

4.1 Corrections

4.1.1 Majoration, minoration, comparaison, variations

CORRECTION DE L'EXERCICE 4.1 (ENCADREMENTS)

1. On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1$.

Par conséquent, on a $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \iff 1 \leq 1 + \sin^2 x \leq 2$.

La fonction inverse étant décroissante sur $]0; +\infty[$, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{1} \geq \frac{1}{1+\sin^2 x} \geq \frac{1}{2}$.

Cela montre que $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$. La fonction f est minorée par $\frac{1}{2}$ et majorée par 1.

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \iff 1 + x^2 \geq 1$.

La fonction inverse étant décroissante et positive sur $]0; +\infty[$, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$.

La fonction $F : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est majorée par 1 et minorée par 0.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < F(x) \leq 1 \iff 1 < 1 + F(x) \leq 2$.

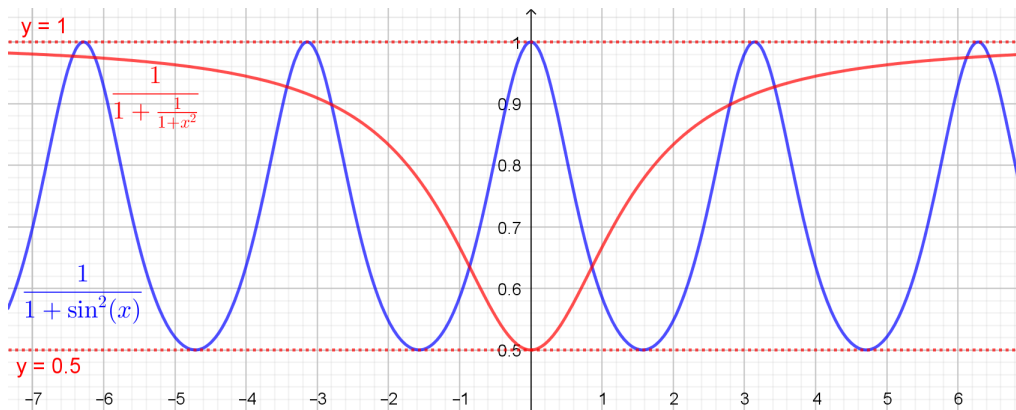
En passant à l'inverse $\forall x \in \mathbb{R}, 1 > \frac{1}{1+F(x)} \geq \frac{1}{2} \iff 1 > g(x) \geq \frac{1}{2}$.

La fonction g est donc bornée mais elle n'atteint jamais son plus petit majorant 1, la courbe de g étant toujours en-dessous de son asymptote, la droite d'équation $y = 1$.

Les paramètres de la fenêtre d'affichage du graphique ci-dessous sont

$$xmin = -5; xmax = 5; xstep = 1; ymin = 0,5; ymax = 1; ystep = 0,1$$

(bien sûr, il y a d'autres possibilités pour visualiser les bornes de f et g).



2. a) Montrons que $\forall x > 0, x + \frac{1}{2} < h(x) < x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x} \iff 0 < h(x) - (x + \frac{1}{2}) < \frac{1}{2x}$.

Rappel : La quantité conjuguée de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Son intérêt tient dans l'égalité $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$ (identité remarquable) et aussi, au fait que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est positif tant que a et b le sont. On définit de même, la quantité conjuguée de $\sqrt{a} - b$ qui est $\sqrt{a} + b$.

En faisant appel à la quantité conjuguée de $h(x) - (x + \frac{1}{2})$, on a $h(x) - (x + \frac{1}{2}) = \frac{(h(x))^2 - (x + \frac{1}{2})^2}{h(x) + (x + \frac{1}{2})}$.

Le numérateur de cette fraction vaut $(\sqrt{1+x+x^2})^2 - (x + \frac{1}{2})^2 = 1 + x + x^2 - (x^2 + x + \frac{1}{4}) = \frac{3}{4}$.

Le dénominateur est $\sqrt{1+x+x^2} + (x + \frac{1}{2})$, une somme de deux nombres positifs : le premier est supérieur à x car $\forall x > 0, 1 + x + x^2 > x^2$ et, la fonction racine étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{1+x+x^2} > \sqrt{x^2} = x$; le second $x + \frac{1}{2}$ est aussi supérieur à x . Le dénominateur $D > 2x$; son inverse $0 < \frac{1}{D} < \frac{1}{2x}$ (l'inverse d'un nombre positif est positif). Finalement $0 < h(x) - (x + \frac{1}{2}) < \frac{3}{4} \times \frac{1}{2x} < \frac{1}{2x}$, ce que l'on devait démontrer.

Une autre méthode, plus directe, prouve séparément les deux inégalités de l'encadrement :

- ♦ $\sqrt{1+x+x^2} = \sqrt{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$ (forme canonique du trinôme sous le radical) or, comme $(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > (x + \frac{1}{2})^2$ et que la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} > \sqrt{(x + \frac{1}{2})^2} = x + \frac{1}{2}$ (car $\sqrt{a^2} = a, \forall a \geq 0$). Cela justifie donc $x + \frac{1}{2} < h(x)$.
- ♦ $(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x})^2 = x^2 + x + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2}$. Comme $x^2 + x + 1 < x^2 + x + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2}$ (car $\frac{1}{4} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} > 0$ puisque les 3 termes sont positifs), en appliquant la fonction racine, croissante sur $\mathbb{R}^+$, on obtient $\sqrt{x^2 + x + 1} < \sqrt{(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x})^2} = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x}$ ce qui justifie $h(x) < x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x}$.

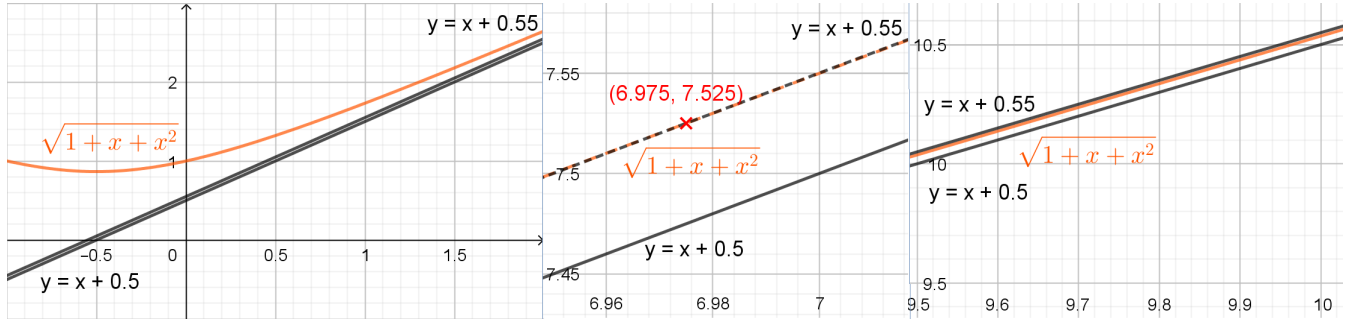
b) Pour $x \geq 10 \iff 2x \geq 20$ on a, en passant à l'inverse, $\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{20}$ et donc $\forall x \geq 10, y = x + \frac{1}{2} \leq h(x) \leq x + \frac{1}{2} + \frac{1}{20}$, ce qui montre que la courbe de h est contenue dans $\mathcal{D}$.

Les paramètres de la fenêtre d'affichage du graphique sont difficiles à fixer. Pour visualiser l'allure générale de la courbe (à gauche), on peut prendre les valeurs suivantes qui permettent tout de même de différencier les deux droites.

$$xmin = -1; xmax = 2; xstep = 0,1; ymin = -1; ymax = 3; ystep = 0,2$$

Pour observer la courbe dans la bande $\mathcal{D}$ (à droite), il faut augmenter x et fortement zoomer.

$$xmin = 9,5; xmax = 10,1; xstep = 0,05; ymin = 9,5; ymax = 10,5; ystep = 0,1$$



En me situant aux alentours de 10, je m'aperçois qu'on est déjà dans la bande depuis un moment. Pour quelle valeur de x entre-t-on dans $\mathcal{D}$?

$$\begin{aligned} h(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{20} &\iff \frac{3}{4\left(\sqrt{1+x+x^2} + \left(x + \frac{1}{2}\right)\right)} = \frac{1}{20} \\ &\iff 15 - \left(x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{1+x+x^2} \\ &\iff \left(\frac{29}{2} - x\right)^2 = 1 + x + x^2 \text{ j'ai élevé au carré des nombres positifs} \\ &\iff \left(\frac{29}{2}\right)^2 - 1 = \frac{837}{4} = 30x \iff x = \frac{279}{40} = 6,975 \end{aligned}$$

On peut observer cette valeur en zoomant sur la zone de l'intersection (au centre, en rouge) mais j'ai dû employer des tirets pour distinguer à cette échelle la courbe de la droite.

CORRECTION DE L'EXERCICE 4.2 (MINORATION)

1. Le taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2 , deux valeurs différentes de $]0; +\infty[$ est :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 + \frac{1}{x_1} - \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 - x_2 + \frac{x_2}{x_1 x_2} - \frac{x_1}{x_1 x_2}}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{x_1 - x_2 + \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2) \left(1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right)}{x_1 - x_2} \\ &= 1 - \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2} \text{ j'ai simplifié par } x_1 - x_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Comme le dénominateur est positifs (produit de deux nombres positifs), τ est du signe de $x_1 x_2 - 1$.

Il faut donc distinguer les deux cas :

- Si $x_1 \leq 1$ et $x_2 \leq 1$ alors $x_1 x_2 \leq 1 \iff \tau \leq 0$, f est décroissante sur $]0; 1]$
- Si $x_1 \geq 1$ et $x_2 \geq 1$ alors $x_1 x_2 \geq 1 \iff \tau \geq 0$, f est croissante sur $[1; +\infty[$

f décroît puis croît, elle passe donc par un minimum, atteint pour $x = 1$ et égal à $f(1) = 2$.

Le tableau des variations de f résume ces informations :

x	0	1	$+\infty$
$1 + \frac{1}{x}$	$+\infty$	2	$+\infty$

2. Application :

Regroupons autrement les termes de la somme :

$$\begin{aligned} \frac{a}{h} + \frac{b}{g} + \frac{c}{f} + \frac{d}{e} + \frac{e}{d} + \frac{f}{c} + \frac{g}{b} + \frac{h}{a} &= \left(\frac{a}{h} + \frac{h}{a}\right) + \left(\frac{b}{g} + \frac{g}{b}\right) + \left(\frac{c}{f} + \frac{f}{c}\right) + \left(\frac{d}{e} + \frac{e}{d}\right) \\ &= f\left(\frac{a}{h}\right) + f\left(\frac{b}{g}\right) + f\left(\frac{c}{f}\right) + f\left(\frac{d}{e}\right) \end{aligned}$$

Quelques soient donc les réels positifs a, b, c, d, e, f, g et h , d'après les conclusions de la question précédente, les quatre termes sont minorés par 2. Leur somme l'est donc par $4 \times 2 = 8$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 4.3 (OLYMPIADES)

Question des Olympiades : comparer les nombres $A = \frac{1,000000004}{1,000000006^2}$ et $B = \frac{0,999999995^2}{0,999999998}$

1. Utilisons la calculatrice.

En réglant ma Numworks sur la précision maximum (elle affiche alors 14 chiffres significatifs), j'obtiens les résultats suivants :

$$\frac{1,000000004}{1,000000006^2} = 0,999999992 \text{ et } \frac{0,999999995^2}{0,999999998} = 0,999999992$$

Dois-je en déduire que $A = B$?

Ces deux nombres ont les mêmes premières décimales, mais rien ne permet de se prononcer : on pourrait aussi bien avoir $A < B$ ou $A > B$. On ne peut rien déduire de ce résultat.

Avec les valeurs d'origine des années 80, mais avec une Numworks des années 2020, on obtient :

$$\frac{1,000004}{1,000006^2} = 0,99999200006 \text{ et } \frac{0,999995^2}{0,999998} = 0,99999200009$$

La précision de ma calculatrice d'aujourd'hui dépasse celle que présuppose les auteurs de la question, ce qui fait qu'une petite différence entre les deux nombres est détectée et il semble qu'on puisse conclure ici que $A > B$.

$$2. A(10^{-9}) = \frac{1+4 \times 10^{-9}}{(1+6 \times 10^{-9})^2} = \frac{1,000000004}{1,000000006^2} = A \text{ et } B(10^{-9}) = \frac{(1-5 \times 10^{-9})^2}{1-2 \times 10^{-9}} = \frac{0,999999995^2}{0,999999998} = B.$$

Pour comparer les fonctions A et B , calculons :

$$\begin{aligned} A(x) - B(x) &= \frac{1+4x}{(1+6x)^2} - \frac{(1-5x)^2}{1-2x} = \frac{(1+4x)(1-2x) - (1-5x)^2(1+6x)^2}{(1+6x)^2(1-2x)} \\ &= \frac{(1+4x-2x-8x^2) - (1-5x+6x-30x^2)^2}{(1+6x)^2(1-2x)} = \frac{(1+2x-8x^2) - (1+x-30x^2)^2}{(1+6x)^2(1-2x)} \\ &= \frac{(1+2x-8x^2) - (1+2x-59x^2-60x^3+900x^4)}{(1+6x)^2(1-2x)} \\ &= \frac{1+2x-8x^2-1-2x+59x^2+60x^3-900x^4}{(1+6x)^2(1-2x)} = \frac{3x^2(17+20x-300x^2)}{(1+6x)^2(1-2x)} \end{aligned}$$

Comme, pour tout $x \in [0; \frac{1}{2}]$, on a $0 < 1-2x < 1$ et donc $\frac{3x^2}{(1+6x)^2(1-2x)} > 0$, $A(x) - B(x)$ est du signe du trinôme $17+20x-300x^2$. Le discriminant étant $\Delta = 400 + 20400 = 20800 > 0$, le trinôme est positif entre les deux racines $x = \frac{-20 \pm \sqrt{20800}}{-600} = \frac{1 \pm 2\sqrt{13}}{30}$.

Ces racines sont de signes opposés, la racine positive étant $a = \frac{1+2\sqrt{13}}{30} \approx 0,2737$.

Ainsi, pour $x \in]0; a]$ on a $A(x) - B(x) > 0 \iff A(x) > B(x)$.

En prenant $x = 10^{-7}$ ou $x = 10^{-8}$ (ou même $x = 10^{-9}$), on se situe dans l'intervalle $]0; a]$ et donc on a $A(x) > B(x)$. La différence est de plus en plus ténue au fur et à mesure que x s'approche de 0 (la limite de $A(x) - B(x)$ est nulle en 0) et donc elle est de moins en moins détectable avec la calculatrice, d'où la première question. Notez qu'aux Olympiades on ne donne pas d'indice, l'introduction des fonctions A et B est une bonne idée puisqu'elle aboutit. Il peut y avoir d'autres manières de traiter la question.

CORRECTION DE L'EXERCICE 4.4 (TANGENTE)

1. Calculons $f(x) - g(x) = \frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{1+x^2}-x^2-2}{2x}$ Pour $x \in]0; +\infty[$ cette expression est du signe du numérateur $2\sqrt{1+x^2}-x^2-2$.

Résolvons l'inéquation $2\sqrt{1+x^2}-x^2-2 \geq 0 \iff 2\sqrt{1+x^2} \geq x^2+2$ qui, comme $x^2+2 \geq 0$ et

$1 + x^2 \geq 0$ est équivalente à :

$$\left(2\sqrt{1+x^2}\right)^2 \geq (x^2+2)^2 \iff 4(1+x^2) \geq x^4+4x^2+4 \iff 0 \geq x^4$$

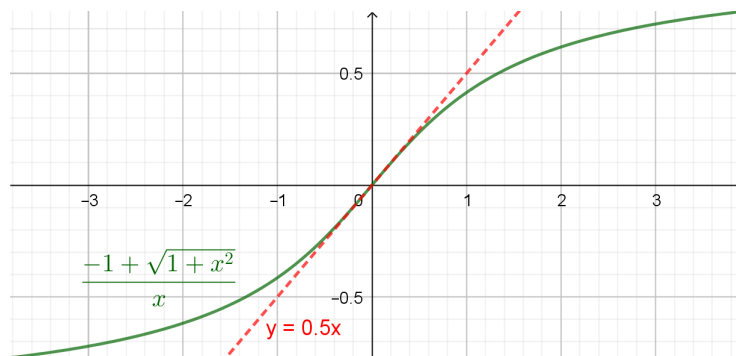
Cette dernière inégalité étant toujours fautive lorsque $x > 0$, on peut conclure que $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) - g(x) < 0 \iff f(x) < g(x)$.

2. La fonction f n'est pas définie en 0. Elle est définie sur $\mathcal{D} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, un intervalle centré sur 0 et elle vérifie la propriété $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = -f(x)$. En effet, $f(-x) = \frac{-1+\sqrt{1+(-x)^2}}{-x} = -\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x} = -f(x)$. Cette fonction est donc impaire et sa courbe, $\mathcal{C}_f$, admet l'origine comme centre de symétrie.

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est impaire aussi, donc sa courbe, $\mathcal{C}_g$, admet l'origine comme centre de symétrie.

La disposition $\mathcal{C}_f$ au-dessous de $\mathcal{C}_g$ pour $x > 0$ est inversée pour $x < 0$, par symétrie par rapport à l'origine : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $] -\infty; 0[$.

