4 Exercices sur les fonctions

Table des matières

4.1 Énoncés

4.1.1 Majoration, minoration, comparaison, variations

EXERCICE 4.1 (ENCADREMENTS)

1. Montrer que les fonctions f et g suivantes sont bornées sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{1+\sin^2 x} \; ; \; g(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x^2}}$$

2. Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = \sqrt{1+x+x^2}$.

a) Montrer que, $\forall x > 0, x + \frac{1}{2} < h(x) < x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x}$.
b) Soit $\mathscr{D}$, la bande définie par les droites d'équations $y = x + \frac{1}{2}$ et $y = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{20}$.
Montrer que, pour $x \geqslant 10$ la courbe représentative de h est entièrement contenue dans $\mathscr{D}$.

3. Vérifier les résultats obtenus aux questions précédentes en traçant les courbes.

Donner les paramètres d'une fenêtre d'affichage pertinente pour effectuer chacune des vérifications.

EXERCICE 4.2 (MINORATION)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

a) Étudier les variations de f sur $]0;+\infty[$ en étudiant le signe de son taux d'accroissement.
b) Dresser le tableau des variations de f et en déduire la valeur de son minimum sur cet intervalle.

2. *Application* : soient a, b, c, d, e, f, g et h, huit réels strictement positifs.

Démontrer l'inégalité : $\frac{a}{h} + \frac{b}{g} + \frac{c}{f} + \frac{d}{e} + \frac{e}{d} + \frac{f}{c} + \frac{g}{b} + \frac{h}{a} \geqslant 8$

Exercice 4.3 (Olympiades)
Question des Olympiades : comparer les nombres $A = \frac{1{,}000\,000\,004}{1{,}000\,000\,006^2}$ et $B = \frac{0{,}999\,999\,995^2}{0{,}999\,999\,998}$

1. Utiliser la calculatrice. Que peut-on en déduire ?
   Posée dans les années 80, la question portait sur $\frac{1{,}000\,000\,4}{1{,}000\,006^2}$ et $\frac{0{,}999\,995^2}{0{,}999\,998}$.
   En quoi cela fait-il une différence ?
2. Soient A et B les fonctions définies par $A(x) = \frac{1+4x}{(1+6x)^2}$ et $B(x) = \frac{(1-5x)^2}{1-2x}$ pour tout $x \in [0; \frac{1}{2}[$.
   Vérifier que $A = A(10^{-9})$ et $B = B(10^{-9})$, puis montrer qu'il existe un réel $a \in [0; \frac{1}{2}[$ tel que $\forall x \in [0; a], A(x) > B(x)$.
   Donner une valeur approchée par défaut de a puis conclure.

Exercice 4.4 (Tangente)

1. Comparer sur $]0; +\infty[$ les fonctions f et g définies par : $f(x) = \frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x}$; $g(x) = \frac{x}{2}$
2. En déduire la comparaison sur $]-\infty; 0[$.
3. Vérifier les résultats obtenus en traçant les courbes.
   La droite est-elle tangente à la courbe de f ?

Exercice 4.5 (Patron de boîte)
On découpe des coins carrés de côté x dans une feuille rectangulaire mesurant 50 cm sur 80 cm. En repliant les quatre bords rectangulaires du patron ainsi constitué, on forme une boîte parallélépipédique de volume $\mathscr{V}(x)$ que l'on souhaite maximiser.

1. Préciser le domaine de définition de $\mathscr{V}$ et expliciter $\mathscr{V}(x)$.
2. Soit x_0 un réel de $]0; 25[$. Déterminer le polynôme P tel que : $\mathscr{V}(x) - \mathscr{V}(x_0) = (x - x_0)P(x)$.
3. Donner un argument pour justifier que $\mathscr{V}$ admet un maximum sur $]0; 25[$.
4. En supposant que le maximum est atteint pour la valeur x_0, justifier pourquoi on doit avoir $P(x_0) = 0$. En déduire la valeur de x_0. Montrer qu'alors on peut écrire $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ où Q est un polynôme à déterminer. Prouver alors que l'on a bien $\mathscr{V}(x) < \mathscr{V}(x_0)$ pour tout réel x de $]0; 25[$, ce qui achève la démonstration.

