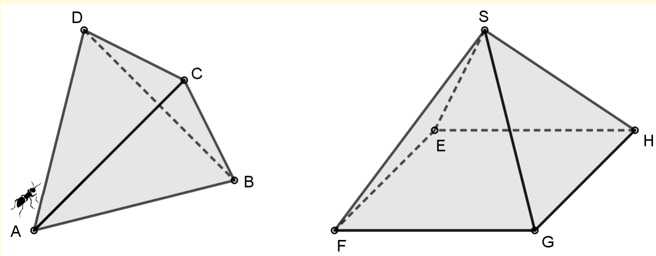
a) Déterminer les probabilités des évènements suivants :

E1) La fourmi est en A au bout de 30 s

E2) La fourmi n'est jamais passée par le sommet B durant les 30 premières secondes

b) Montrer que, si on note p_n et q_n les probabilités que la fourmi soit en A et ne soit pas en A au bout de $n \times 10$ s, alors les deux suites (p_n) et (q_n) sont définies par des relations de récurrence de type $u_n = \frac{2}{3}u_{n-1} + \frac{1}{3}u_{n-2}$. En déduire p_n pour $n \in \{4, 5, 6\}$.
Programmer la suite (p_n) et conjecturer sa limite.

c) Montrer que, si on note r_n la probabilité que la fourmi ne soit jamais passée par le sommet B durant les $n \times 10$ s premières secondes, alors la suite (r_n) est géométrique de raison à déterminer. Exprimer r_n en fonction de n et donner sa limite.



2) La fourmi se balade sur les arêtes d'une pyramide régulière à base carrée $EFGHS$ en partant du sommet E. On suppose, comme précédemment, qu'à chaque fois que la fourmi arrive à un sommet elle choisit au hasard la prochaine arête à parcourir parmi les trois ou quatre qui partent de ce sommet. On suppose également que la fourmi parcourt une arête en 10 s.

a) Montrer que la probabilité du chemin $EFESE$ est $\frac{1}{108}$

b) La fourmi parcourt deux arêtes. Quelle est la probabilité qu'elle arrive en E ? F ? G ? S ?

c) La fourmi parcourt trois arêtes. Quelle est la probabilité qu'elle arrive en S ?

d) Pour $n \geqslant 1$, on note p_n la probabilité d'arriver en S après n étapes.
Démontrer l'égalité $p_{n+1} = (1 - p_n) \times \frac{1}{3}$.
En posant $u_n = p_n - \frac{1}{4}$, montrer que $\forall n \geqslant 1, u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n$.
Exprimer alors u_n, puis p_n en fonction de n.
Quelle est la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 5.9 (Paradoxe)
Un sac contient deux boules pouvant être chacune blanche ou rouge. Selon Lewis Caroll, lorsqu'on ignore leur couleur, il y en a forcément une rouge et une blanche ! Pour expliquer ce paradoxe, il tient le raisonnement suivant :

1. On sait que si le sac contenait trois boules pouvant être de couleur rouge ou blanche, et si la probabilité de tirer une boule rouge était $\frac{2}{3}$, alors il contiendrait 2 rouges et 1 blanche.
2. En ajoutant virtuellement une boule rouge au sac contenant les deux boules, composé de façon équiprobable de l'une des paires suivantes $\{(R,R),(R,B),(B,B),(B,R)\}$, la composition finale du sac est alors $\{(R,R,R),(R,B,R),(B,B,R),(B,R,R)\}$. La probabilité de tirer une boule est alors de $1\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\times\frac{8}{3}=\frac{2}{3}$.
3. D'après le résultat rappelé au 1, il y a donc virtuellement deux boules rouges et une blanche dans le sac. Sans la boule rouge ajoutée il y a donc une boule rouge et une blanche.

Y a t-il une erreur dans ce raisonnement ? Si oui, où est elle ?

5.1.3 Variables aléatoires

Exercice 5.10 (Jeux de dés)
1) Jeu avec un dé :
On lance un dé et détermine le score de la façon suivante : si on obtient 6 la 1re fois, le score est de 3. Sinon on relance le dé et, si on obtient 6 la 2e fois, le score est de 2. Sinon on relance le dé et si on obtient 6 la 3e fois, le score est de 1. Sinon le score est de 0. Quelle est la loi de probabilité de la variable S qui représente le score à ce jeu ? Déterminer le score moyen.