3. C'est un peu gênant d'affirmer que la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$ est tangente en 0 à la courbe de f puisque la fonction f n'est pas définie en 0. Si on faisait un « prolongement par continuité » de la fonction f en posant $f(0) = 0$, alors on pourrait affirmer cela plus sereinement. Toujours est-il que la droite ne rencontre jamais la courbe, et pourtant elle la traverse ! Le graphique montre ce comportement général (l'absence de contact et le positionnement des deux courbes pour $x \neq 0$) mais ne peut montrer cette invisible rupture de continuité de f en 0.

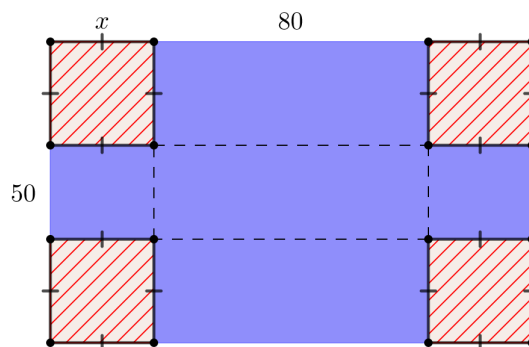


CORRECTION DE L'EXERCICE 4.5 (PATRON DE BOÎTE)

1. Le patron est dessiné ci-dessous. Comme on ne peut pas retirer davantage que 25 cm, la feuille n'ayant que 50 cm de large, le domaine de définition de $\mathcal{V}$ est l'intervalle $[0; 25]$.

Les dimensions de la boîte sont $50 - 2x$, $80 - 2x$ et x d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(x) &= x(50 - 2x)(80 - 2x) = 4x(25 - x)(40 - x) \\ &= 4x(x^2 - 65x + 1000) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x \end{aligned}$$



2. Calculons :

$$\mathcal{V}(x) - \mathcal{V}(x_0) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x - (4x_0^3 - 260x_0^2 + 4000x_0) = 4(x^3 - x_0^3) - 260(x^2 - x_0^2) + 4000(x - x_0).$$

Or sait factoriser $x^2 - x_0^2 = (x - x_0)(x + x_0)$ et $x^3 - x_0^3 = (x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)$.

On obtient $\mathcal{V}(x) - \mathcal{V}(x_0) = 4(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2) - 260(x - x_0)(x + x_0) + 4000(x - x_0)$

On peut donc mettre $x - x_0$ en facteur :

$$\mathcal{V}(x) - \mathcal{V}(x_0) = (x - x_0) (4(x^2 + xx_0 + x_0^2) - 260(x + x_0) + 4000).$$

On a donc bien $\mathcal{V}(x) - \mathcal{V}(x_0) = (x - x_0)P(x)$ avec $P(x) = (4(x^2 + xx_0 + x_0^2) - 260(x + x_0) + 4000) = 4x^2 + (4x_0 - 260)x + (4x_0^2 - 260x_0 + 4000)$.

3. Un argument pour le maximum :

Comme $\mathcal{V}(0) = 0$ (la hauteur de la boîte est nulle pour $x = 0$) et $\mathcal{V}(25) = 0$ (la largeur $50 - 2x$ de la boîte est nulle pour $x = 25$), et comme le volume est positif entre 0 et 25, on est forcé d'admettre que celui-ci doit nécessairement croître puis décroître et, par conséquent, admettre une valeur maximum pour une certaine valeur de x située entre 0 et 25 qu'il reste à déterminer.

4. Supposons que le maximum est atteint pour la valeur x_0 .

Cela signifie que $\forall x \in]0; 25[, \mathcal{V}(x) \leq \mathcal{V}(x_0) \iff \mathcal{V}(x) - \mathcal{V}(x_0) \leq 0$.

- ♦ $\forall x < x_0 \iff x - x_0 < 0$, d'après la règle des signes on doit donc avoir $P(x) > 0$
- ♦ $\forall x > x_0 \iff x - x_0 > 0$, d'après la règle des signes on doit donc avoir $P(x) < 0$

Le polynôme du second degré P passe d'une valeur positive à une valeur négative quand x passe par x_0 , c'est donc qu'il s'annule pour $x = x_0$.

On a donc $P(x_0) = 4x_0^2 + (4x_0 - 260)x_0 + (4x_0^2 - 260x_0 + 4000) = 0$.

x_0 est alors la solution contenue dans $]0; 25[$ de l'équation $4x^2 + (4x - 260)x + (4x^2 - 260x + 4000) = 0 \iff 12x^2 - 520x + 4000 = 0 \iff 3x^2 - 130x + 1000 = 0$. Les solutions de cette équation étant $\frac{130 \pm \sqrt{4900}}{6} = \frac{65 \pm 35}{3}$.

La solution qui convient est donc $x_0 = \frac{65-35}{3} = \frac{30}{3} = 10$ (l'autre solution dépasse 25).

Comme le polynôme P s'annule en x_0 , d'après la propriété 1.7 du cours, on peut écrire $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ où Q est un polynôme de degré 1 (car P est de degré 2) qu'on écrit $Q(x) = ax + b$.

$$P(x) = 4x^2 + (4x_0 - 260)x + (4x_0^2 - 260x_0 + 4000) = (x - x_0)(ax + b) = ax^2 + (b - ax_0)x + (-bx_0).$$

$$\text{Par identification, les coefficients } a \text{ et } b \text{ vérifient } \begin{cases} a = 4 \\ b - ax_0 = 4x_0 - 260 \\ -bx_0 = 4x_0^2 - 260x_0 + 4000 \end{cases}$$

Des deux premières égalités, on déduit que $b = 8x_0 - 260$, soit avec $x_0 = 10$, $b = 80 - 260 = -180$.

Résumons ce qu'on vient d'obtenir :

$$P(x) = (x - 10)(4x - 180) \text{ et donc } \mathcal{V}(x) - \mathcal{V}(10) = (x - 10)^2(4x - 180).$$

Le signe de $4x - 180$ lorsque $x \in]0; 25[$ est négatif car alors $-180 < 4x - 180 < -80$. On a donc bien $\mathcal{V}(x) - \mathcal{V}(10) < 0 \iff \mathcal{V}(x) < \mathcal{V}(10)$ pour tout réel x de $]0; 25[$, ce qui achève la démonstration.

Remarque :

La méthode de Fermat vue au chapitre 1 est plus expéditive. En écrivant $\mathcal{V}(x_0 + h) = \mathcal{V}(x_0) \iff 4(x_0 + h)^3 - 260(x_0 + h)^2 + 4000(x_0 + h) = 4x_0^3 - 260x_0^2 + 4000x_0$,

on obtient : $4(3hx_0^2 + 3h^2x_0 + h^3) - 260(2hx_0 + h^2) + 4000h = 0$

On simplifie cette égalité par $h \neq 0$, ce qui donne $4(3x_0^2 + 3hx_0 + h^2) - 260(2x_0 + h) + 4000 = 0$.

Et là, audace du mathématicien toulousain, on prend $h = 0$. Il reste $12x_0^2 - 520x_0 + 4000 = 0$, ce qui conduit à l'abscisse du maximum $x_0 = 10$ (l'autre solution $\frac{100}{3}$ est l'abscisse du minimum de la fonction sur $\mathbb{R}$ mais elle sort du domaine).

La méthode de la dérivée est encore plus rapide car elle donne tout de suite le polynôme à annuler $\mathcal{V}'(x) = 12x^2 - 520x + 4000$ pour obtenir l'abscisse du maximum de $\mathcal{V}$.

4.1.2 Fonctions de référence

CORRECTION DE L'EXERCICE 4.6 (PORTÉE D'UN PHARE)

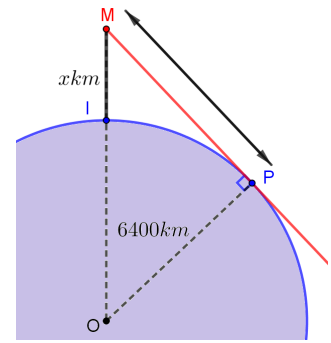
Dans le schéma ci-contre, j'ai noté un angle droit en P car la tangente à un cercle est toujours perpendiculaire au rayon correspondant. J'ai noté O le centre de la Terre.

Dans le triangle MOP rectangle en P , d'après le théorème de Pythagore, on a $MP^2 = MO^2 - OP^2 = (MI + IO)^2 - OP^2 = (x + R)^2 - R^2$ où R est le rayon de la Terre. En prenant $R = 6400$, on obtient donc $MP = \sqrt{(x + 6400)^2 - 6400^2}$ (x est alors exprimé en km).

Simplifions l'expression $\sqrt{(6400 + x)^2 - 6400^2} = \sqrt{x(12800 + x)}$.

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x(12800 + x)}$ est définie pour $x \geq 0$.

Elle est composée de la fonction trinôme $x \mapsto x(12800 + x)$ qui est croissante et de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est aussi croissante. La composée de fonctions de même monotonie étant croissante, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.



En l'absence de ce théorème sur les fonctions composées de même monotonie, on peut toujours étudier le signe du taux de variation. Comme dans l'exercice 4.1.2.a, je vais utiliser la quantité conjuguée puisqu'il y a une différence de racines carrées au numérateur. Pour simplifier, je note $d = 12800$ le diamètre de la Terre :

$$\begin{aligned} \tau(x_1, x_2) &= \frac{\sqrt{x_1(d + x_1)} - \sqrt{x_2(d + x_2)}}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{(\sqrt{x_1(d + x_1)} - \sqrt{x_2(d + x_2)}) (\sqrt{x_1(d + x_1)} + \sqrt{x_2(d + x_2)})}{(x_1 - x_2) (\sqrt{x_1(d + x_1)} + \sqrt{x_2(d + x_2)})} \\ &= \frac{(\sqrt{x_1(d + x_1)})^2 - (\sqrt{x_2(d + x_2)})^2}{(x_1 - x_2) (\sqrt{x_1(d + x_1)} + \sqrt{x_2(d + x_2)})} \\ &= \frac{x_1(d + x_1) - x_2(d + x_2)}{(x_1 - x_2) (\sqrt{x_1(d + x_1)} + \sqrt{x_2(d + x_2)})} \\ &= \frac{d(x_1 - x_2) + (x_1^2 - x_2^2)}{(x_1 - x_2) (\sqrt{x_1(d + x_1)} + \sqrt{x_2(d + x_2)})} \\ &= \frac{(x_1 - x_2)(d + x_1 + x_2)}{(x_1 - x_2) (\sqrt{x_1(d + x_1)} + \sqrt{x_2(d + x_2)})} \\ &= \frac{d + x_1 + x_2}{\sqrt{x_1(d + x_1)} + \sqrt{x_2(d + x_2)}} \end{aligned}$$

On peut alors observer que le numérateur et le dénominateur sont des nombres positifs d'où le sens de variation de la fonction : elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Plus on monte haut, plus on voit loin derrière l'horizon.

Application : L'éclat du phare de l'Île Vierge se voit, en théorie, jusqu'à une distance $d = \sqrt{(0,084 + 6400)^2 + 6400^2} \approx 32,8 \text{ km}$. En réalité, la lumière de ce phare est visible de beaucoup plus loin, d'une part parce que l'observateur a rarement ses yeux au niveau de la mer. D'autre part, la variation de la densité atmosphérique entraîne une réfraction des rayons lumineux qui allonge leur portée. Habituellement, on multiplie la portée par un coefficient égal à 2,08 pour tenir compte de cet effet (cela amène notre portée théorique à 68 km). D'autres facteurs limitent la portée : la transparence de l'air qui est rarement parfaite et la puissance du phare qui va rarement permettre de l'apercevoir jusqu'à la limite théorique. Le phare de l'Île Vierge est donné pour avoir une portée de 27 miles, soit 50 km environ.



CORRECTION DE L'EXERCICE 4.7 (DEVINETTE)

On sait que f est une fonction associée à $x \mapsto \sqrt{x}$ ($f(x) = a\sqrt{x + b} + c$) et on remarque qu'elle décroît ($f(0) > f(10) > f(27)$). On devine donc que $a < 0$. De plus, $f(0)$ étant défini, on doit avoir $b > 0$.

Comme $f(0) = a\sqrt{b} + c = 4 \iff a\sqrt{b} = -c + 4 < 0$ (car $a < 0$) on a $c > 4$.

Ceci dit, écrivons les équations que doivent vérifier les nombres a, b, c :

- ♦ $f(0) = a\sqrt{b} + c = 4 \iff a\sqrt{b} = -c + 4$
- ♦ $f(10) = a\sqrt{10+b} + c = 2 \iff a\sqrt{10+b} = -c + 2$
- ♦ $f(27) = a\sqrt{27+b} + c = 0 \iff a\sqrt{27+b} = -c$

En élevant toutes ces égalités au carré, on obtient le système :

$$\begin{cases} a^2b = (-c+4)^2 \\ a^2(10+b) = (-c+2)^2 \\ a^2(27+b) = c^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2b = (-c+4)^2 \\ a^2(10+b) = (-c+2)^2 \\ a^2(27+b) = c^2 \end{cases}$$

De la dernière égalité, je tire $b = \frac{c^2}{a^2} - 27$ et je remplace b par cette valeur dans les deux premières :

$$\begin{cases} a^2 \left(\frac{c^2}{a^2} - 27 \right) = (4-c)^2 \\ a^2 \left(\frac{c^2}{a^2} - 17 \right) = (2-c)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} c^2 - 27a^2 = (4-c)^2 \\ c^2 - 17a^2 = (2-c)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} -27a^2 = 16 - 8c \\ -17a^2 = 4 - 4c \end{cases}$$

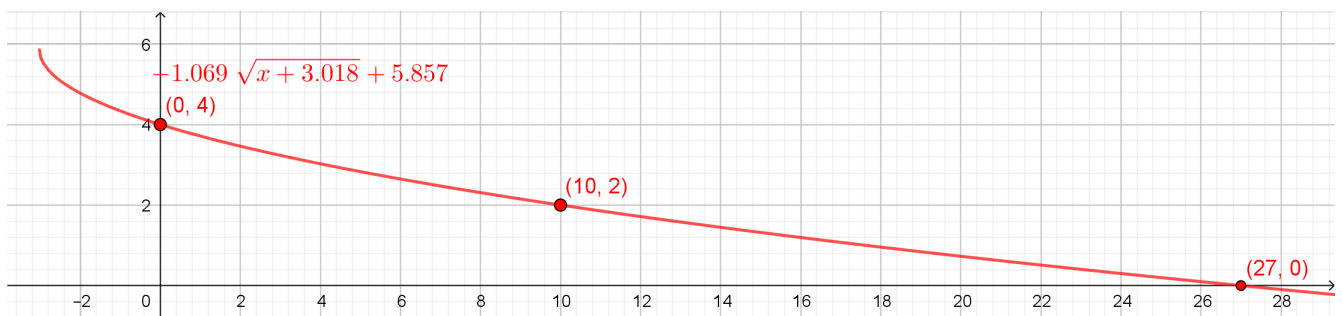
En enlevant deux fois la 2^e égalité de la 1^{re}, je trouve $7a^2 = 8$ d'où $a = -\sqrt{\frac{8}{7}} \approx -1,069$.

J'en déduis que $c = \frac{b+17a^2}{4} = \frac{41}{7} \approx 5,857$ et $b = \frac{c^2}{a^2} - 27 = \frac{169}{56} \approx 3,018$.

Conclusion : $f(x) = -\sqrt{\frac{8}{7}}\sqrt{x + \frac{169}{56}} + \frac{41}{7}$.

Ci-dessous, je trace la courbe d'équation $y = f(x)$ avec l'expression trouvée.

Je constate qu'elle passe bien par les points de coordonnées $(0; 4)$, $(10; 2)$ et $(27; 0)$.



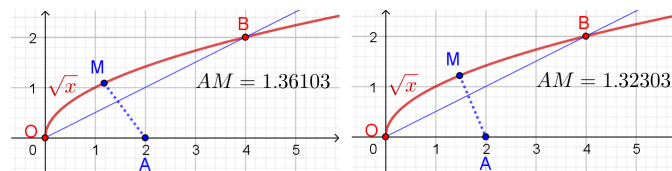
CORRECTION DE L'EXERCICE 4.8 (DISTANCES)

1. Le point M d'abscisse x se déplace sur la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \sqrt{x}$.

La distance AM est égale à $\sqrt{(\sqrt{x})^2 + (2-x)^2} = \sqrt{x + x^2 - 4x + 4} = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$.

Le trinôme $g(x) = x^2 - 3x + 4 = (x - \frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 + 4 = (x - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4}$ est décroissant sur $] -\infty; \frac{3}{2}]$ et croissant sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$. Son minimum est atteint pour $x = x_0 = \frac{3}{2}$, et vaut $\frac{7}{4}$.

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, la composée $f \circ g$ est, comme g , décroissante puis croissante, son minimum étant atteint pour $x = x_0 = \frac{3}{2}$, et vaut $\sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1,3228756555$ (la valeur trouvée en tâtonnant sur GeoGebra est légèrement supérieure à cette valeur).



2. Le point N de la droite (BO) a la même abscisse x que M sur la courbe $\mathcal{C}$. La droite (MN) est donc parallèle à l'axe (Oy) . La droite (BO) a pour équation $y = \frac{x}{2}$, le point N a donc pour coordonnées $(x; \frac{x}{2})$ et la distance MN s'écrit :

$MN = \sqrt{(\sqrt{x} - \frac{x}{2})^2} = \sqrt{x} - \frac{x}{2}$, du moins tant que M est situé entre O et B .

L'expérimentation sur GeoGebra permet de conjecturer que le maximum est $\frac{1}{2}$ atteint pour $x_1 = 1$.