Remarque : On pourrait appliquer au polynôme $\mathscr{V}$ la méthode de Fermat vue au chapitre 1. On pourra aussi, à la fin du chapitre, utiliser avec profit la méthode de la dérivée pour résoudre ce problème. Ces trois approches diffèrent mais fournissent le même résultat exact. Les méthodes algorithmiques (dichotomie, balayage) sont d'une portée plus générale mais ne fournissent qu'un résultat approché.

4.1.2 Fonctions de référence

Exercice 4.6 (Portée d'un phare)
En supposant la Terre sphérique de rayon 6400 km, on se demande jusqu'à quelle distance, un observateur M placé à la verticale d'un point I de la surface de la mer, voit un point P de cette surface. Faire un schéma et noter $MI = x$ l'altitude de l'observateur, puis montrer que cette distance est donnée par la fonction $f : x \mapsto \sqrt{(6400 + x)^2 - 6400^2}$. Simplifier $f(x)$ puis montrer, ce que l'on comprend intuitivement, que cette fonction est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Application : Jusqu'à quelle distance se voit, en mer, l'éclat du phare de l'Île Vierge (Finistère), le plus haut de France, dont l'élévation du foyer est de 84 m ?

EXERCICE 4.7 (DEVINETTE)
On donne la fonction $f : x \longmapsto a\sqrt{x+b}+c$ où a, b, c sont des réels
Dans le cas suivant, déterminer a, b, c et tracer la courbe représentative de f pour vérifier :

$$f(0) = 4\,;\ f(10) = 2\,;\ f(27) = 0$$

EXERCICE 4.8 (DISTANCES)
On considère la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ et les points $A(2;0)$ et $B(4;2)$.
Déterminer, dans chacun des cas suivants, la valeur de l'extremum sur $[0;4]$ d'une distance $d(x)$:

a) Graphiquement : à partir de la courbe $\mathscr{C}$ et d'un logiciel de géométrie comme GeoGebra.

b) Par le calcul : déterminer $d(x)$, étudier d et déterminer son extremum sur $[0;4]$.

1. Lorsque le point M d'abscisse x se déplace sur $\mathscr{C}$, la distance $d_1(x) = AM$ varie avec x et passe par un minimum, atteint pour $x = x_1$. Déterminer x_1 et $d_1(x_1)$.
2. Lorsque le point M d'abscisse x se déplace sur $\mathscr{C}$, le point N de la droite (BO) et d'abscisse x est à une distance $d_2(x) = MN$ qui varie avec x et passe par un maximum, atteint pour $x = x_2$. Déterminer x_2 et $d_2(x_2)$.
3. Lorsque le point N d'abscisse x se déplace sur la droite (BO), la distance $d_3(x) = AN$ varie avec x et passe par un minimum, atteint pour $x = x_3$. Déterminer x_3 et $d_3(x_3)$.

EXERCICE 4.9 (COURBES SYMÉTRIQUES)

1. Pour chacun des cas suivants, déterminer le réel a tel que $g(x) = a - f(x)$ puis montrer que les courbes représentatives de f et g sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \frac{a}{2}$. Tracer ensuite les deux courbes pour visualiser cette relation :

$$\text{a) } f(x) = x^2, g(x) = 3 - x^2, \text{ b) } f(x) = \frac{1}{x-1}, g(x) = 1 - \frac{1}{x-1}, \text{ c) } f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 1 - \sqrt{x}$$