2) Jeu avec trois dés :
C'est un jeu où l'on peut parier 1€ sur un entier compris entre 1 et 6. On lance alors 3 dés et, si le nombre sur lequel on a misé sort 1, 2 ou 3 fois, on nous rembourse notre mise plus 1€, 2€ ou 3€ ; sinon on perd notre mise. Déterminer le gain moyen de chaque partie.

Exercice 5.11 (Jeux de cartes)
1) Jeux avec quatre cartes :
On distribue aléatoirement deux cartes à une personne parmi les quatre cartes suivantes : as de pique, as de cœur, valet de trèfle, valet de carreau.

a) La personne annonce « j'ai un as ». Quelle est la probabilité qu'elle ait deux as ?
b) La personne annonce « j'ai l'as de pique ». Quelle est la probabilité qu'elle ait deux as ?

2) Jeu avec trois cartes :
Ce jeu se joue avec trois cartes de même format et de même couleur : sur la 1re il n'y a rien, sur une face de la 2e il n'y a un dessin et sur les deux faces de la 3e il y a le même dessin. Les cartes étant cachées dans un sac, on en tire une que l'on pose sur la table (une seule de ses faces est alors visible). Il faut deviner si la face cachée contient ou ne contient pas le dessin ? Si vous devinez correctement, vous gagnez 5€, sinon vous perdez 5€.
Déterminer la probabilité de gagner et l'espérance de gain en adoptant une des stratégies suivantes :

a) On tire à pile ou face le type de face annoncé.
b) On annonce systématiquement le même type que la face visible.
c) On annonce systématiquement le type opposé à celui de la face visible.

Exercice 5.12 (Sex ratio)
Les statistiques montrent qu'en France, il y a 105 naissances de garçons pour 100 naissances de filles. On dit alors que le *sex ratio* est de $\frac{105}{100} = 1,05$. En supposant que le sexe d'un nouveau-né n'est dû qu'au hasard, répondre aux questions suivantes.

a) Quelle est la probabilité de naissance d'une fille et d'un garçon en France ?

b) Une famille de quatre enfants est choisie au hasard. La variable aléatoire X désigne le nombre de filles dans cette famille. Déterminer la loi de X et calculer le nombre moyen de garçons.

c) Un couple opte pour la stratégie S qui consiste à avoir des filles jusqu'à la naissance d'un garçon. En supposant qu'il peut avoir un nombre entier n quelconque de filles, déterminer la loi de probabilité de la variable XS qui compte le nombre de filles parmi les enfants du couple. En supposant que tous les couples optent pour la stratégie S, quel serait le nombre moyen d'enfants par couple et quelle serait la proportion des garçons et des filles dans la génération des enfants. On répondra à cette question au moyen d'un algorithme qui simule la constitution de N familles selon la stratégie S (prendre $N = 10\ 000$).

d) La stratégie S n'étant pas très réaliste, refaire l'étude algorithmique précédente en limitant le nombre d'enfants à 2. Vérifier le résultat obtenu en déterminant les valeurs théoriques par le calcul.

Exercice 5.13 (Désintégration)
Un noyau atomique radioactif est instable. Sa probabilité de désintégration dans une unité de temps est $p = 0,07$. On l'observe pendant n unités de temps en se demandant quel est le temps moyen d'attente avant la désintégration. On note T_n la variable aléatoire donnant le temps d'attente de la désintégration du noyau s'il se désintègre avant n unités de temps et prenant la valeur 0 sinon.

a) On prend $n = 200$. Simuler le comportement du noyau jusqu'à sa désintégration à l'aide d'un programme (générer un nombre aléatoire de $[0;1[$ à chaque unité de temps et tester si celui-ci est inférieur à p) qui affiche la valeur prise par T_{200}. Relever une dizaine de ces temps d'attente. Commenter.

b) Adapter le programme précédent pour qu'il recommence $N = 100$ fois l'observation et calcule la moyenne de ces 100 temps d'attente. Noter quelques-unes de ces moyennes. Commenter.

c) Modélisation : déterminer $P(T_n = k)$ pour tout entier $0 < k \leqslant n$ (on complète la série avec $P(T_n = 0) = (1-p)^n$). Exprimer $E(T_n)$ en fonction de n à l'aide du symbole $\sum$ puis montrer que $E(T_n) = pf'(1-p)$ où f est la fonction définie sur $]0;1[$ par $f(x) = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n$. Exprimer $f(x)$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes et en déduire une autre expression de $f'(x)$. Montrer alors que $E(T_n) = \frac{1}{p}\left[1-(1+np)(1-p)^n\right]$. Conjecturer la limite de $E(T_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

5.1.4 Probabilités conditionnelles

Exercice 5.14 (Les boules)
Une urne contient 5 boules rouges identiques et 3 boules noires identiques. On effectue des tirages de deux boules sans remise.