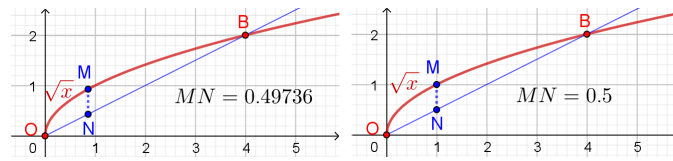
Montrons que $\forall x \in [0; 4], \sqrt{x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \leq 0$, ce qui prouverait bien que $MN - \frac{1}{2} \leq 0 \iff MN \leq \frac{1}{2}$.

Il nous faut donc résoudre l'inéquation $\sqrt{x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \leq 0 \iff 2\sqrt{x} \leq x + 1$.

Puisque les deux membres de la dernière inégalité sont définis et positifs, élevons celle-ci au carré.

On obtient $4x \leq (x+1)^2 \iff x^2 - 2x + 1 \geq 0 \iff (x-1)^2 \geq 0$.

Cette inégalité étant vérifiée pour tout $x \in [0; 4]$, on a bien $MN \leq \frac{1}{2}$, avec l'égalité pour $x_1 = 1$.

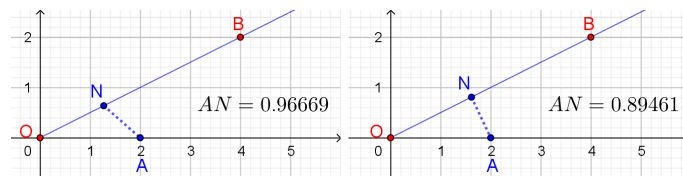


3. Le point N d'abscisse x se déplace sur la droite (BO) et on s'intéresse à la distance AN . Il n'est plus question de la courbe de la fonction racine carrée ici, cette distance s'écrit $AN = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (2-x)^2} =$

$$\sqrt{\frac{5x^2}{4} - 4x + 4}.$$

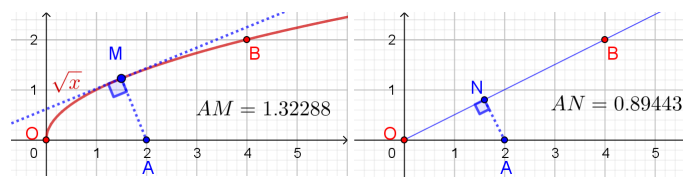
Le trinôme $h(x) = \frac{5x^2}{4} - 4x + 4 = \frac{5}{4} \left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}$ (je passe sur les détails du calcul) est décroissant sur $] -\infty; \frac{8}{5}]$ et croissant sur $[\frac{8}{5}; +\infty[$. Son minimum est atteint pour $x = x_2 = \frac{8}{5}$, et vaut $\frac{4}{5}$.

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, la composée $f \circ h$ est, comme h , décroissante puis croissante, son minimum étant atteint pour $x = x_2 = \frac{8}{5}$, et vaut $\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,89442719$ (la valeur trouvée en tâtonnant sur GeoGebra est légèrement supérieure à cette valeur).



Remarques : la distance minimale trouvée dans la dernière question correspond est la « distance entre le point A et la droite (BO) ». Cette distance entre un point et une droite est mesurée entre le point et la projection orthogonale du point sur la droite. C'est approximativement la position de N sur la figure de droite.

Dans la 1^{re} partie de ce problème, la distance minimale entre le point A et la courbe $\mathcal{C}$ est la distance entre ce point et la tangente lorsque celle-ci est perpendiculaire à la droite (AM) .

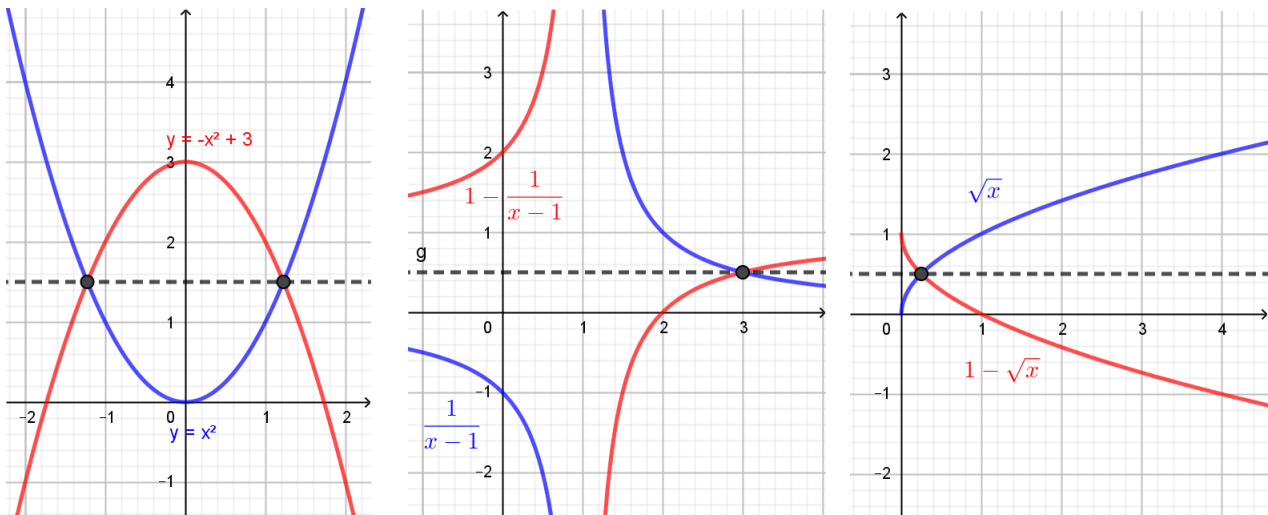


CORRECTION DE L'EXERCICE 4.9 (COURBES SYMÉTRIQUES)

1a). Pour le cas $f(x) = x^2$ et $g(x) = 3 - x^2$ la valeur de a est 3 et la droite d'équation $y = \frac{3}{2}$ est un axe de symétrie horizontal pour la figure constituée des deux courbes (figure de gauche). Pour une valeur quelconque de x , on a $\frac{f(x)+g(x)}{2} = \frac{x^2+3-x^2}{2} = \frac{3}{2}$, autrement dit le milieu entre le point de coordonnées $(x; f(x))$ et $(x; g(x))$ est sur la droite d'équation $y = \frac{3}{2}$ ce qui prouve la symétrie annoncée.

b) Pour le cas $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $g(x) = 1 - \frac{1}{x-1}$ la valeur de a est 1 et la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie horizontal pour la figure constituée des deux courbes (figure du centre). Pour une valeur quelconque de x , on a $\frac{f(x)+g(x)}{2} = \frac{\frac{1}{x-1}+1-\frac{1}{x-1}}{2} = \frac{1}{2}$, autrement dit le milieu entre le point de coordonnées $(x; f(x))$ et $(x; g(x))$ est sur la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ ce qui prouve la symétrie annoncée.

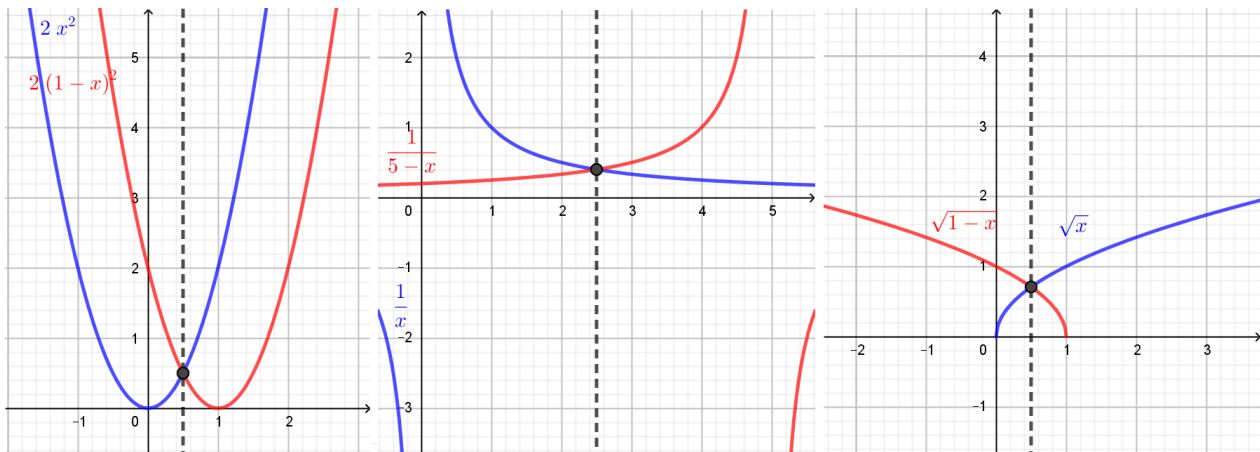
c) Pour le cas $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 1 - \sqrt{x}$ la valeur de a est encore 1 et la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie horizontal pour la figure constituée des deux courbes (figure de droite). Pour une valeur quelconque de x , on a $\frac{f(x)+g(x)}{2} = \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{2} = \frac{1}{2}$, autrement dit le milieu entre le point de coordonnées $(x; f(x))$ et $(x; g(x))$ est sur la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ ce qui prouve la symétrie annoncée.



2a). Pour le cas $f(x) = 2x^2$ et $g(x) = 2(1-x)^2$ la valeur de a est 1 et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie vertical pour la figure constituée des deux courbes (figure de gauche). Pour une valeur quelconque de x , on a $g(1-x) = 2(1-(1-x))^2 = 2(1-1+x)^2 = 2x^2 = f(x)$, autrement dit $f(x)$ et $g(1-x)$ ont les mêmes images. Or, le milieu entre le point de coordonnées $(x; f(x))$ et $(1-x; g(1-x))$ a pour abscisse $\frac{x+(1-x)}{2} = \frac{1}{2}$ est sur la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ ce qui prouve la symétrie annoncée.

b) Pour le cas $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{5-x}$ la valeur de a est 5 et la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$ est un axe de symétrie vertical pour la figure constituée des deux courbes (figure du centre). Pour une valeur quelconque de x , on a $g(5-x) = \frac{1}{5-(5-x)} = \frac{1}{5-5+x} = \frac{1}{x} = f(x)$, autrement dit x et $5-x$ ont les mêmes images par f et g . Or, le milieu entre le point de coordonnées $(x; f(x))$ et $(5-x; g(5-x))$ a pour abscisse $\frac{x+(5-x)}{2} = \frac{5}{2}$ est sur la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$ ce qui prouve la symétrie annoncée.

c) Pour le cas $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \sqrt{1-x}$ la valeur de a est 1 et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie vertical pour la figure constituée des deux courbes (figure de droite). Pour une valeur quelconque de x , on a $g(1-x) = \sqrt{1-(1-x)} = \sqrt{1-1+x} = \sqrt{x} = f(x)$, autrement dit $f(x)$ et $g(1-x)$ ont les mêmes images. Or, le milieu entre le point de coordonnées $(x; f(x))$ et $(1-x; g(1-x))$ a pour abscisse $\frac{x+(1-x)}{2} = \frac{1}{2}$ est sur la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ ce qui prouve la symétrie annoncée.



CORRECTION DE L'EXERCICE 4.10 (COMPOSITION)

1.a) L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto (3x-2)^2$ est $\mathbb{R}$.

On peut la décomposer sous la forme $f \circ g$ avec $f: x \mapsto x^2$ et $g: x \mapsto 3x-2$.

b) L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto 5\sqrt{x} + 2$ est $\mathbb{R}^+$.

On peut la décomposer sous la forme $f \circ g$ avec $f: x \mapsto 5x + 2$ et $g: x \mapsto \sqrt{x}$.

c) L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \frac{1}{4x-3}$ est $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{4}\}$.

On peut la décomposer sous la forme $f \circ g$ avec $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ et $g: x \mapsto 4x-3$.

d) L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-2x}$ est $] -\infty; \frac{1}{2}]$.

On peut la décomposer sous la forme $f \circ g$ avec $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto 1-2x$.

$$2.a) f_3 \circ f_4(x) = f_3(f_4(x)) = f_3(x^2) = x^2 + 1 = f_1(x).$$

$$b) f_4 \circ f_3(x) = f_4(f_3(x)) = f_4(x+1) = (x+1)^2 = (x^2+1) + (2x) = f_1(x) + f_2(x).$$

$$c) f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x)) = f_1(2x) = (2x)^2 + 1 = 4x^2 + 1 = 4f_4(x) + 1.$$

$$d) f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x)) = f_2(x^2+1) = 2(x^2+1) = 2x^2+2 = 2(x^2+1) = 2f_1(x)$$

Et comme on l'a vu $f_1 = f_3 \circ f_4$, on peut conclure $f_2 \circ f_1(x) = 2(f_3 \circ f_4(x))$.

$$3.a) \text{ La fonction } x \mapsto \frac{1}{x^2+2} \text{ est la composée } g \circ f \text{ de } f : x \mapsto x^2+2 \text{ et } g : x \mapsto \frac{1}{x}.$$

La fonction f est définie sur $[0; \infty[\subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $[2; \infty[$, et elle est croissante. La fonction g est définie sur $[2; \infty[\subset]0; \infty[$, à valeurs dans $]0; \infty[$ et elle est décroissante. La composée de deux fonctions de monotonie différente étant décroissante, $g \circ f$ est décroissante sur $[0; \infty[$.

Sur $] -\infty; 0[$, la fonction f est décroissante (polynôme du second degré) et prend toujours ses valeurs dans $[2; \infty[$. On l'a dit, g est décroissante sur cet intervalle. La composée de deux fonctions de même monotonie étant croissante, $g \circ f$ est croissante sur $] -\infty; 0[$.

La représentation graphique ci-dessous (en haut à gauche) confirme cette analyse.

$$b) \text{ La fonction } x \mapsto \sqrt{1-\sin x} \text{ est la composée } f \circ g \text{ de } f : x \mapsto \sqrt{1-x} \text{ et } g : x \mapsto \sin x.$$

Sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$, la fonction $\sin$ est croissante et à valeurs dans $[0; 1]$. La fonction f est définie sur $[0; 1]$ mais c'est une fonction composée de $f_1 : x \mapsto 1-x$ qui est décroissante, à valeurs dans $[0; 1]$, et $f_2 : x \mapsto \sqrt{x}$ qui est croissante. La fonction f est donc décroissante car composée de deux fonctions de monotonie différente. Pour la même raison, $f \circ g$ est décroissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2}; \pi]$, la fonction $\sin$ est décroissante et à valeurs dans $[0; 1]$. La fonction f , comme on l'a vu, est décroissante sur cet intervalle. La composée de deux fonctions de même monotonie étant croissante, $f \circ g$ est croissante sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$.

La représentation graphique ci-dessous (en haut au centre) confirme cette analyse.

$$c) \text{ La fonction } x \mapsto 2 + (1-x)^3 \text{ est la composée } f \circ g \text{ de } f : x \mapsto 2+x \text{ et } g : x \mapsto (1-x)^3.$$

Sur $\mathbb{R}$, la fonction $g_1 : x \mapsto 1-x$ est décroissante et à valeurs dans $\mathbb{R}$; la fonction $g_2 : x \mapsto x^3$ est croissante; la composée $g = g_2 \circ g_1$ de deux fonctions de monotonie différente est décroissante. La fonction f est croissante et donc $f \circ g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

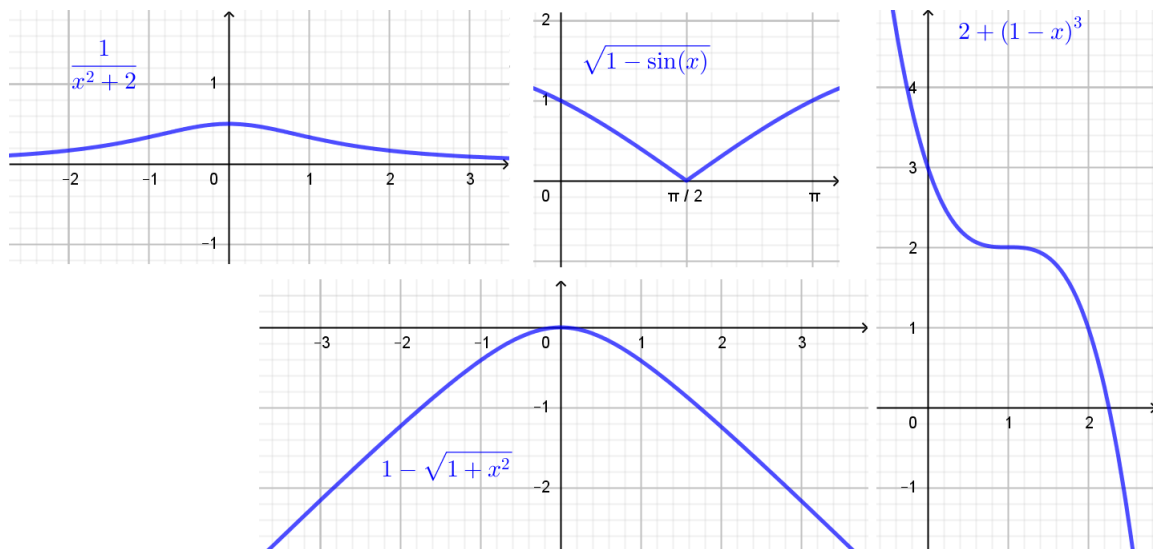
La représentation graphique ci-dessous (à droite) confirme cette analyse.

$$d) \text{ La fonction } x \mapsto 1 - \sqrt{1+x^2} \text{ est la composée } f \circ g \text{ de } f : x \mapsto 1-x \text{ et } g : x \mapsto \sqrt{1+x^2}.$$

Sur $\mathbb{R}^+$, la fonction $g_1 : x \mapsto 1+x^2$ est croissante et à valeurs dans $[1; +\infty[$; la fonction $g_2 : x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante; la composée $g = g_2 \circ g_1$ de deux fonctions de même monotonie est croissante. La fonction f est décroissante et donc $f \circ g$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Sur $\mathbb{R}^-$, la fonction $g_1 : x \mapsto 1+x^2$ est décroissante et à valeurs dans $[1; +\infty[$; la fonction $g_2 : x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante; la composée $g = g_2 \circ g_1$ de deux fonctions de monotonie différente est décroissante. La fonction f est décroissante et donc $f \circ g$ est croissante sur $\mathbb{R}^-$.