2. Pour chacun des cas suivants, déterminer le réel a tel que $g(x) = f(a-x)$ puis montrer que les courbes représentatives de f et g sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$. Tracer ensuite les deux courbes pour visualiser cette relation :

$$\text{a) } f(x) = 2x^2, g(x) = 2(1-x)^2, \text{ b) } f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \frac{1}{5-x}, \text{ c) } f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{1-x}$$

EXERCICE 4.10 (COMPOSITION)

1. Déterminer les ensembles de définition de chacune des fonctions suivantes et montrer que chacune d'elles peut s'écrire sous la forme $f \circ g$ où f et g sont des fonctions de référence à préciser.

$$\text{a) } x \mapsto (3x-2)^2, \text{ b) } x \mapsto 5\sqrt{x}+2, \text{ c) } x \mapsto \frac{1}{4x-3}, \text{ d) } x \mapsto \sqrt{1-2x}$$

2. On considère les quatre fonctions $f_1 : x \mapsto x^2+1$, $f_2 : x \mapsto 2x$, $f_3 : x \mapsto x+1$, $f_4 : x \mapsto x^2$.
Établir les relations suivantes :

$$\text{a) } f_1 = f_3 \circ f_4, \text{ b) } f_1 + f_2 = f_4 \circ f_3, \text{ c) } f_1 \circ f_2 = 4f_4 + 1, \text{ d) } f_2 \circ f_1 = 2(f_3 \circ f_4)$$

3. En reconnaissant dans les fonctions suivantes des compositions de fonctions usuelles, étudier leurs sens de variation sur les intervalles où elles sont définies :

$$\text{a) } x \mapsto \frac{1}{x^2+2}, \text{ b) } x \mapsto \sqrt{1-\sin x} \text{ sur } [0;\pi], \text{ c) } x \mapsto 2 + (1-x)^3, \text{ d) } x \mapsto 1 - \sqrt{1+x^2}$$

4.1.3 Limites de fonctions

EXERCICE 4.11 (LIMITES EN UN POINT)

1. Étudier les limites en 0 des fonctions suivantes :

Indication : transformer les écritures pour $x \neq 0$, celle de $g(x)$ en utilisant la quantité conjuguée.

$$f : x \longmapsto \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x} \text{ et } g : x \longmapsto \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

2. On peut considérer que la fonction g précédente donne le coefficient directeur de la droite (AM) où A et M sont les points de coordonnées $A(1; \sqrt{1})$ et $M(1+x; \sqrt{1+x})$. Donner alors l'interprétation graphique de $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$. Tracer la courbe de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ pour $x \in [0; 2]$ ainsi que la tangente à cette courbe au point d'abscisse 1. Quelle est l'équation de cette tangente ? Faire de même pour interpréter $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

3. Étudier les limites en 4 des fonctions suivantes et interpréter ces limites :

$$f : x \longmapsto \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} \text{ et } g : x \longmapsto \frac{x\sqrt{x} - 8}{4 - x}$$

EXERCICE 4.12 (SINUS ET COSINUS)

On considère les fonctions $f : x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ et $g : x \longmapsto \frac{1 - \cos x}{x}$ dans un voisinage de 0^+.

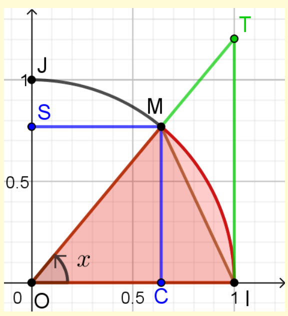
1. *Approche directe* :
Quelles sont les limites en 0^+ du numérateur et du dénominateur de ces deux fonctions ?
Que peut-on en conclure sur les limites en 0^+ ?

2. *Expérimentation* :
Utiliser la fonction tableur de la calculatrice (en mode radian) pour compléter le tableau suivant :

x	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001	0,0005	0,0001	0,00005	0,00001
$\sin(x)$									
$f(x)$									

Quelle conjecture peut-on émettre concernant la fonction sin pour les valeurs proches de 0 ?
Quelle semble être la limite cherchée ? Mêmes questions pour les fonctions $x \longmapsto 1 - \cos x$ et g.