1. Quelle est la probabilité que la première soit rouge et la deuxième noire ?
2. Quelle est la probabilité que l'une des deux boules au moins soit rouge ?
3. Si une des deux boules au moins est rouge, quelle est la probabilité que l'autre soit noire ?

Exercice 5.15 (Souris)
Dans un laboratoire, on a fait les constats suivants :

- Si une souris porte l'anticorps A alors 2 fois sur 5 elle porte aussi l'anticorps B
- Si une souris ne porte pas l'anticorps A alors 4 fois sur 5 elle ne porte pas l'anticorps B

La moitié de la population porte l'anticorps A. Calculer la probabilité des évènements suivants :

1. Si une souris porte l'anticorps B alors elle porte aussi l'anticorps A.
2. Si une souris ne porte pas l'anticorps B alors elle ne porte pas l'anticorps A.

Exercice 5.16 (Tennis)
Dans une association sportive un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30% des membres de cette association adhèrent à la section tennis. On choisit au hasard un membre de cette association et on note :

- F l'évènement « le membre choisi est une femme »
- T l'évènement « le membre choisi adhère à la section tennis »

1. Déterminer la probabilité de l'évènement F.
2. Si on choisit un membre de la section tennis quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

Exercice 5.17 (Antispam)
Pour savoir si un e-mail est indésirable, on lui fait passer un test.

On note T l'évènement « le test est positif » et S l'évènement « le mail est un spam » (un mail indésirable). Les probabilités connues, relativement à T et à S, sont données dans le tableau ci-contre que l'on complètera.

	S	$\overline{\text{S}}$	total
T	0,23		
$\overline{\text{T}}$		0,73	
total	0,25		

1. Quelle est la probabilité $P_S(\overline{T})$ que le test soit négatif sachant que le mail est un spam ? Quelle est la probabilité $P_{\overline{S}}(T)$ que le test soit positif sachant que le mail n'est pas un spam ?
2. Quelle est la probabilité pour que le test ne donne pas un résultat fiable ?
3. Si on applique ce test sur dix mails indépendamment les uns des autres et sans savoir si ce sont des spams ou pas, quelle est la probabilité qu'aucun test ne soit positif ?

Exercice 5.18 (Test biologique)
On dispose d'un test pour détecter une maladie présente dans la population avec une fréquence q. Avec ce test, la probabilité d'obtenir un résultat positif sur une personne malade est p_1 tandis que la probabilité d'obtenir un résultat négatif sur une personne saine est p_2. Les probabilités q, p_1 et p_2 sont respectivement appelées « prévalence de la maladie », « sensibilité du test » et « spécificité du test ».

1. Dresser l'arbre des probabilités de la situation. En déduire la probabilité $P(pos)$ d'avoir un résultat positif et la probabilité $P(neg)$ d'avoir un résultat négatif.
2. Déterminer les probabilités suivantes :
   - p_3 qu'ayant obtenu un résultat positif on soit sain (« faux positif »)
   - p_4 qu'ayant obtenu un résultat négatif on soit malade (« faux négatif »)
   - p_5 qu'ayant obtenu un résultat positif on soit malade (« Valeur Prédictive Positive »)
   - p_6 qu'ayant obtenu un résultat négatif on soit sain (« Valeur Prédictive Négative »)
3. Lorsque le test a été adopté, les probabilités p_1 et p_2 ne varient plus.
   Étudier p_5 et p_6 comme des fonctions de la seule variable q.
   Montrer en particulier que, sur $[0; 1]$, p_5 est croissante alors que p_6 est décroissante.
   Appliquer ces résultats aux valeurs du test PCR Covid-19 : $0,53 < p_1 < 0,83$ et $p_2 = 0,99$ et les comparer aux performances des tests antigéniques : $0,4 < p_1 < 0,6$ et $p_2 = 0,99$.