La représentation graphique ci-dessous (en bas) confirme cette analyse.



4.1.3 Limites de fonctions

CORRECTION DE L'EXERCICE 4.11 (LIMITES EN UN POINT)

1. Pour commencer, remarquons que l'on n'accède pas directement à la limite en 0 de f car le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers 0 et $\frac{0}{0}$ est une forme indéterminée. C'est également le cas pour la fonction g .

Pour $x \neq 0$, on a $f(x) = \frac{\frac{1}{1+x}-1}{x} = \frac{\frac{1-(1+x)}{1+x}}{x} = \frac{1-(1+x)}{x(1+x)} = \frac{-x}{x(1+x)} = \frac{-1}{1+x}$.

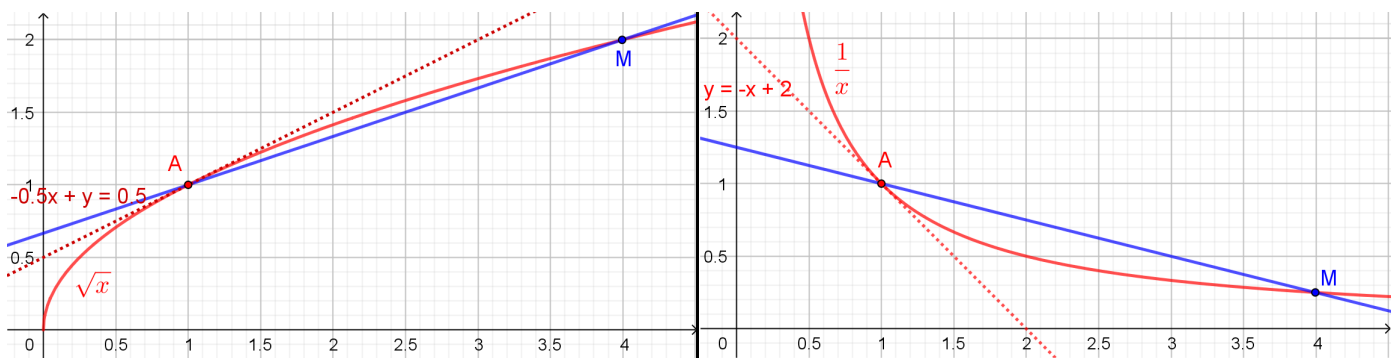
Ainsi, puisque l'on a pu simplifier par $x \neq 0$, on peut faire tendre x vers 0, la fractions s'approche alors de -1 . On note donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$.

De même, pour $x \neq 0$, on a $g(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$.

Ainsi, puisque l'on a pu simplifier par $x \neq 0$, on peut faire tendre x vers 0, la fractions s'approche alors de $\frac{1}{2}$. On note donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{2}$.

2. Ainsi présenté, $g(x)$ apparaît être le taux d'accroissement de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ entre 1 et $1+x$. Dans ce contexte, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{2}$ est la pente de la tangente à la courbe de la fonction g au point d'abscisse 1.

L'équation de cette tangente est $y = \frac{1}{2}x + b$ mais comme cette droite passe par le point $A(1; \sqrt{1} = 1)$, le coefficient b vérifie l'égalité $1 = \frac{1}{2} + b \iff b = \frac{1}{2}$, d'où l'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ (en pointillés rouges ci-dessous).



De même pour $f(x)$ qui apparaît être le taux d'accroissement de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ entre 1 et $1+x$. Dans ce contexte, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ est la pente de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 1.

L'équation de cette tangente est $y = -x + b$ mais comme cette droite passe par le point $A(1; \frac{1}{1} = 1)$, le coefficient b vérifie l'égalité $1 = -1 + b \iff b = 2$, d'où l'équation $y = -x + 2$ (en pointillés verts ci-dessus).

3. Il y a, pour ces limites, un problème du même type que dans la question 1.

Pour la fonction f , la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ vient du fait que le trinôme du numérateur s'annule pour $x = 4$. On peut donc l'écrire sous forme factorisée : $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$, et par conséquent simplifier $f(x)$ quand $x \neq 4$: $f(x) = \frac{x^2-3x-4}{x-4} = \frac{(x-4)(x+1)}{x-4} = x + 1$.

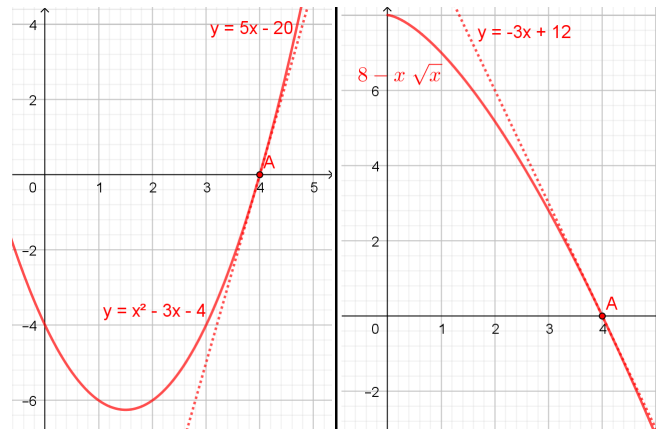
On a donc $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} x + 1 = 5$.

Pour la fonction g , utilisons la quantité conjuguée. Pour $x \neq 4$, on a :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x\sqrt{x} - 8}{4 - x} = \frac{(x\sqrt{x})^2 - 8^2}{(4 - x)(x\sqrt{x} + 8)} \\ &= \frac{x^3 - 4^3}{(4 - x)(x\sqrt{x} + 8)} = \frac{(x - 4)(x^2 + 4x + 16)}{(4 - x)(x\sqrt{x} + 8)} \\ &= -\frac{x^2 + 4x + 16}{x\sqrt{x} + 8} = -\frac{(x + 2)^2 + 12}{x\sqrt{x} + 8} \end{aligned}$$

On a donc $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4} -\frac{(x+2)^2+12}{x\sqrt{x}+8} = -\frac{48}{16} = -3$.

Ces limites en 4 sont les coefficients directeurs des tangentes au point d'abscisse 4 pour les courbes des fonctions $x \mapsto x^2 - 3x - 4$ (pour $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$) et $x \mapsto 8 - x\sqrt{x}$ (pour $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -3$).



CORRECTION DE L'EXERCICE 4.12 (SINUS ET COSINUS)

1. Approche directe :

Le numérateur de $f(x)$ est $\sin x$, sa limite en 0^+ est 0 ; le dénominateur de $f(x)$ est x , sa limite en 0^+ est 0 ; La limite du rapport des deux n'est donc pas accessible d'une façon directe.

De même, le numérateur de $x(x)$ est $1 - \cos x$, sa limite en 0^+ est 0 ; le dénominateur de $g(x)$ est x , sa limite en 0^+ est 0 ; La limite du rapport des deux n'est donc pas accessible d'une façon directe. 2.

Expérimentation :

Utilisons un tableur pour nous approcher expérimentalement de ces limites :

x	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001	0,0005	0,0001	0,00005	0,00001
$\sin(x)$	0,0998334166	0,0499791693	0,0099998333	0,0049999792	0,0009999998	0,0005	0,0001	0,00005	0,00001
$f(x)=\sin(x)/x$	0,9983341665	0,9995833854	0,9999833334	0,9999958333	0,9999998333	0,9999999583	0,9999999983	0,9999999996	1

x	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001	0,0005	0,0001	0,00005	0,00001
$1-\cos(x)$	0,0049958347	0,0012497396	4,9999583E-005	0,0000125	0,0000005	0,000000125	0,000000005	1,2500000E-009	5,0000000E-011
$g(x)=[1-\cos(x)]/x$	0,0499583472	0,0249947921	0,0049999583	0,0024999948	0,0005	0,00025	0,00005	0,000025	0,000005

Au vu de ces résultats, la fonction $x \mapsto \sin x$ semblant s'approcher de la fonction identité $x \mapsto x$ pour les valeurs proches de 0, le rapport des deux tend à se rapprocher de 1 (ce n'est encore qu'une conjecture).

Au contraire, la fonction $x \mapsto 1 - \cos x$ s'approche de 0 beaucoup plus vite que la fonction identité $x \mapsto x$ au voisinage de 0, le rapport des deux tend à se rapprocher de 0 (ce n'est encore qu'une conjecture).

3.a) Encadrement :

L'aire du triangle TOI est $\frac{TI \times OI}{2} = \frac{\tan x \times 1}{2} = \frac{\tan x}{2}$; l'aire du triangle MOI est $\frac{MC \times OI}{2} = \frac{\sin x \times 1}{2} = \frac{\sin x}{2}$.
L'aire du secteur circulaire MOI est $\frac{x}{2}$.

b) Comme l'aire du secteur circulaire est comprise entre celles des deux triangles – l'extérieur TOI qui le contient et l'intérieur MOI qui est contenu – on peut écrire l'encadrement suivant : $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$, valable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$. En multipliant par 2, on obtient $\sin x < x < \tan x$. En divisant par $\sin x \neq 0$, on a $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\sin x}{\cos x \times \sin x} = \frac{1}{\cos x}$. Il ne reste plus qu'à inverser ces inégalités ne contenant que des nombres positifs pour obtenir $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$ (l'inversion inverse aussi les inégalités).

c) Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = \cos 0 = 1$, $\frac{\sin x}{x}$ est encadré par deux nombres qui s'approchent l'un de l'autre quand x tend vers 0^+ . On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ (théorème des gendarmes).

d) Utilisons la quantité conjuguée de $1 + \cos x$ pour transformer cette expression :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \cos x} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 &= \frac{(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \frac{(1 - \cos x) \times \sin^2 x}{(1 - \cos^2 x) \times x^2} \\ &= \frac{(1 - \cos x) \times \sin^2 x}{\sin^2 x \times x^2} = \frac{1 - \cos x}{x^2} \end{aligned}$$

D'une part on sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{1 + \cos 0} = \frac{1}{2}$ et d'autre part on a vu que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Par produit de deux expressions ayant une limite finie $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 1$ et,

finalement $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \cos x} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.

Cela revient, d'après l'égalité des deux expressions, à $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

En multipliant cette expression par x (qui a évidemment pour limite 0 en 0), on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x) \times x}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} x = \frac{1}{2} \times 0 = 0.$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 4.13 (ASYMPTOTES OBLIQUES)

1. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} = \frac{x \times x^2}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \times x^2} = \frac{x}{1 + \frac{1}{x^2}}$. Cette dernière expression est le quotient d'un dividende de

limite infinie ($\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$) et d'un diviseur de limite finie ($\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$); sa limite est donc

infinie : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. $f(x) - x = \frac{x^3}{x^2 + 1} - \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = \frac{(-1) \times x}{\left(x + \frac{1}{x}\right) \times x} = \frac{-1}{x + \frac{1}{x}}$. Cette dernière expression est

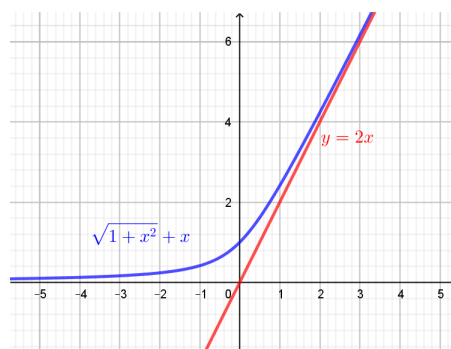
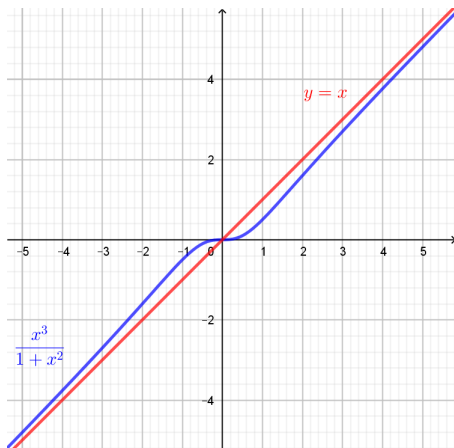
le quotient d'un dividende fini et d'un diviseur de limite infinie ($\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x} = +\infty$); sa limite est donc nulle : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$. L'écart entre la courbe de f et la droite d'équation $y = x$ tend à

s'approcher de 0 : la courbe de f admet pour asymptote la droite d'équation $y = x$.

L'illustration montre ce comportement asymptotique au voisinage de $+\infty$.

Le même raisonnement se transpose au voisinage de $-\infty$. En outre, la fonction f est impaire, car $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x^3}{x^2 + 1} = -f(x)$. La courbe admet donc l'origine comme centre de symétrie et le comportement asymptotique au voisinage de $-\infty$ se déduit plus simplement encore de cette symétrie.

L'illustration de gauche ci-dessous montre la courbe de f et son asymptote.



2. $g(x) = \sqrt{1 + x^2} + x$ est la somme de deux termes qui ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$, sa limite est donc infinie : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Par contre, $g(x) - 2x = \sqrt{1 + x^2} - x$ est une expression indéterminée au voisinage de $+\infty$ car c'est la différence de deux termes qui ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Dans l'espoir de lever cette indétermination, écrivons

$$g(x) - 2x = \sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} - x = x \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - x = x \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - 1 \right).$$

Ainsi écrit, $g(x) - 2x$ apparaît comme le produit d'un facteur de limite infinie ($\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$) et d'un

autre de limite nulle ($\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - 1 = 0$); sa limite est donc toujours indéterminée. Pour lever

définitivement l'indétermination, il faut employer la quantité conjuguée :

$$g(x) - 2x = \sqrt{1+x^2} - x = \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}.$$

Ainsi écrit, $g(x) - 2x$ apparaît comme le quotient d'un dividende fini par un diviseur de limite infinie ; sa limite est donc nulle. L'écart entre la courbe de g et la droite d'équation $y = 2x$ tend à s'approcher de 0 : la courbe de g admet pour asymptote la droite d'équation $y = 2x$ au voisinage de $+\infty$.

Au voisinage de $-\infty$, $g(x) = \sqrt{1+x^2} + x$ est la somme d'un terme de limite $+\infty$ en $-\infty$ et d'un autre de limite $-\infty$ en $-\infty$, sa limite est donc indéterminée au voisinage de $-\infty$. Écrivons $g(x) = \sqrt{1+x^2} + x = \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}-x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}$. Ainsi, le dénominateur tend vers l'infini, comme la somme de deux termes de limite $+\infty$ en $-\infty$. La limite du quotient est donc nulle : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$. Cela implique qu'au voisinage de $-\infty$, la courbe de g admet pour asymptote la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses).

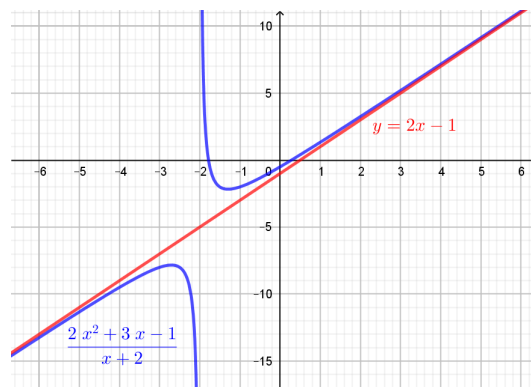
L'illustration de droite ci-dessus montre la courbe de g et ses deux asymptotes.

3. La fonction $h : x \mapsto \frac{2x^2+3x-1}{x+2}$ a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$ car on peut écrire cette expression comme le quotient d'un numérateur de limite infinie ($2x + 3 - \frac{1}{x}$, une fois qu'on a mis x en facteur et simplifié la fraction par ce facteur) et d'un dénominateur de limite finie ($1 + \frac{2}{x}$).

On peut écrire $h(x) = \frac{(2x-1)(x+2)+2-1}{x+2} = \frac{(2x-1)(x+2)+1}{x+2} = 2x - 1 + \frac{1}{x+2}$ pour tout $x \neq -2$.

Au voisinage de l'infini $h(x) - (2x - 1) = \frac{1}{x+2}$ a une limite nulle, la courbe de h admet pour asymptote la droite d'équation $y = 2x - 1$ au voisinage de l'infini ($-\infty$ et $+\infty$).

L'illustration montre la courbe de h et son asymptote.



4.1.4 Fonctions dérivées et applications

CORRECTION DE L'EXERCICE 4.14 (SECTEUR CIRCULAIRE)

Le périmètre $p = 4$ du secteur circulaire est égal à $2r + \alpha r = r(2 + \alpha)$.