3. *Encadrement* :
Soient x un réel de $]0; \frac{\pi}{2}[$, M le point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne x et les points C, I, S, T définis par la figure ci-contre.



a) Exprimer les aires des triangles TOI et MOI ainsi que celle du secteur circulaire MOI en fonction de x.

b) En déduire les encadrements, valables sur $]0; \frac{\pi}{2}[$:

$$\sin x < x < \tan x, \text{ puis } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

c) Déterminer alors la limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers 0^+.

d) Montrer que, pour $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, on a $\frac{1}{1+\cos x} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{1 - \cos x}{x^2}$,
en déduire que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ puis que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

EXERCICE 4.13 (ASYMPTOTES OBLIQUES)

1. Quelle est la limite de la fonction $f : x \longmapsto \frac{x^3}{x^2+1}$ quand x tend vers $\pm\infty$?
Déterminer également $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - x$.
En déduire que la courbe de f admet pour asymptote la droite d'équation $y = x$.
Tracer la courbe et la droite pour $-5 < x < 5$ pour visualiser et vérifier ce comportement.

2. Quelles sont les limites de la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{1+x^2} + x$ quand x tend vers $\pm\infty$?
Déterminer également $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - 2x$.
En déduire le comportement asymptotique de la courbe de g au voisinage de l'infini.
Tracer la courbe et ses asymptotes pour $-5 < x < 5$ pour visualiser ce comportement.

3. Quelles sont les limites de la fonction $h : x \longmapsto \frac{2x^2+3x-1}{x+2}$ quand x tend vers $\pm\infty$?
Déterminer les réels a, b, c tels que $h(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$ pour tout $x \neq 2$. Étudier les limites de $h(x) - (ax + b)$ au voisinage de l'infini et en déduire le comportement asymptotique de $\mathscr{C}_h$, la courbe de h. Tracer $\mathscr{C}_h$ et la droite d'équation $y = ax + b$ pour visualiser ce comportement.

4.1.4 Fonctions dérivées et applications

EXERCICE 4.14 (SECTEUR CIRCULAIRE)

On souhaite déterminer les dimensions – rayon r et angle α – du secteur circulaire de périmètre p et d'aire maximale. Sans perte de généralité, on pourra prendre $p = 4$.

1. Résoudre ce problème en prenant r comme variable.
2. Résoudre ce problème en prenant α comme variable.

EXERCICE 4.15 (FONCTION DE 2 VARIABLES)

On souhaite déterminer le maximum de la fonction $f : x, y \longmapsto \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ pour $x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1. En se plaçant dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, caractériser la position du point $M(x; y)$ par ce qu'on appelle ses coordonnées polaires (ρ, θ) : $\rho = OM$ étant la distance à l'origine et θ étant l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.
2. Exprimer $f(x, y)$ en fonction de ρ et θ et vérifier que cette expression peut s'écrire $F(\rho) \times G(\theta)$ où F et G sont des fonctions d'une seule variable.
3. Déterminer le maximum de $F(\rho) \times G(\theta)$ en maximisant séparément F et G puis conclure.

EXERCICE 4.16 (BOÎTE DE CONSERVE)

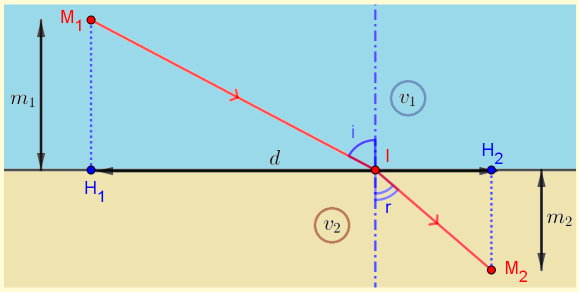
On veut minimiser le poids d'une boîte de conserve cylindrique métallique (pour économiser sur le coût de la matière nécessaire à sa fabrication) tout en maintenant constant son volume $\mathscr{V}$. L'épaisseur des parois étant négligeable, on ne fait pas de distinction entre le volume extérieur du cylindre et sa contenance.