On en tire l'expression de r en fonction de α : $4 = r(2 + \alpha) \iff r = \frac{4}{2+\alpha}$;

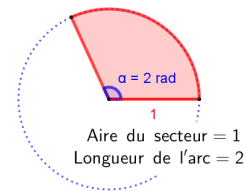
on peut aussi en tirer l'expression de α en fonction de r : $4 = r(2 + \alpha) = 2r + r\alpha \iff \alpha = \frac{4-2r}{r}$.

L'aire du secteur circulaire est égal à $\frac{\alpha r^2}{2}$, soit $\frac{4^2 \alpha}{2(2+\alpha)^2} = \frac{16\alpha}{2(2+\alpha)^2}$ (en prenant α comme variable) ou $\frac{(4-2r)r^2}{2r} = \frac{(4-2r)r}{2}$ (en prenant r comme variable).

L'aire est maximum lorsque la dérivée s'annule. Selon qu'on prenne l'une ou l'autre des expressions, la variable change :

- En prenant α comme variable, on a $\mathcal{A}(\alpha) = \frac{16\alpha}{2(2+\alpha)^2}$, d'où $\mathcal{A}'(\alpha) = \frac{16 \times 2(2+\alpha)^2 - 16\alpha \times 4(2+\alpha)}{4(2+\alpha)^4} = \frac{8 \times (2+\alpha) - 16\alpha}{(2+\alpha)^3} = \frac{16-8\alpha}{(2+\alpha)^3}$. Cette dérivée s'annule pour $16 - 8\alpha = 0 \iff \alpha = 2$.
- En prenant r comme variable, on a $\mathcal{A}(r) = \frac{(4-2r)r}{2}$, d'où $\mathcal{A}'(r) = \frac{4-4r}{2} = 2 - 2r$. Cette dérivée s'annule pour $2 - 2r = 0 \iff r = 1$.

Noter bien que r et α sont liés l'un à l'autre, aussi les deux solutions sont la même unique solution : si $\alpha = 2$ alors $r = \frac{4}{2+\alpha} = \frac{4}{2+2} = 1$ et inversement si $r = 1$ alors $\alpha = \frac{4-2r}{1} = \frac{4-2}{1} = 2$. La figure ci-contre montre ce secteur de périmètre 4 et d'aire maximum égale à $\frac{(4-2)}{2} = 1$.



CORRECTION DE L'EXERCICE 4.15 (FONCTION DE 2 VARIABLES)

Dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, la distance du point $M(x; y)$ à l'origine est $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$. En notant $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ cette distance, on a $\rho^2 = x^2 + y^2$.

L'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ ayant pour mesure un nombre θ , l'abscisse de M est $x = \rho \cos \theta$ et l'ordonnée vaut $y = \rho \sin \theta$. Avec ces notations, on peut écrire $f(x, y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2} = \frac{\rho \cos \theta + \rho \sin \theta}{1+\rho^2}$. Cette expression est devenue une fonction de (ρ, θ) : $f(x, y) = \frac{\rho(\cos \theta + \sin \theta)}{1+\rho^2} = \frac{\rho}{1+\rho^2} \times (\cos \theta + \sin \theta) = F(\rho) \times G(\theta)$.

On a d'une part la fonction $F : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ et d'autre part la fonction $G : x \mapsto (\cos x + \sin x)$ qu'il faut maximiser, étant entendu que les deux maximums sont indépendants (j'ai utilisé un même nom de variable, z , pour les définir et les étudier mais les vraies variables, ρ et θ , sont indépendantes).

La dérivée de F est définie par $F'(z) = \left(\frac{z}{1+z^2}\right)' = \frac{1+z^2-z \times (2z)}{(1+z^2)^2} = \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}$. Cette dérivée s'annule pour $1 - z^2 = 0$, soit $z^2 = 1 \iff z = \pm 1$. Comme z est ici ρ , on a obtenu $\rho = \pm 1$ mais comme ρ est une distance, un nombre positif, la seule valeur qui convienne est $\rho = 1$. Le(s) point(s) M qui vont convenir se trouvent sur le cercle trigonométrique.

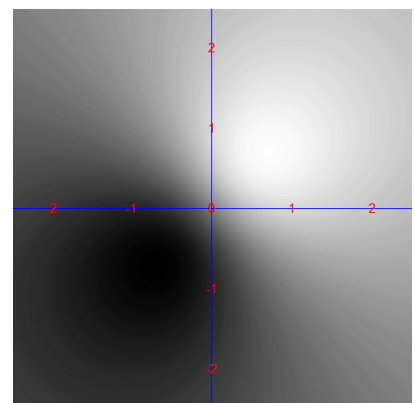
La dérivée de G est définie par $G'(z) = (\cos z + \sin z)' = -\sin z + \cos z$ (propriété 4.18 du cours). Cette dérivée s'annule pour $\sin z = \cos z \iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$, soit $\frac{\pi}{2} - z = z \pmod{2\pi} \iff \frac{\pi}{2} = 2z \pmod{2\pi} \iff \frac{\pi}{4} = z \pmod{\pi}$ ou bien $\frac{\pi}{2} - z = -z \pmod{2\pi} \iff \frac{\pi}{2} = 0$ qui n'est jamais vrai. Les seules solutions dans $[0; 2\pi]$ sont $z_1 = \frac{\pi}{4}$ et $z_2 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$. Comme z est ici θ , on a obtenu $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ et $\theta_2 = \frac{5\pi}{4}$.

La dérivée s'annule pour θ_1 et θ_2 mais dans un cas on obtient un maximum (pour θ_1) et dans l'autre un minimum (pour θ_2). Comment montrer cela ? On peut étudier le signe de G' pour $\theta \in [0; 2\pi]$. On a $G'(\theta) = \cos \theta - \sin \theta$ et il faut montrer que $G'(\theta) > 0$ pour $\theta \in [0; \frac{\pi}{4}]$ puis négatif pour $\theta \in [\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}]$ et à nouveau positif. On peut aussi se rappeler l'exercice 3 du DS4 dans lequel on a montré que $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. L'avantage de cette expression : on sait déjà qu'elle est croissante quand $x \mapsto \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ est croissante, c'est-à-dire quand $-\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \iff -\frac{3\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$.

Au point M_1 la fonction f est maximisée. En ce point M_1 on a $(x_1 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; y_1 = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2})$.

La valeur maximale de f est $\frac{x_1+y_1}{1+x_1^2+y_1^2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$.

Pour donner une idée graphiquement des valeurs de cette fonction, j'ai écrit un petit programme qui colorie un pixel avec une valeur de gris qui dépend de la valeur de $f(x, y)$. Comme ces valeurs se répartissent entre $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$, j'ai attribué le noir à la première et le blanc à la dernière, ce qui fait que le point M_1 est au centre de la zone claire et le point M_2 est au centre de la zone sombre. Les lignes de niveau de cette fonction sont des cercles sauf la ligne de niveau 0 qui est la droite (un cercle de rayon infini) d'équation $y = -x$. La ligne de niveau 0,5 par exemple est le cercle de centre $A(1; 1)$ et de rayon $\sqrt{3}$; pour s'en convaincre écrire $\frac{x+y}{1+x^2+y^2} = 0,5$ sous la forme $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3$.



CORRECTION DE L'EXERCICE 4.16 (BOÎTE DE CONSERVE)

1) La variable est la hauteur x , comme le volume $\mathcal{V}$ est constant et égal à $\pi R^2 x$, on en déduit que $R^2 = \frac{\mathcal{V}}{\pi x}$ et donc, comme $R > 0$, $R = \sqrt{\frac{\mathcal{V}}{\pi x}} = \frac{\lambda}{\sqrt{x}}$ où λ est une constante ($\lambda = \sqrt{\frac{\mathcal{V}}{\pi}}$).

L'aire des parois du cylindre est la somme des deux bases circulaires et de la face latérale (de dimensions

x sur $2\pi R$) : $\mathcal{A} = 2\pi R^2 + 2\pi Rx$. En remplaçant R par sa valeur en fonction de x , on obtient $\mathcal{A}(x) = 2\pi \frac{\lambda^2}{x} + 2\pi \lambda \sqrt{x} = 2\pi \left(\frac{\lambda^2}{x} + \lambda \sqrt{x} \right)$.

En remplaçant les λ par leur valeur et en simplifiant : $\mathcal{A}(x) = \frac{2\mathcal{V}}{x} + 2\sqrt{\pi\mathcal{V}}\sqrt{x}$.

Pour minimiser $\mathcal{A}$, dérivons la fonction : $\mathcal{A}'(x) = \frac{-2\mathcal{V}}{x^2} + \frac{\sqrt{\pi\mathcal{V}}}{\sqrt{x}}$.

Le minimum de cette dérivée est obtenu pour la solution de l'équation $\frac{-2\mathcal{V}}{x^2} + \frac{\sqrt{\pi\mathcal{V}}}{\sqrt{x}} = 0$.

Cette équation équivaut à $\sqrt{\pi\mathcal{V}}x^2 = 2\mathcal{V}\sqrt{x} \iff x\sqrt{x} = 2\sqrt{\frac{\mathcal{V}}{\pi}}$.

Élevons cela au carré, on obtient $x^3 = 4\frac{\mathcal{V}}{\pi}$ et prenons la racine carrée : $x = \sqrt[3]{4\frac{\mathcal{V}}{\pi}}$.

Pour cette valeur, le carré du rayon R de la base est donné par l'égalité $R^2 = \frac{\mathcal{V}}{\pi x} = \frac{\sqrt[3]{\pi\mathcal{V}}}{\pi\sqrt[3]{4\mathcal{V}}} = \sqrt[3]{\left(\frac{\mathcal{V}}{2\pi}\right)^2}$

et donc, le rayon R est $\sqrt[3]{\frac{\mathcal{V}}{2\pi}}$.

Application numérique : Prenons $\mathcal{V} = 1 \text{ dm}^3$, dans ce cas la hauteur optimum est $x = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \approx 1,083852$ et le rayon optimum $R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx 0,5419261$, autrement dit la moitié de la hauteur.

CORRECTION DE L'EXERCICE 4.17 (LOI DE SNELL-DESCARTES)

1) Exprimons en fonction des données la durée $t(x)$ du trajet $M_1 - I - M_2$:

- La partie $M_1 - I$ du trajet qui mesure M_1I est parcourue à la vitesse v_1 pendant une durée t_1 égale à $\frac{M_1I}{v_1}$; or, d'après Pythagore, $M_1I^2 = m_1^2 + x^2$ et donc $t_1 = \frac{\sqrt{m_1^2 + x^2}}{v_1}$.
- La partie $I - M_2$ du trajet qui mesure M_2I est parcourue à la vitesse v_2 pendant une durée t_2 égale à $\frac{M_2I}{v_2}$; or, d'après Pythagore, $M_2I^2 = m_2^2 + (d-x)^2$ et donc $t_2 = \frac{\sqrt{m_2^2 + (d-x)^2}}{v_2}$.

Finalement, la durée du trajet $M_1 - I - M_2$ est $t(x) = \frac{\sqrt{m_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{m_2^2 + (d-x)^2}}{v_2}$.

Exprimons également les sinus des angles i et r en fonction des données :

- Le sinus de l'angle d'incidence est aussi le cosinus de $\frac{\pi}{2} - i$ et donc $\sin i = \cos(\frac{\pi}{2} - i) = \frac{H_1I}{M_1I} = \frac{x}{\sqrt{m_1^2 + x^2}}$.
- Le sinus de l'angle de réfraction est aussi le cosinus de $\frac{\pi}{2} - r$ et donc $\sin r = \cos(\frac{\pi}{2} - r) = \frac{H_2I}{M_2I} = \frac{d-x}{\sqrt{m_2^2 + (d-x)^2}}$.

2) Déterminons, à l'aide de la dérivée, la valeur x_0 de x pour laquelle le trajet a une durée minimale :

Dérivons $t(x) = \frac{\sqrt{m_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{m_2^2 + (d-x)^2}}{v_2}$.

$$t'(x) = \frac{2x}{2v_1\sqrt{m_1^2 + x^2}} + \frac{-2(d-x)}{2v_2\sqrt{m_2^2 + (d-x)^2}} = \frac{x}{v_1\sqrt{m_1^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{m_2^2 + (d-x)^2}}.$$

$t'(x)$ s'annule pour la valeur x_0 de x solution de l'équation $\frac{x}{v_1\sqrt{m_1^2 + x^2}} = \frac{d-x}{v_2\sqrt{m_2^2 + (d-x)^2}}$.

Si on dispose des valeurs de m_1 , m_2 , d , v_1 et v_2 , l'équation n'est pas des plus simples à résoudre (après transformation, sauf erreur de ma part, elle revient à une équation du 4^e degré). On peut cependant utiliser un algorithme de dichotomie pour en déterminer une valeur approchée aussi précise que l'on veut.

Juste pour voir, déterminons la valeur de x_0 lorsque $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $d = 8$, $\frac{v_1}{v_2} = 1,5$ (environ la valeur de l'application numérique qui suit). L'équation à résoudre devient $\frac{x}{1,5\sqrt{9+x^2}} = \frac{8-x}{\sqrt{4+(8-x)^2}}$ ou,

plus simplement, $2x\sqrt{4+(8-x)^2} = 3(8-x)\sqrt{9+x^2}$. Le programme Python qui suit nous montre qu'alors la solution est $x_0 \approx 6,48038$.

```

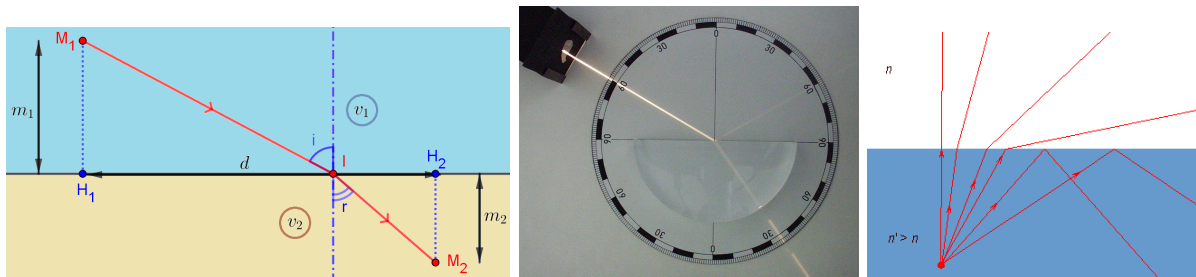
from math import sqrt
def image(x) :
    return 2*x*sqrt(4+(8-x)**2)-3*(8-x)*sqrt(9+x**2)

a=float(input('Quelle est a, la borne inférieure? '))
b=float(input('Quelle est b, la borne supérieure? '))
c=0
d=image(a)
e=image(b)
p=int(input("Quelle est la valeur absolue de l'exposant de la précision souhaitée? "))
while b-a>10**-p :
    c=(a+b)/2
    f=image(c)
    if d*f<0 :
        b,e=c,f
    else :
        a,d=c,f
print('voici votre solution : {}'.format(c))

```

Quelle est a, la borne inférieure? 0
 Quelle est b, la borne supérieure? 8
 Quelle est la valeur absolue de l'exposant de la précision souhaitée?
 voici votre solution : 6.480384826660156

3) D'après la question 1 où on a déterminé $\sin i$ et $\sin r$, l'égalité $\frac{x}{v_1 \sqrt{m_1^2 + x^2}} = \frac{d-x}{v_2 \sqrt{m_2^2 + (d-x)^2}}$ peut s'écrire $\frac{\sin i}{v_1} = \frac{\sin r}{v_2}$ et se mettre sous la forme $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}$. Cette forme est connue sous l'appellation « loi de Snell-Descartes pour la réfraction ».



Application :

Milieu 1 (air) : $v_1 = 300\,000 \text{ km/s}$

Milieu 2 (verre) : $v_2 = ?$

Le rapport $\frac{v_1}{v_2}$, tel qu'il apparait mesuré sur la photo est donné par les angles $i = 60^\circ$ et $r = 35^\circ$.

On en déduit $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin 60}{\sin 35} \approx 1,51$ (j'arrondis au centième cette mesure qui n'est pas très précise).

De là on détermine $v_2 \approx \frac{v_1}{1,51} = \frac{300\,000}{1,51} \approx 200\,000 \text{ km/s}$.

L'angle de réfraction augmente moins vite que l'angle d'incidence ; lorsque celui-ci tend vers $i = 90^\circ$, le sinus de r tend vers $\frac{v_2}{v_1} \approx \frac{1}{1,51} \approx 0,662$ (car $\sin i = 1$) d'où la valeur limite $r \approx \sin^{-1}(0,662) \approx 41,5^\circ$. Dans l'autre sens, du verre à l'air, passée cette valeur de l'angle, la lumière est entièrement réfléchi sur le dioptré. Autrement dit, si un rayon lumineux arrive du verre avec un angle d'incidence de 45° (plus que la valeur limite), il sera complètement réfléchi dans le verre (voir l'illustration de droite, extraite de Wikipédia, dans laquelle sont notés les indices de réfraction $n = \frac{c}{v}$, inversement proportionnels aux vitesses).

CORRECTION DE L'EXERCICE 4.18 (CÔNE)

1) Exprimons h et r en fonction de R et x :

L'unique arête du cône est constituée par l'enroulement de l'arc $\widehat{MM'}$ de longueur $R(2\pi - x)$.

La longueur de cette arête est égale au périmètre d'un cercle de rayon r , d'où $2\pi r = R(2\pi - x)$.

On en tire l'expression de r cherchée : $r = \frac{R(2\pi - x)}{2\pi} = R(1 - \frac{x}{2\pi}) = \frac{R}{2\pi}(2\pi - x)$.

La génératrice SM du cône est de longueur R . Le théorème de Pythagore dans le triangle SOM nous donne $R^2 = r^2 + h^2$. De là, on extrait l'expression de h cherchée : $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - R^2(1 - \frac{x}{2\pi})^2} = R\sqrt{1 - (1 - \frac{x}{2\pi})^2} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi x - x^2}$.

2) Le volume du cône est égal au tiers du produit de la base par la hauteur, soit $\mathcal{V}(x) = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi R^3 (2\pi - x)^2 \sqrt{4\pi x - x^2}}{3 \times 8\pi^3} = \frac{R^3}{24\pi^2} (2\pi - x)^2 \sqrt{4\pi x - x^2}$.

Déterminons la valeur de x pour laquelle le volume $\mathcal{V}$ du cône est maximal en dérivant cette fonction

et en déterminant la valeur qui annule la dérivée :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}'(x) &= \frac{R^3}{24\pi^2} \left[((2\pi - x)^2)' \sqrt{4\pi x - x^2} + (2\pi - x)^2 \left(\sqrt{4\pi x - x^2} \right)' \right] \\
 &= \frac{R^3}{24\pi^2} \left[-2(2\pi - x) \sqrt{4\pi x - x^2} + (2\pi - x)^2 \frac{4\pi - 2x}{2\sqrt{4\pi x - x^2}} \right] \\
 &= \frac{R^3}{24\pi^2} (2\pi - x) \frac{-2(4\pi x - x^2) + (2\pi - x)^2}{\sqrt{4\pi x - x^2}} \\
 &= \frac{R^3}{24\pi^2} (2\pi - x) \frac{3x^2 - 12\pi x + 4\pi^2}{\sqrt{4\pi x - x^2}}
 \end{aligned}$$

L'expression de $\mathcal{V}'(x)$ n'est pas particulièrement simple, mais elle s'annule de façon évidente pour $x = 2\pi$ et pour les racines éventuelles du polynôme $3x^2 - 12\pi x + 4\pi^2$.

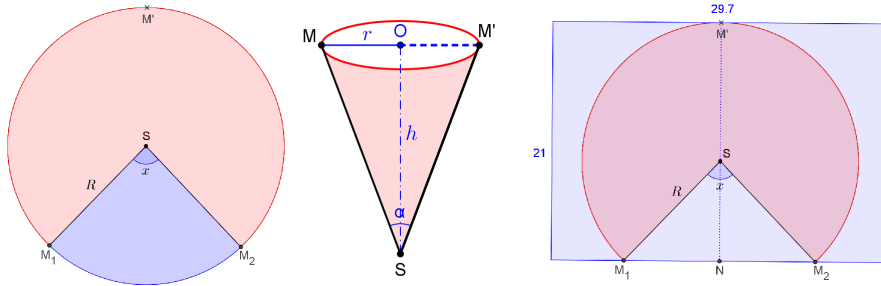
Celles-ci valent $x = \frac{12\pi \pm \sqrt{96\pi^2}}{6} = 2\pi \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$.

Seule, la racine $2\pi \frac{3 - \sqrt{6}}{3} = 2\pi - \frac{2\pi\sqrt{6}}{3} \approx 1,15$ est inférieure à 2π (x , étant un angle géométrique, est nécessairement inférieur à 2π). C'est donc la valeur cherchée pour laquelle le volume $\mathcal{V}$ du cône est maximal, je la noterai x_0 . Cet angle mesure environ $66,06^\circ$.

Le sinus de l'angle $\frac{\alpha}{2}$ mesure $\frac{r}{R}$, soit $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{R} = 1 - \frac{x}{2\pi}$.

Pour la valeur x_0 qui maximise $\mathcal{V}$, on obtient $\sin \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{x_0}{2\pi} = 1 - \frac{3 - \sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0,8165$.

L'angle du cône de volume maximal mesure donc $2\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \approx 1,9106 \text{ rad}$, soit environ $109,47^\circ$.



3) En découpant le patron dans une feuille de format A_4 ($21 \times 29,7 \text{ cm}$) en s'arrangeant pour faire tenir le secteur de disque comme indiqué sur la figure (afin de perdre le moins de feuille possible), on a $d = SN = 21 - SM' = 21 - R$. Le rayon R n'est pas encore connu, on va le déterminer.

On peut déterminer d par trigonométrie : $\frac{d}{R} = \cos \frac{x}{2} \iff d = R \cos \frac{x}{2}$.

Par identification, on obtient $d = 21 - R = R \cos \frac{x}{2}$ d'où $R = \frac{21}{1 + \cos \frac{x}{2}}$.

La formule pour $\mathcal{V}(x)$ établie dans la partie 2 reste valable, mais cette fois, la contrainte de faire tenir le patron comme indiqué, oblige à avoir $R = \frac{21}{1 + \cos \frac{x}{2}}$.

On obtient ainsi $\mathcal{V}(x) = \frac{21^3}{24\pi^2(1 + \cos \frac{x}{2})^3} (2\pi - x)^2 \sqrt{4\pi x - x^2}$.

On a beau être dans un chapitre sur la dérivée, il y a parfois une grande lassitude à dériver des expressions abracadabrantes que l'on ne saura ensuite pas annuler sans le recours à un programme. Pour cette raison, je me contenterai de l'approche algorithmique de cette question :

Mon programme fait croître x dans cette formule avec un pas p régulier jusqu'à ce que le volume décroisse. Il affiche alors la valeur de x obtenue – je la noterai x_1 – et on peut recommencer en partant de $x_1 - p$ avec un pas dix ou cent fois plus petit, jusqu'à la précision désirée.

Les contraintes liées à l'utilisation de la feuille de format A_4 ne s'arrêtent pas à l'expression de R en fonction de x : il faut également que $2R < 29,7$ pour que ce patron ne dépasse pas. Cela revient à limiter le domaine de validité de notre formule. C'est la raison pour laquelle j'ai ajouté le test $R < 14,85$ dans le programme et un affichage spécifique indiquant que la valeur limite est atteinte. C'est ce test qui entraîne ici l'arrêt du programme montrant que le cône de volume maximum est celui qui est en contact avec les 4 bords de la feuille (voir l'illustration ci-dessous où $SA = SB = SC = 14,85 \text{ cm}$).

```

from math import *
def volume(x) :
    return 3087*(2*pi-x)**2*sqrt(4*pi*x-x**2)/(8*pi**2*(1+cos(x/2))**3)

X=float(input('Quelle est le point de départ? '))
V_ancien=volume(X)
pas=1e-15
fin=0
while fin==0 :
    X=X+pas
    V=volume(X)
    if V<V_ancien : fin=1
    elif 21/(1+cos(X/2))>14.85 : fin=2
    else : V_ancien=V
if fin==1: print('Le maximum est obtenu avant x={} et vaut environ {}'.format(X,V_ancien))
else : print('Le maximum {} est obtenu pour la valeur limite x={}.'.format(V_ancien,X))

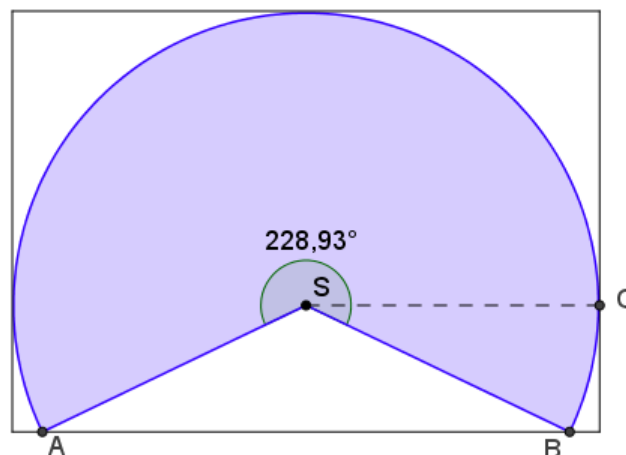
R=21/(1+cos(X/2))
h=R*sqrt(4*pi*X-X**2)/(2*pi)
r=R*(2*pi-X)/(2*pi)
a_rad=2*asin(r/R)
a_deg=a_rad*180/pi
print('Génératrice R={}, Hauteur h={}, rayon base r={}'.format(R,h,r))
print('Angle alpha={}rad, soit{}deg'.format(a_rad,a_deg))

```

```

Quelle est le point de départ? 2.287594014177
Le maximum est obtenu avant x=2.2875940141771225 et vaut environ 1070.263413020812
Génératrice R=14.849999999998156, Hauteur h=11.460584685221473, rayon base r=9.44338385711458
Angle au sommet : alpha=1.37839513595444rad, soit 78.97622379155072deg
Angle de la découpe : x=2.2875940141771225rad, soit 131.06948225173932deg

```



Je trouve ainsi la valeur de x_1 pour laquelle il y a un volume maximum : $x_1 \approx 2,28759401417 \text{ rad}$, soit environ $131,07^\circ$. Pour cette valeur, le volume est environ égal à $1070,26 \text{ cm}^3$, soit environ $1,07 \text{ L}$. La longueur de sa génératrice est alors évidemment égale à $R = 14,85 \text{ cm}$.

La hauteur de ce cône est $h \approx 11,46 \text{ cm}$, le rayon de sa base mesure $r \approx 9,44 \text{ cm}$ et l'angle au sommet vaut $\alpha \approx 1,378 \text{ rad}$, soit environ 79° .

Pour la réponse à la question posée (à quelle distance d du milieu N d'une longueur doit-on placer le point S pour que le cône obtenu ait un volume maximal?), la distance est donc la valeur exacte $d = 21 - R = 6,15 \text{ cm}$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 4.19 (RECTANGLE DANS ELLIPSE)

1) Dans le repère (O, I, J) , le point D ayant pour abscisse x , la longueur du rectangle est $2x$ et sa largeur est $2y = 2\sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ (j'ai utilisé la relation liant les coordonnées d'un point de l'ellipse donnée dans l'énoncé). J'en déduis l'expression de l'aire du rectangle $\mathcal{A}(x) = \frac{4b}{a}x\sqrt{a^2 - x^2}$.

Pour maximaliser $\mathcal{A}$, on doit annuler la dérivée :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}'(x) &= \frac{4b}{a} \left[(x)' \sqrt{a^2 - x^2} + x \left(\sqrt{a^2 - x^2} \right)' \right] \\
 &= \frac{4b}{a} \left[\sqrt{a^2 - x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \right] \\
 &= \frac{4b}{a} \frac{(a^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\
 &= \frac{4b}{a} \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}
 \end{aligned}$$

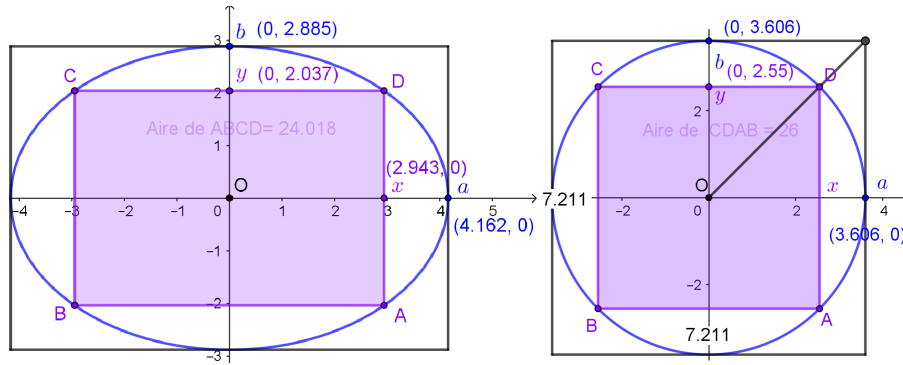
La dérivée s'annule pour $a^2 - 2x^2 = 0 \iff x^2 = \frac{a^2}{2} \implies x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Pour cette valeur, on a $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}$ et l'aire maximale du rectangle est $\mathcal{A}(x_0) = \frac{4b}{a} x_0 \sqrt{a^2 - x_0^2} = \frac{4b}{a} \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{4b}{a} \frac{a^2}{2} = 2ab$, soit la moitié de l'aire du rectangle dans lequel on a inscrit l'ellipse. Les coordonnées du point D (le sommet du rectangle situé dans le 1^{er} cadran) sont donc $x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ et $y_0 = \frac{b}{\sqrt{2}}$.

D'après l'indication, il y a un intérêt à maximaliser $\mathcal{A}^2(x) = \frac{16b^2}{a^2} x^2 (a^2 - x^2) = \frac{16b^2}{a^2} (a^2 x^2 - x^4)$.

La racine carrée ne complique pas inutilement l'expression de la dérivée : $(\mathcal{A}^2)'(x) = \frac{16b^2}{a^2} (2a^2 x - 4x^3)$. Cette dérivée s'annule pour $2a^2 x - 4x^3 = 0 \iff 2x(a^2 - 2x^2) = 0 \implies x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Cette méthode donne le résultat attendu car le maximum de $\mathcal{A}$ et celui de $\mathcal{A}^2$ coïncident.



Application numérique : si le parterre mesure $a = 4,162$ m sur $b = 2,885$ m, on a $x_0 = \frac{4,162}{\sqrt{2}} \approx 2,943$ m et $y_0 = \frac{2,885}{\sqrt{2}} \approx 2,04$ m. L'aire du rectangle d'aire maximale est $2ab = 24,01474$ m². L'ellipse et les deux rectangles sont représentés ci-dessous, à gauche (le rectangle dans lequel est inscrit l'ellipse mesure $2a = 8,324$ m sur $2b = 5,77$ m).

À droite, j'ai représenté la situation dans le cas $a = b$ où l'ellipse est réduite à un cercle. Dans ce cas, on comprend plus facilement d'où vient le rapport $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$: la diagonale du carré intérieur est égale au côté du carré extérieur. L'ellipse est obtenu en appliquant une dilatation selon la direction d'un axe ; la maximalisation de l'aire du rectangle inscrit ne semble pas affectée par cette dilatation.

CORRECTION DE L'EXERCICE 4.20 (MINIMUM)

a) Transformons l'expressions $E(a, b)$ où a et b sont des réels strictement positifs en posant $x = \frac{b}{a}$:

$$\begin{aligned}
E(a, b) &= \sqrt{a+b} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) \\
&= \sqrt{a \left(1 + \frac{b}{a} \right)} \times \frac{1}{\sqrt{a}} \left(1 + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \right) \\
&= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} \times \sqrt{1 + \frac{b}{a}} \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{b}{a}}} \right) \\
&= 1 \times \sqrt{1+x} \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \\
&= \sqrt{1+x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = f(x)
\end{aligned}$$

b) Dérivons $f(x) = \sqrt{1+x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (\sqrt{1+x})' \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) + \sqrt{1+x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)' \\
&= \frac{(1+x)'}{2\sqrt{1+x}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) + \sqrt{1+x} \left(\sqrt{\frac{1}{x}} \right)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) + \sqrt{1+x} \frac{\left(\frac{1}{x} \right)'}{2\sqrt{\frac{1}{x}}} \\
&= \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\sqrt{1+x}} + \sqrt{1+x} \frac{\frac{-1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x}}} \\
&= \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+x}}{2x^2} \\
&= \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+x}}{2x\sqrt{x}} \\
&= \frac{x(\sqrt{x}+1) - \sqrt{x}(\sqrt{1+x})^2}{2x\sqrt{x}\sqrt{1+x}} \\
&= \frac{x\sqrt{x} + x - \sqrt{x} - x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}\sqrt{1+x}} \\
&= \frac{x - \sqrt{x}}{2x\sqrt{x}\sqrt{1+x}}
\end{aligned}$$

Le dénominateur de cette expression est positif sur $\mathbb{R}^{+*}$.Le signe de $f'(x)$ est donc celui du numérateur.Or $x - \sqrt{x} > 0 \iff x > \sqrt{x} \iff \sqrt{x} > 1 \iff x > 1$.La fonction f' est négative jusqu'à $x_0 = 1$ puis positive. Par conséquent f est décroissante puis croissante : pour $x = x_0 = 1$ elle passe par un minimum $m = f(1) = \sqrt{1+1} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1}} \right) = 2\sqrt{2}$.

Le tableau de variation suivant résume cela :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$2\sqrt{2}$		

c) Le minimum de $E(a, b)$ est donc $2\sqrt{2}$; il est atteint lorsque $x = \frac{b}{a} = 1$, c'est-à-dire lorsque $a = b$. On peut donc affirmer que pour tout couple de réels positifs (a, b) , on a $\sqrt{a+b} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) \geq 2\sqrt{2}$.

4.1.5 Fonction Exponentielle

CORRECTION DE L'EXERCICE 4.21 (CONCENTRATION D'UN MÉDICAMENT)

1) Comme $g(t) = 6te^{-t} = uv$, on a $g'(t) = u'v + uv' = 6e^{-t} + 6t(-e^{-t}) = 6e^{-t}(1 - t)$.

On sait que $\forall t \in \mathbb{R}, e^{-t} > 0$ donc $g'(t) > 0 \iff 1 - t > 0 \iff t < 1$.

La fonction g est donc croissante pour $t < 1$ et décroissante sinon.

Elle passe par un maximum atteint pour $t = 1 \in [0; 12]$, et ce maximum vaut $g(1) = 6e^{-1} = \frac{6}{e}$.

2) Une valeur approchée à 10^{-2} près de la concentration maximale du médicament dans le sang, soit de $g(1)$, est obtenue avec la calculatrice : $g(1) = \frac{6}{e} \approx 2,2072766470287$.