1. En considérant que la variable est la hauteur x, exprimer le rayon R de la base puis l'aire totale $\mathscr{A}$ des parois du cylindre en fonction de x.
2. Déterminer la valeur de x qui minimise $\mathscr{A}$. Pour cette valeur, quel est le rayon R de la base ?

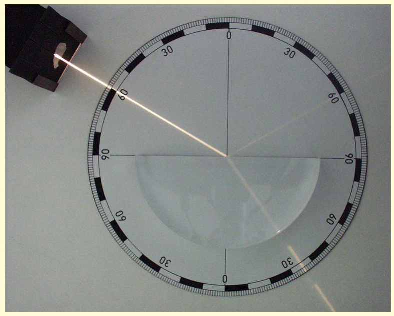
Exercice 4.17 (Loi de Snell-Descartes)

La lumière suit le chemin le plus court. En changeant de milieu, si les vitesses de propagation dans les deux milieux sont différentes, la trajectoire suivie n'est pas droite : la lumière est diffractée.
Supposons qu'un rayon de lumière, émis d'un point M_1 situé dans un milieu 1 où la vitesse de propagation est v_1, passe dans un milieu 2 où la vitesse de propagation est v_2 pour atteindre le point M_2, franchissant la surface qui sépare les deux milieux (appelée dioptre) en I (appelé point d'incidence). La question est de déterminer la position de I.
Selon les notations de la figure, on a $H_1M_1 = m_1$, $H_2M_2 = m_2$ et $H_1H_2 = d$. Les angles d'incidence i et de réfraction r sont traditionnellement mesurés entre le rayon et la normale au dioptre (la perpendiculaire à (H_1H_2) passant par I). On note x la distance variable H_1I.

1. Exprimer en fonction des données la durée $t(x)$ du trajet $M_1 - I - M_2$ ainsi que les sinus des angles i et r.
2. Déterminer l'équation que doit vérifier la valeur x_0 de x pour laquelle le trajet a une durée minimale.
3. Déduire des deux questions précédentes la relation dite loi de Snell-Descartes pour la réfraction : $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}$.



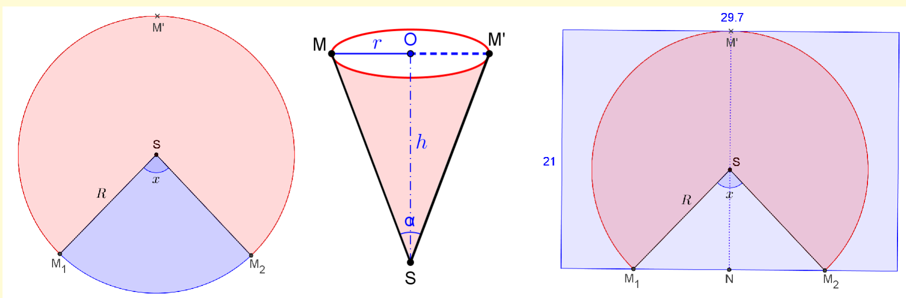
Application : le milieu 1 est de l'air, le milieu 2 du verre. Un dispositif expérimental (voir la photo ci-contre) permet de calculer le rapport $\frac{v_1}{v_2}$. Effectuer ce calcul puis, sachant que la vitesse de propagation dans l'air est environ de 300 000 km/s, calculer la vitesse de propagation dans le verre. Déterminer ensuite la valeur maximale théorique que l'on peut obtenir pour l'angle de réfraction (en supposant droit l'angle d'incidence). Dans l'autre sens, du verre à l'air, passée cette valeur de l'angle, la lumière est entièrement réfléchie sur le dioptre.