On peut donc prendre $2,21mg.L^{-1}$ comme valeur maximum approchée.

3) Pour ne pas dépasser $0,05mg.L^{-1}$, il faut se situer au moment de l'injection ou bien après un certain laps de temps qu'on peut évaluer avec l'algorithme suivant :

```
t ← 60
y ← 2,2
Tant que y > 0,05
t ← t + 1
y ←  $\frac{t}{10} e^{\frac{-t}{60}}$ 
Fin du 'Tant que'
```

Dans cet algorithme les temps sont exprimés en minutes puisqu'on initialise t à 60 (minutes) pour se situer aux alentours du maximum (1 heure, moment auquel la concentration y vaut environ 2,2).

Il faut donc convertir le temps t en minutes dans la formule : $y = 6 \times \frac{t}{60} \times e^{\frac{-t}{60}} = \frac{t}{10} e^{\frac{-t}{60}}$.

Pour que le sportif soit à nouveau en règle avec la législation, il lui faut attendre 6h et 42 minutes environ. J'ai estimé ce temps en traduisant l'algorithme en un programme Python (une autre alternative serait d'utiliser le tableur avec un pas de $\frac{1}{60}$ d'heure) et en convertissant en *h min* la valeur de t obtenue (402 minutes) directement à l'affichage.

```
from math import exp
def g(x):
    return x/10*exp(-x/60)
t=60
y=2.2
while y>0.05:
    t+=1
    y=g(t)
print("t =",t//60,"h",t%60,"min")
```

t = 6 h 42 min

CORRECTION DE L'EXERCICE 4.22 (FONCTIONS HYPERBOLIQUES)

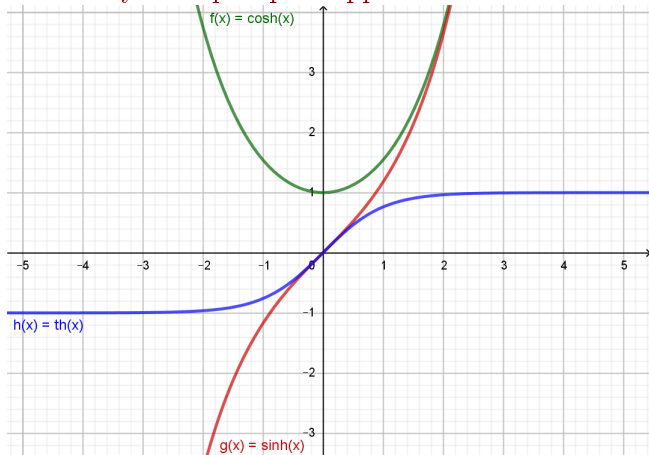
Partie 1 : Étude des variations a) Parité :

- $f(-x) = \frac{e^{-x}+e^x}{2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = f(x)$, f est paire.
- $g(-x) = \frac{e^{-x}-e^x}{2} = -\frac{e^x-e^{-x}}{2} = -g(x)$, g est impaire.

$$\spadesuit \quad h(-x) = \frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x} = -\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = -h(x), \quad h \text{ est impaire.}$$

Graphiquement, on retrouve cette caractéristique :

Courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées pour f et par rapport à l'origine pour g et h .



b) Variations de f et g :

$$f'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})'}{2} = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = g(x)$$

$$g'(x) = \frac{(e^x-e^{-x})'}{2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = f(x).$$

$f(x) \frac{e^x+e^{-x}}{2} > 0$ puisqu'il s'agit de la somme de deux exponentielles qui sont toujours positives comme nous le savons. Or $f(x) = g'(x)$, la fonction g est donc toujours croissante.

$g(0) = \frac{e^0-e^0}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$ et comme g est croissante, $g(x) > 0 \iff x > 0$ et $g(x) < 0 \iff x < 0$. Or $g(x) = f'(x)$, la fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$. Elle passe par un minimum qui est obtenu pour $x = 0$ et qui vaut $f(0) = \frac{e^0+e^0}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$.

c) Variations de h :

$$h(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^x-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{(e^x)^2-1}{e^x}}{\frac{(e^x)^2+1}{e^x}} = \frac{(e^x)^2-1}{(e^x)^2+1} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^{2x}+1-2}{e^{2x}+1} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}+1} - \frac{2}{e^{2x}+1} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}.$$

On a $e^{2x} > 0 \iff e^{2x}+1 > 1$ et comme la fonction inverse est décroissante :

$$\frac{1}{e^{2x}+1} < 1 \iff -\frac{2}{e^{2x}+1} > -2 \iff 1 - \frac{2}{e^{2x}+1} > -1 \iff h(x) > -1.$$

L'expression $h(x) = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$ permet aussi d'obtenir facilement la dérivée :

$$h'(x) = -\frac{2(e^{2x}+1)'}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}.$$

Cette expression est évidemment positive, la fonction h est donc croissante (et minorée par -1).

Remarque : les questions ne portent pas sur les limites mais il serait intéressant de prouver ce qu'on voit sur le graphique : que f et g ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et aussi que $f-g$ tend vers 0 (f et g tendent asymptotiquement vers la courbe de $x \mapsto \frac{e^x}{2}$) ; par ailleurs h a pour limite 1 en $+\infty$ (l'indétermination se lève avec la forme $h(x) = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$). Ce qui se passe au voisinage de $-\infty$ se déduit de ce qui précède du fait de la parité/imparité de ces fonctions.

Partie 2 : Étude des propriétés algébriques

$$\begin{aligned} \text{a) } \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2}{2} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x} - e^{2x} - e^{-2x} + 2e^x e^{-x}}{4} \\ &= \frac{(2+2)e^x e^{-x}}{4} = \frac{(2+2)e^x e^{-x}}{4} = \frac{(2+2)e^0}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \cosh(x+y) &= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} \\
&= \frac{e^x e^y + e^{-x} e^{-y}}{2} = \frac{2(e^x e^y + e^{-x} e^{-y})}{4} \\
&= \frac{e^x e^y + e^{-x} e^{-y} + e^x e^y + e^{-x} e^{-y}}{4} \\
&= \frac{e^x e^y + e^{-x} e^{-y} + (e^{-x} e^y + e^x e^{-y} - e^{-x} e^y - e^x e^{-y}) + e^x e^y + e^{-x} e^{-y}}{4} \\
&= \frac{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} \\
&= \frac{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} + \frac{(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} \\
&= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } \sinh(x+y) &= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} \\
&= \frac{e^x e^y - e^{-x} e^{-y}}{2} = \frac{2(e^x e^y - e^{-x} e^{-y})}{4} \\
&= \frac{e^x e^y - e^{-x} e^{-y} + e^x e^y - e^{-x} e^{-y}}{4} \\
&= \frac{e^x e^y - e^{-x} e^{-y} + (e^{-x} e^y - e^x e^{-y} - e^{-x} e^y + e^x e^{-y}) + e^x e^y - e^{-x} e^{-y}}{4} \\
&= \frac{(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} \\
&= \frac{(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} + \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} \\
&= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^y - e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cosh(x) \sinh(y) + \sinh(x) \cosh(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } \cosh(2x) &= \cosh(x+x) = \cosh(x) \cosh(x) + \sinh(x) \sinh(x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) \\
&= \cosh^2(x) + (\sinh^2(x) - \sinh^2(x)) + \sinh^2(x) = 1 + 2 \sinh^2(x) \\
&= \cosh^2(x) + (\cosh^2(x) - \cosh^2(x)) + \sinh^2(x) = 2 \cosh^2(x) - 1
\end{aligned}$$

$$\text{e) } \sinh(2x) = \sinh(x+x) = \cosh(x) \sinh(x) + \sinh(x) \cosh(x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$$

f) Les formules de linéarisation sont les égalités $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ et $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ (il y a aussi des formules de linéarisation pour exprimer, par exemple, $\cos^3(x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\cos(3x)$ mais nous en resterons au second degré, voir ces questions de trigonométrie dans le chapitre géométrie). Il s'agit donc ici d'exprimer $\cosh^2(x)$ en fonction de $\cosh(2x)$, de même pour $\sinh^2(x)$.

Comme $\cosh(2x) = 2 \cosh^2(x) - 1$ on a $\cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x)+1}{2}$.

Comme $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ on $\sinh^2(x) = \cosh^2(x) - 1 = \frac{\cosh(2x)+1}{2} - 1 = \frac{\cosh(2x)-1}{2}$.

C'est tout pour cette question.

Noter qu'on peut aussi linéariser $\tanh^2(x)$; cela vaut $\frac{\cosh(2x)-1}{\cosh(2x)+1}$. Voir dans votre livre (Déclic) les exercices 114 et 115 de la page 198 qui traitent de ces fonctions; l'exercice 127 p.201 utilise sans le nommer un cosinus hyperbolique.

CORRECTION DE L'EXERCICE 4.23 (APPROXIMATIONS)

Cet exercice est un condensé du TP de votre livre page 203.

1) Étudions la fonction $f : x \mapsto e^x - x - 1$.

$f'(x) = e^x - 1$ et $f'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$.

La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

Par conséquent elle admet un minimum en 0 qui vaut $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$.

On en déduit l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ avec égalité pour $x = 0$.

Cette inégalité s'applique pour le nombre $X = -x : \forall X \in \mathbb{R}, e^X \geq 1 + X \iff \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} \geq 1 - x$.

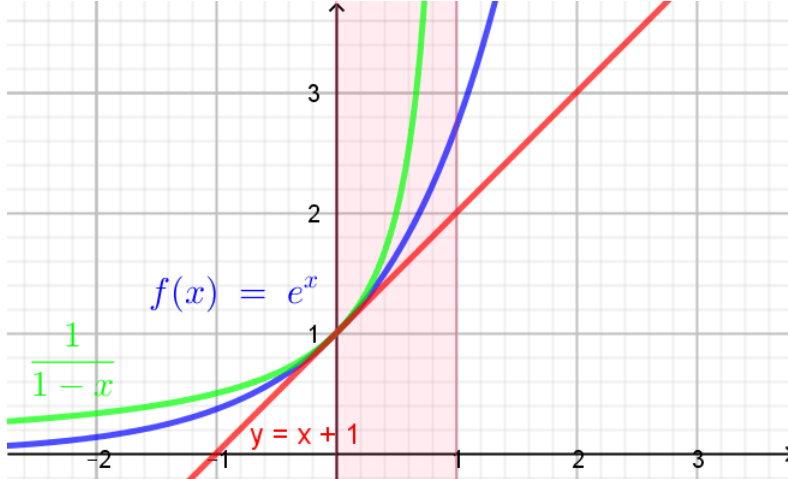
Cette dernière inégalité s'écrit aussi $\frac{1}{e^x} \geq 1 - x$.

Et comme $0 < x < 1 \iff -1 < -x < 0 \iff 0 < 1 - x < 1$, pour $x \in]0, 1[$ on a $1 - x \in]0, 1[$.

On peut donc inverser l'inégalité, ce qui conduit à $e^x \geq \frac{1}{1-x}$.

En assemblant les deux inégalités, on obtient l'encadrement $\forall x \in]0, 1[, 1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$.

Sur ce graphique, dans la bande rose, l'exponentielle est bien comprise entre la droite et l'hyperbole.



2) En posant $x = \frac{1}{n}$, l'encadrement précédent s'écrit :

$$1 + \frac{1}{n} \leq e^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1} = \frac{n-1+1}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}.$$

Les fonctions puissances étant croissantes sur $\mathbb{R}^+$, on peut élever cette inégalité à la puissance n sans en modifier l'ordre :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n.$$

Or, $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n = e^{\frac{n}{n}} = e^1 = e$. L'encadrement devient : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$.

Celui-ci est valable pour les entiers $0 < \frac{1}{n} < 1$ soit pour $n > 1$.

3) Avec $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$, on a :

- ♦ $u_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$ et v_1 n'est pas définie (division par 0)
- ♦ $u_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25$ et $v_2 = \left(1 + \frac{1}{2-1}\right)^2 = 2^2 = 4$
- ♦ $u_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \approx 2,37$ et $v_3 = \left(1 + \frac{1}{3-1}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3,375$
- ♦ $u_4 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} \approx 2,44$ et $v_4 = \left(1 + \frac{1}{4-1}\right)^4 = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{256}{81} \approx 3,16$

On constate que la suite (u_n) est croissante tandis que la suite (v_n) est décroissante. Le nombre e qui est leur limite commune (puisque'il est toujours compris entre u_n et v_n) est successivement encadré par : $\frac{9}{4} = 2,25$ et 4 ; $\frac{64}{27} \approx 2,37$ et $\frac{27}{8} = 3,375$; $\frac{625}{256} \approx 2,44$ et $\frac{256}{81} \approx 3,16$.

Ce dernier encadrement a une amplitude de 0,72 environ.

En prenant le centre de l'intervalle soit $\frac{u_4 + v_4}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{625}{256} + \frac{256}{81} \right) = \frac{116161}{41472} \approx 2,801$ on a une valeur approchée qui s'écarte de la vraie valeur, au pire, de $\frac{1}{2} \left(\frac{256}{81} - \frac{625}{256} \right) = \frac{14911}{41472} \approx 0,359 < 0,5$.

À ce stade, on peut dire que $e \approx 2,8$.

4) Programmons ces suites (u_n) et (v_n) pour obtenir une valeur approchée de e à 10^{-p} près. Dans mon programme je vais insérer un compteur des itérations effectuées pour la précision demandée. On peut aussi étendre un peu le domaine en prenant p entre 1 et 5 (pas seulement entre 3 et 5) :

```
def suite_u(n):
    return (1+1/n)**n

def suite_v(n):
    return (1+1/(n-1))**n

def calcul(p):
    k=2
    epsilon=10**(-p)
    while (suite_v(k)-suite_u(k))/2>epsilon :
        k=k+1
    return k, (suite_v(k)+suite_u(k))/2

for P in range(1,6):
    iterations, valeur = calcul(P)
    print("Pour p={}, il faut {} itérations, la valeur approchée de e est {}".format(P,iterations,valeur))
```

Pour p=1, il faut 14 itérations, la valeur approchée de e est 2.724668563935058.
 Pour p=2, il faut 136 itérations, la valeur approchée de e est 2.7183491912190587.
 Pour p=3, il faut 1360 itérations, la valeur approchée de e est 2.718282502053091.
 Pour p=4, il faut 13592 itérations, la valeur approchée de e est 2.718281835202254.
 Pour p=5, il faut 135915 itérations, la valeur approchée de e est 2.718281828496292.

Noter que dans votre livre (p.203), cette approche est traitée plus complètement puisqu'on y trace des courbes avec le module `pylab` et on envisage également le calcul approché de e^a avec un algorithme basé sur un encadrement par deux suites.

CORRECTION DE L'EXERCICE 4.24 (LIMITES)

1a) Comme $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$, on a $f'(x) = e^x - x$.

$f'(x) > 0 \iff e^x > x$. On a déjà montré que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > x + 1$ et comme $\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 > x$, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > x + 1 > x$ et, finalement, que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1b) Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$x > 0 \iff f(x) > f(0) \iff e^x - \frac{x^2}{2} > e^0 - \frac{0^2}{2} \iff e^x - \frac{x^2}{2} > 1 \iff e^x > \frac{x^2}{2} + 1 > \frac{x^2}{2}.$$

En divisant par $x > 0$ on obtient $\forall x > 0, \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.

Comme on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, d'après le théorème de comparaison, on en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

1c) La $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$ est une forme indéterminée du type $\infty \times 0$.

En considérant l'inverse de $\frac{e^x}{x}$, soit $\frac{1}{\frac{e^x}{x}} = \frac{x}{e^x} = x e^{-x} = -(-x e^{-x})$ et en posant $X = -x$, on peut réécrire cette inverse $-(X e^X)$. Or, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, son inverse tend vers 0.

Mais quand x tend vers $+\infty$, $X = -x$ tend vers $-\infty$ et donc $\lim_{X \rightarrow -\infty} -X e^X = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} \left(= \frac{1}{+\infty} \right) = 0$.

D'où $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = -0 = 0$, soit en renommant notre variable muette x , $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$.

2a) Comme $g(x) = \frac{x}{1+e^{-x}}$, on a $g'(x) = \frac{1+e^{-x}-x(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} = \frac{1+(1+x)e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

Le dénominateur étant positif (c'est un carré), g' est du signe du numérateur $1 + (1+x)e^{-x}$. Notons $h(x)$ cette expression.

2b) $h'(x) = (1+x)'e^{-x} + (1+x)(e^{-x})' = e^{-x} + (1+x)(-e^{-x}) = e^{-x}(1-1-x) = -x e^{-x}$.

$h'(x) > 0 \iff -x > 0 \iff x < 0$.

La fonction h est croissante jusqu'à $x = 0$ et puis décroissante ; elle passe donc par un maximum égal à $h(0) = 1 + (1+0)e^{-0} = 2$.

Pour $x > 0$ la fonction h reste strictement positive car somme et produit de nombres positifs.

Par contre, pour $x < 0$, il existe des valeurs négatives puisque, par exemple :

$$h(-1,3) = 1 + (1-1,3)e^{1,3} = 1 - 0,3e^{1,3} \approx -0.100789 \text{ d'après ma calculatrice.}$$

Par contre $h(-1,2) = 1 + (1-1,2)e^{1,2} = 1 - 0,2e^{1,2} \approx 0.3359766$ est positif.

De $h(-1,3) < 0$ et $h(-1,2) > 0$, on peut déduire que h s'annule entre $-1,3$ et $-1,2$ (cela vient du fait que h est continue). Comme h est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$ on est, de plus, certain de l'unicité de la valeur du réel $\alpha \in]-1,3; -1,2[$ où la fonction h s'annule.