Exercice 4.18 (Cône)

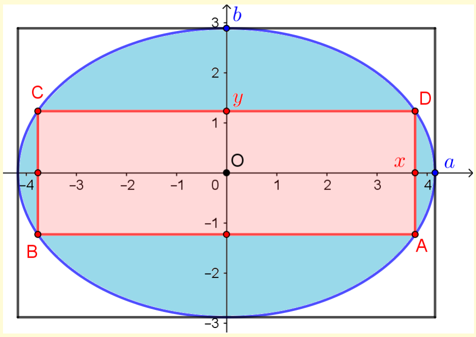
On découpe dans un disque de rayon R un secteur circulaire d'angle x pour fabriquer un cornet conique de hauteur h et de rayon r (le cornet n'est pas fermé sur sa base circulaire).

1. Exprimer h et r en fonction de R et x.
2. Déterminer la valeur de x pour laquelle le volume $\mathcal{V}$ du cône est maximal.
   Pour cette valeur, quel est alors l'angle $\widehat{MSM'} = \alpha$ du cône ?
3. Si on veut découper dans une feuille de format A_4 $(21 \times 29,7cm)$ un tel patron de cône (voir la figure de droite), à quelle distance d du milieu N d'une longueur doit-on placer le point S pour que le cône obtenu ait un volume maximal ?
   Déterminer alors les caractéristiques de ce cône (hauteur h, rayon r, volume $\mathcal{V}$ et angle α).



EXERCICE 4.19 (RECTANGLE DANS ELLIPSE)
On veut tracer, à l'intérieur d'un parterre elliptique inscrit dans un rectangle mesurant $2a$ sur $2b$ (mesurés en mètres), le rectangle dont les côtés sont parallèles à ceux du premier rectangle et dont l'aire est maximale (voir la figure).

On se situe dans le repère (O, I, J), O étant le centre du rectangle, (OI) et (OJ) étant parallèles à ses côtés.



1. Sachant qu'un point de coordonnées $(x; y)$ appartient à l'ellipse si $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, déterminer l'aire $\mathscr{A}(x)$ du rectangle inscrit.
2. Déterminer la valeur x_0 de x qui maximalise $\mathscr{A}$ et calculer la valeur correspondante y_0 de y.
   indication : on pourra trouver un intérêt à maximaliser plutôt $\mathscr{A}^2(x)$

Application numérique : le parterre mesure $a = 4,162\ m$ sur $b = 2,885\ m$. Déterminer x_0 et y_0.

EXERCICE 4.20 (MINIMUM)
On se propose d'étudier le minimum de $E(a, b) = \sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)$ où a et b sont des réels strictement positifs. On pose $x = \frac{b}{a}$.

a) Montrer que $E(a, b) = f(x)$ où $f(x) = \sqrt{x+1}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ et montrer qu'elle admet un minimum égal à m pour $x = x_0$ où m et x_0 sont des réels à déterminer.

c) En déduire le minimum de $E(a, b)$ et les valeurs de (a, b) pour lesquelles ce minimum est atteint.

4.1.5 Fonction Exponentielle

EXERCICE 4.21 (CONCENTRATION D'UN MÉDICAMENT)
On procède chez un sportif à l'injection intramusculaire d'un médicament. Celui-ci se diffuse progressivement dans le sang. On admet que la concentration de ce produit dans le sang, exprimée en $mg.L^{-1}$, peut être modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 12]$ par $g(t) = 6te^{-t}$ où t est le temps exprimé en heures.

1. Calculer $g'(t)$ puis étudier les variations de g sur l'intervalle $[0; 12]$.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la concentration maximale du médicament dans le sang.
3. Le produit fait l'objet d'une règlementation par la fédération sportive. Pour ne pas être en infraction, la concentration dans le sang de ce produit, au moment du contrôle, ne doit pas dépasser $0,05 mg.L^{-1}$.

$t \longleftarrow 60$
$y \longleftarrow 2,2$
`Tant que`
. . . .
$t \longleftarrow t + 1$
$y \longleftarrow$ . . . .
`Fin du 'Tant que'`

Compléter l'algorithme ci-dessus pour que la variable t contienne, à la fin de son exécution, le nombre de minutes qu'il faut attendre après l'injection pour que le sportif soit à nouveau en règle avec la législation.
Déterminer, par la méthode de votre choix et en expliquant la façon de procéder, le nombre de minutes qu'il faut attendre après l'injection pour que le sportif soit à nouveau en règle avec la législation.

Exercice 4.22 (Fonctions hyperboliques)
On considère les fonctions $f : x \longmapsto \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $g : x \longmapsto \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ et $h : x \longmapsto \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

Partie 1 : Étude des variations

a) Étudier la parité des fonctions f, g et h.
Représenter graphiquement ces fonctions pour $x \in [-5; 5]$.

b) Montrer que $f'(x) = g(x)$ et que $g'(x) = f(x)$.
En déduire les variations de f et g.

c) Montrer que $h(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, en déduire que $h(x) = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$.
Étudier alors les variations de h.

Nb : les fonctions f, g et h sont appelées, respectivement, cosinus, sinus et tangente hyperboliques. Elles sont notées cosh, sinh et tanh ou plus simplement *ch*, *sh* et *th*. La courbe représentative de la fonction cosh est appelée « chaînette » (forme obtenue lorsqu'un câble, fixé aux deux extrémités, est soumis à la pesanteur).

Partie 2 : Étude des propriétés algébriques

Établir les propriétés suivantes, valables pour tous réels x et y :

a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

b) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$

c) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$

d) $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 1 + 2\sinh^2(x) = 2\cosh^2(x) - 1$

e) $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$

f) Déduire des deux dernières égalités les formules de linéarisation

Exercice 4.23 (Approximations)

1. Étudier la fonction $f : x \longmapsto e^x - x - 1$ pour établir l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x$.
En déduire l'encadrement $\forall x \in]0, 1[, 1 + x \leqslant e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$.

2. En posant $x = \frac{1}{n}$, déduire de l'encadrement précédent $\forall n > 1, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$.

3. Les suites (u_n) et (v_n) étant définies pour $n > 1$ par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$, déterminer les quatre premiers termes de ces suite.
En déduire un encadrement de e à 0,5 près.

4. Programmer, à l'aide des suites (u_n) et (v_n), le calcul d'une valeur approchée de e à 10^{-p} près. Déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour $p = 3$, $p = 4$ et $p = 5$.

Exercice 4.24 (Limites)

1) On considère la fonction $f : x \longmapsto e^x - \frac{x^2}{2}$.

a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que $\forall x > 0, e^x > \frac{x^2}{2}$ et montrer alors que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

c) En déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

2) On considère la fonction $g : x \longmapsto \frac{x}{1+e^{-x}}$.

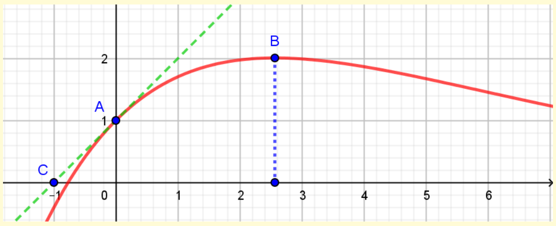
a) Montrer que g' est du signe de $h(x) = 1 + e^{-x} + xe^{-x}$.

b) Étudier les variations de h et montrer que h s'annule pour un unique réel $\alpha \in]-1,3; -1,2[$.

c) Étudier la limite de $g(x) - x$ en $+\infty$.

EXERCICE 4.25 (DEVINETTE)
On considère les fonctions $f : x \longmapsto (ax+b)e^{cx}$ où a, b et c sont trois réels.