Pour conclure, $x > \alpha \implies h(x) > 0 \implies g'(x) > 0 \implies g$ croissante.

La fonction g est décroissante puis croissante, elle passe donc par un minimum $g(\alpha)$.

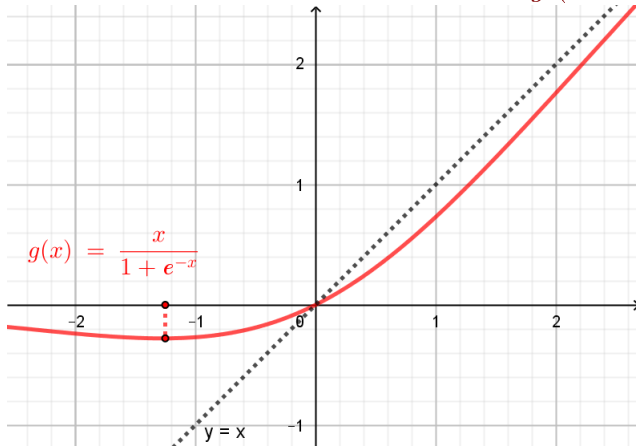
2c) $g(x) - x = \frac{x}{1+e^{-x}} - x = \frac{x-x(1+e^{-x})}{1+e^{-x}} = \frac{-x e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x e^{-x}}{1+e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^x}{1+e^x} = 0$ d'après ce qu'on a vu dans la partie a).

On en déduit que, lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe de g se rapproche asymptotiquement de la droite

d'équation $y = x$.

La courbe ci-dessous montre la fonction g (en rouge), son asymptote oblique et son minimum en α :



CORRECTION DE L'EXERCICE 4.25 (DEVINETTE)

a) Déterminons les nombres α , β et γ en fonction de a , b et c :

- ♦ $f(0) = be^0 = b$, or le point $A(0; f(0) = \alpha)$ appartient à la courbe de f , donc $\alpha = b$.
- ♦ $f'(x) = (acx + a + bc)e^{cx}$ d'où, comme $f'(\beta) = 0$ (tangente horizontale en B), on tire :
 $(ac\beta + a + bc)e^{c\beta} = 0 \iff ac\beta + a + bc = 0$ (car $e^{c\beta} > 0$).
 Par conséquent $\beta = -\frac{a+bc}{ac} = -\frac{1}{c} - \frac{b}{a}$.
- ♦ L'équation de la tangente en A est $y = f(0) + f'(0)(x - 0) = \alpha + f'(0)x$.
 Comme $C(\gamma; 0)$ est sur cette tangente, on tire $0 = \alpha + f'(0)\gamma \iff f'(0) = -\frac{\alpha}{\gamma}$.
 Or $f'(0) = (a + bc)e^0 = a + bc$.
 Par conséquent $a + bc = -\frac{\alpha}{\gamma} \iff \gamma = -\frac{\alpha}{a+bc} = -\frac{b}{a+bc}$.

b) Dans le cas particulier de ce graphique, on a $\alpha = 1$, $\beta \approx 2,5$ et $\gamma = -1$.

- ♦ $b = 1$ (car $b = \alpha$)
- ♦ $\beta = -\frac{1}{c} - \frac{b}{a} = 2,5 \iff -\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + 2,5$ (car $b = 1$).
- ♦ $-1 = -\frac{1}{a+c} \iff a + c = 1 \iff c = 1 - a$ (car $\gamma = -\frac{b}{a+bc}$ et $b = 1$).

Des deux dernières égalités, on tire $\frac{1}{a-1} = \frac{1}{a} + 2,5$ d'où a est solution de l'équation du second degré

$$a^2 - a - \frac{2}{5} = 0 \text{ qui a pour solutions } a_1 = \frac{1+\sqrt{\frac{13}{5}}}{2} \approx 1,3 \text{ et } a_2 = \frac{1-\sqrt{\frac{13}{5}}}{2} \approx -0,3.$$

Ces valeurs de a conduisent aux valeurs $c_1 = 1 - a_1 = a_2$ et $c_2 = 1 - a_2 = a_1$.

Finalement, on obtient deux solutions :

$$1. f_1(x) = (a_1x + b)e^{c_1x} \approx (1,3x + 1)e^{-0,3x}$$

$$2. f_2(x) = (a_2x + b)e^{c_2x} \approx (-0,3x + 1)e^{1,3x}$$

La figure ci-dessous montre les courbes de ces deux fonctions. Celles-ci ne sont pas superposables mais correspondent toutes les deux aux contraintes de l'énoncé. Il va sans dire que ce n'est pas f_2 mais bien f_1 qui était donnée dans le sujet. Ce qui distingue les deux fonctions est la valeur du maximum qui vaut 2 dans l'énoncé.

Ci-dessous, l'approche d'une meilleure valeur grâce au tableur est effectuée progressivement : j'ai entré les calculs du discriminant Δ de l'équation, des coefficients a et c qui en sont les solutions et de l'image de β pour différentes valeurs de β dans un voisinage de 2, 5. La valeur la plus proche de 2 étant obtenue pour $\beta = 2,54$ à 0,01 près, je recommence en balayant le voisinage de cette valeur avec un pas $h = 0,001$. Je trouve alors $\beta = 2,543$ puis, en procédant de même, $\beta = 2,5430$ à 0,0001 près, $\beta = 2,54303$ à 0,00001 près et $\beta = 2,543031$ à 0,000001 près.

[illegible]

0.001					0.0001							
2.54					2.5425							
0	0.001	0.002	0.003	0.004	0	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	
2.54	2.541	2.542	2.543	2.544	2.5425	2.5426	2.5427	2.5428	2.5429	2.543	2.5431	
2.57480315	2.57418339	2.57356412	2.57294534	2.57232704	2.57325467	2.57319279	2.57313092	2.57306906	2.5730072	2.57294534	2.57288341	
1.30230966	1.30221309	1.30211659	1.30202016	1.30192379	1.30206837	1.30205873	1.30204908	1.30203944	1.3020298	1.30202016	1.30201052	
-0.30230937	-0.3022131	-0.3021166	-0.3020202	-0.3019238	-0.3020684	-0.30205873	-0.3020491	-0.3020394	-0.3020298	-0.3020202	-0.3020105	
1.99885846	1.99923504	1.99961162	1.99998819	2.00036476	1.9997999	1.99983756	1.99987522	1.99991288	1.99995053	1.99998819	2.00002588	
0.00141454	0.00076496	0.00038838	1.181E-005	0.00036476	0.00099999	0.00016244	0.00012478	8.712E-005	4.947E-005	1.181E-005	2.585E-005	

0.00001						0.000001						0.0000001										
2.543						2.54303						2.543031										
0	0.00001	0.00002	0.00003	0.00004	0	0.000001	0.000002	0	0.0000001	0.0000002	0.0000003	0.0000004	0.0000005									
2.543	2.54301	2.54302	2.54303	2.54304	2.54303	2.543031	2.543032	2.543031	2.5430311	2.5430312	2.5430313	2.5430314	2.5430315									
2.57294534	2.57293915	2.57293297	2.57292678	2.5729206	2.5729268	2.5729262	2.5729255	2.57292617	2.5729261	2.57292604	2.57292598	2.57292592	2.57292586									
1.30202016	1.30201919	1.30201823	1.30201727	1.3020163	1.3020173	1.3020172	1.3020171	1.30201717	1.30201716	1.30201715	1.30201714	1.30201713	1.3020171									
-0.3020202	-0.3020192	-0.3020182	-0.3020173	-0.3020163	-0.3020173	-0.3020172	-0.3020171	-0.3020172	-0.3020172	-0.3020172	-0.3020171	-0.3020171	-0.3020171									
1.9999819	1.9999916	1.99999572	1.99999949	2.00000325	1.9999995	1.9999999	2.0000002	1.99999986	1.9999999	1.99999994	2	2	2.00000005									
1.1818608	0.044E-006	0.278E-006	5.121E-007	3.254E-006	5.121E-007	1.356E-007	2.410E-007	1.356E-007	9.790E-008	6.025E-008	2.259E-008	1.070E-008	5.272E-008									

4.1.6 Le coin du chercheur

CORRECTION DE L'EXERCICE 4.26

Calcul de l'aire sous la courbe de la fonction carrée

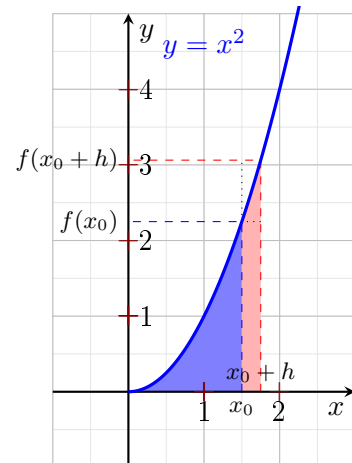
Pour $h > 0$, la différence $\mathcal{S}(x_0 + h) - \mathcal{S}(x_0)$ correspond à l'aire du domaine contenu sous la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^2$ entre la valeur $x = x_0$ et $x = x_0 + h$ (dans le schéma ci-contre, ce domaine est en rose).

On peut encadrer cet accroissement de l'aire avec les aires de deux rectangles de base h :

- ♦ le plus petit a pour hauteur $f(x_0) = x_0^2$; son aire est hx_0^2
- ♦ le plus grand a pour hauteur $f(x_0 + h) = (x_0 + h)^2$; son aire est $h(x_0 + h)^2$

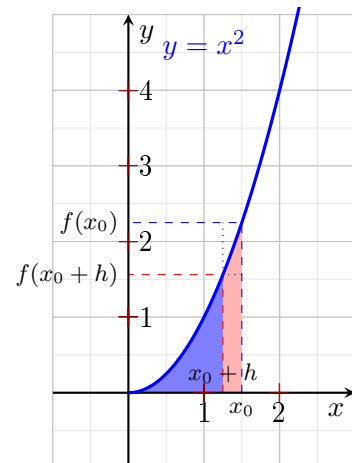
On peut donc écrire $hx_0^2 \leq \mathcal{S}(x_0 + h) - \mathcal{S}(x_0) \leq h(x_0 + h)^2$ et en divisant cet encadrement par $h > 0$, on obtient :

$$x_0^2 \leq \frac{\mathcal{S}(x_0 + h) - \mathcal{S}(x_0)}{h} \leq (x_0 + h)^2$$



Lorsque $h < 0$ avec $x_0 + h \geq 0$, comme $x_0 + h < x_0$, la fonction $\mathcal{S}$ étant naturellement croissante, de même que la fonction f , on a $\mathcal{S}(x_0 + h) < \mathcal{S}(x_0)$. L'accroissement de l'aire entre $x_0 + h$ et x_0 est $\mathcal{S}(x_0) - \mathcal{S}(x_0 + h)$. Cette différence est comprise entre $(-h) \times (x_0 + h)^2$ et $(-h) \times x_0^2$ (on multiplie par $(-h) > 0$ car c'est la largeur des rectangles). On a donc $(-h) \times (x_0 + h)^2 \leq \mathcal{S}(x_0) - \mathcal{S}(x_0 + h) \leq (-h) \times x_0^2$, et il suffit de diviser cet encadrement par $(-h) > 0$ pour obtenir, après simplification du quotient par -1 , l'encadrement :

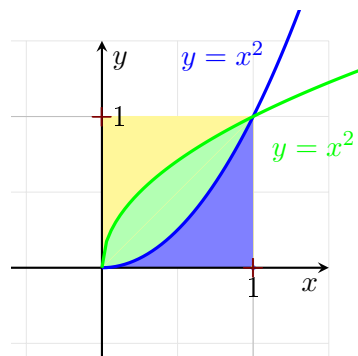
$$(x_0 + h)^2 \leq \frac{\mathcal{S}(x_0 + h) - \mathcal{S}(x_0)}{h} \leq x_0^2$$



Faisons maintenant tendre h vers 0 : $\lim_{h \rightarrow 0} (x_0 + h)^2 = x_0^2$. Le quotient est donc encadré par deux nombres qui ont même limite. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{S}(x_0 + h) - \mathcal{S}(x_0)}{h} = \mathcal{S}'(x_0) = x_0^2$.

La fonction $\mathcal{S}$ a donc pour nombre dérivé en x_0 , le nombre $f(x_0) = x_0^2$. Comme cela est vrai pour tout $x_0 > 0$, on en déduit que la dérivée de $\mathcal{S}$ est f .

Les fonctions qui ont pour dérivée $f(x) = x^2$ sont les fonctions F définies par $F(x) = \frac{x^3}{3} + k$ où k est un réel quelconque. Comme on doit avoir $\mathcal{S}(0) = 0$ (l'aire est nulle si on la mesure sous la courbe entre 0 et 0), pour avoir $\mathcal{S}(0) = F(0) = \frac{0^3}{3} + k = 0$, il faut nécessairement prendre $k = 0$. Finalement, on obtient $\mathcal{S}(x) = \frac{x^3}{3}$ pour tout $x \geq 0$.



Par exemple, pour $x = 1$, on obtient $\mathcal{S}(1) = \frac{1}{3}$. sur notre illustration, l'aire en bleu est égale à l'aire en jaune (au-dessus de la courbe de la fonction racine carrée) et aussi à l'aire en vert (entre les deux courbes).

Calcul du volume d'une sphère

Déterminons le rayon $r(z_0)$ du petit cercle de centre $\Omega(0, 0, z_0)$ (le rayon dépend de z_0 et de la constante R). Pour cela, considérons le triangle rectangle en Ω qui est dessiné en perspective sur la 1^{re} figure et en vraies grandeurs sur la 2^e :

son hypoténuse mesure R , les deux cathètes mesurant z_0 et $r(z_0)$. Ainsi on a $r(z_0) = \sqrt{R^2 - z_0^2}$.

L'accroissement de $\mathcal{V}$ quand la hauteur passe de z_0 à $z_0 + h$, où h est un réel positif tel que $z_0 + h \leq R$, va être encadré par deux volumes d'épaisseur h :

- ♦ le plus petit a pour rayon $r(z_0 + h) = \sqrt{R^2 - (z_0 + h)^2}$; son volume est $h\pi(R^2 - (z_0 + h)^2)$
- ♦ le plus grand a pour rayon $r(z_0) = \sqrt{R^2 - z_0^2}$; son volume est $h\pi(R^2 - z_0^2)$

Notez que $z_0 < z_0 + h$ mais que $r(z_0) > r(z_0 + h)$, car la fonction r est décroissante. On peut donc écrire

$$h\pi(R^2 - (z_0 + h)^2) \leq \mathcal{V}(z_0 + h) - \mathcal{V}(z_0) \leq h\pi(R^2 - z_0^2)$$

et, en divisant cet encadrement par $h > 0$, on obtient

$$\pi(R^2 - (z_0 + h)^2) \leq \frac{\mathcal{V}(z_0 + h) - \mathcal{V}(z_0)}{h} \leq \pi(R^2 - z_0^2)$$

Comme précédemment, on peut montrer que cet encadrement subsiste pour tout $h < 0$, en inversant les bornes :

$$\pi(R^2 - z_0^2) \leq \frac{\mathcal{V}(z_0 + h) - \mathcal{V}(z_0)}{h} \leq \pi(R^2 - (z_0 + h)^2)$$

Dans les deux cas, en faisant tendre h vers 0, on réalise, avec le théorème des gendarmes, que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{V}(z_0 + h) - \mathcal{V}(z_0)}{h} = \mathcal{V}'(z_0) = \pi(R^2 - z_0^2)$$

La fonction $\mathcal{V}$ a donc pour nombre dérivé en z_0 , le nombre $\pi(R^2 - z_0^2)$. Comme cela est vrai pour tout $z_0 < R$, on en déduit que la dérivée de $\mathcal{V}$ est $g : x \mapsto \pi(R^2 - x^2)$.

Les fonctions qui ont pour dérivée le polynôme du second degré $\pi(R^2 - x^2) = -\pi x^2 + \pi R^2$ sont les fonctions G définies par $G(x) = -\frac{\pi x^3}{3} + \pi R^2 x + k$ où k est un réel quelconque. La valeur initiale étant $\mathcal{V}(0) = 0$, on en déduit que $k = 0$ et donc que $\mathcal{V}(z) = -\frac{\pi z^3}{3} + \pi R^2 z$ pour tout $z \leq R$.

Le volume de la demi-sphère de rayon R est obtenu en remplaçant z par R dans la formule précédente. On trouve $\mathcal{V}(R) = -\frac{\pi R^3}{3} + \pi R^3 = \frac{2\pi R^3}{3}$. En doublant cette valeur, on retrouve la formule du volume de la sphère de rayon R : $\mathcal{V}_{\text{sphère}} = \frac{4\pi R^3}{3}$.

Une question : on veut couper la demi-sphère parallèlement au plan xOy et obtenir deux solides de même volume. Quelle est la valeur de z qui convient ? Il faut résoudre l'équation $\mathcal{V}(z) = -\frac{\pi z^3}{3} + \pi R^2 z = \frac{\pi R^3}{3}$, soit $-z^3 + 3R^2 z = R^3$. Une équation du 3^e degré ! En posant $x = \frac{z}{R}$ elle se réduit à $x^3 - 3x + 1 = 0$. Je vous laisse vérifier qu'on trouve alors $x = 2 \cos(\frac{4\pi}{9}) \approx 0,3472963553$, soit $z \approx 0,3472963553R$.