On dispose ci-contre de la courbe représentative d'une fonction f. Cette courbe passe, en particulier, par le point $A(0;\alpha=1)$, elle admet une tangente horizontale au point d'abscisse $B(\beta;f(\beta)=2)$ et une tangente en A qui passe par le point $C(\gamma=-1;0)$.



a) Déterminer les nombres α, β et γ en fonction de a, b et c.
b) En déduire les valeurs de a, b et c dans le cas particulier de ce graphique (on prendra $\beta \approx 2,5$).
c) Déterminer une valeur approchée de β à 10^{-6} près à l'aide du tableur et en déduire une expression plus précise de $f(x)$.

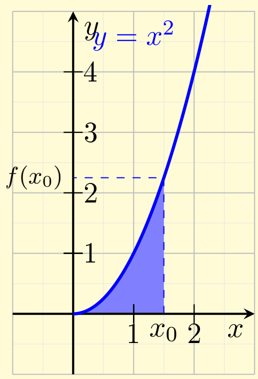
4.1.6 Le coin du chercheur

EXERCICE 4.26 (CALCULS D'AIRES ET DE VOLUMES)
On note $\mathscr{S}(x)$ l'aire du domaine contenu « sous » la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^2$ entre la valeur $x=0$ et $x=x_0$ (voir le schéma ci-contre), x_0 étant un réel positif quelconque.

➩ Montrer que pour tout $h>0$, on a

$$x_0^2 \leqslant \frac{\mathscr{S}(x_0+h)-\mathscr{S}(x_0)}{h} \leqslant (x_0+h)^2$$

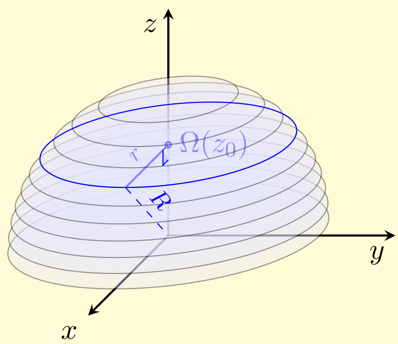
Montrer que cet encadrement reste valable en inversant les bornes, pour tout $h<0$ du moment que x_0+h reste positif.
En faisant tendre h vers 0, en déduire que $\mathscr{S}$ est dérivable en x_0 et que $\mathscr{S}'(x_0)=x_0^2$.
La conséquence de ceci est que la fonction $\mathscr{S}$ cherchée est connue par sa dérivée f. On sait aussi que $\mathscr{S}(0)=0$. Avec ces deux informations, déterminer $\mathscr{S}(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.



✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

On note $\mathscr{V}(z_0)$ le volume de la tranche de demi-sphère comprise entre la valeur $z=0$ et $z=z_0$ (voir le schéma de la demi-sphère ci-contre), z_0 étant un réel positif inférieur à R le rayon de la demi-sphère.
➩ Déterminer le rayon $r(z_0)$ du petit cercle de centre $\Omega(0,0,z_0)$ (le rayon dépend de z_0 et de la constante R).
Montrer ensuite que pour tout $h>0$, on a

$$\pi r^2(z_0+h) \leqslant \frac{\mathscr{V}(z_0+h)-\mathscr{V}(z_0)}{h} \leqslant \pi r^2(z_0)$$



Montrer que cette inégalité reste valable en inversant les bornes, pour tout $h<0$ du moment que z_0+h reste positif.
En faisant tendre h vers 0, en déduire que $\mathscr{V}$ est dérivable en z_0 et que $\mathscr{V}'(z_0)=\pi r^2(z_0)$.
La conséquence de ceci est que la fonction $\mathscr{V}$ cherchée est connue par sa dérivée et par la valeur initiale $\mathscr{V}(0)=0$. Avec ces deux informations, déterminer $\mathscr{V}(z)$ pour tout $z \leqslant R$.
Retrouver alors la formule qui donne le volume d'une sphère de rayon R.