3.1 Corrections

3.1.1 Comportement des suites

Correction de l'exercice 3.1 (Définition explicite)

1. Explicitons les premiers termes de (d_n) en effectuant la division à la calculatrice $\frac{2022}{23} \approx 87,913043478261$.
L'affichage ne permet pas de distinguer une répétition dans la suite des chiffres de ce quotient. On sait que les chiffres doivent se répéter (la suite des restes ne pouvant prendre que 22 valeurs différentes est nécessairement périodique). Effectuons la division à la main :

2 0 2 2	23
2 1 0	87, 9130434782608695652173
3 0	
7 0	
1 0	
1 0 0	
8 0	
1 1 0	
1 8 0	
1 9 0	
6 0	
1 4 0	
2 0	
2 0 0	
1 6 0	
2 2 0	
1 3 0	
1 5 0	
1 2 0	
5 0	
4 0	
1 7 0	
9 0	
2 1	

Ainsi, comme 21 est un reste qui a déjà été obtenu, la suite des chiffres du quotient va se répéter avec un 9, puis un 1, puis un 3, etc.
On a $\frac{2022}{23} = 87,91304347826086956521739130434782608695652173\cdots$
La suite de 22 chiffres 9130434782608695652173 se répète jusqu'à l'infini.
La suite (d_n) est périodique de période 22, c'est-à-dire que pour tout $n \geqslant 1$ on a $d_{n+22} = d_n$.
La définition explicite de d_n dépend donc du reste r_n de la division par 22 de n.

r_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	0
d_n	9	1	3	0	4	3	4	7	8	2	6	0	8	6	9	5	6	5	2	1	7	3

Comme $2023 = 91 \times 22 + 21$, on a $d_{2023} = d_{21} = 7$.

2. Si d_n est le n$^{\text{e}}$ chiffre de la partie décimale de $\frac{2022}{2023} \approx 0.999550568462679$, on risque de peiner pour trouver à la main le développement décimal exact de $\frac{2022}{2023}$.
Pour cette raison, on va écrire un programme adapté.

```
a=int(input("Entrer le dividende : "))
b=int(input("Entrer le diviseur : "))
quotient=a//b  # quotient de la division euclidienne de a par b
premierReste=a%b  # reste de la division euclidienne de a par b
resteMobil=premierReste
periode=1
sequence=str((resteMobil*10)//b)
while  (resteMobil*10)%b!=premierReste:
    resteMobil=(resteMobil*10)%b
    periode+=1
    sequence+=str((resteMobil*10)//b)
print("Période du développement illimité du quotient : ",periode)
print("Séquence périodique du développement illimité : ",sequence)
print("Quotient = ",quotient,",",sequence,sequence,"...")
```

```
Entrer le dividende : 2022
Entrer le diviseur : 23
Période du développement illimité du quotient :  22
Séquence périodique du développement illimité :  9130434782608695652173
Quotient =  87 , 9130434782608695652173 9130434782608695652173 ...
```

```
Entrer le dividende : 2022
Entrer le diviseur : 2023
Période du développement illimité du quotient :  816
Séquence périodique du développement illimité :  99950568462679189322787938704893722194760257043994068215521502718734552
6445872466633712308452792881858625803262481463173504695996045477014335145823035096391497775580820563519525457241720217498
7642115669797330696984676223430548690064260998517053880375679683638161146811665842807711319822046465645081562036579337
6173999011369253583786455758774097874443895205140879881364310430054374691052891744933267424616905585763717251606524962926
3470093919920909540286702916460701927829955511616411270390509144834404349975284231339594661393969352446861097380128521997
0341077607513593672763222936233316856154226396440929312901631240731586752347998022738507167572911517548195748887790410281
7597627286208601087493821057834898665348492338111715274345032130499258526940187839841819080573405832921403855659911023
2328225407810182896688086
Quotient =  0 , 99950568462679189322787938704893722194760257043994068215521502718734552644587246663371230845279288185862
```

Ce programme nous permet de vérifier nos calculs précédents (voir la sortie d'exécution en bleu).
Il nous donne ensuite la séquence des chiffres se répétant dans le quotient $\frac{2022}{2023}$.
La voici par ligne de 100 chiffres groupés par 5 (pour identifier le 391^e^, en bleu) :

99950 56846 26791 89322 78793 87048 93722 19476 02570 43994 06821 55215 02718 73455 26445 87246 66337 12308 45279 28818

58625 80326 24814 63173 50469 59960 45477 01433 51458 23035 09639 14977 75580 82056 35195 25457 24172 02174 98764 21156

69797 33069 69846 76223 43054 86900 64260 99851 70538 80375 67968 36381 61146 81166 58428 07711 31982 20464 65645 08156

20365 79337 61739 99011 36925 35837 86455 75877 40978 74443 89520 51408 79881 36431 04300 54374 69105 28917 44933 26742

46169 05585 76371 72516 06524 96292 63470 09391 99209 09540 28670 29164 60701 92782 99555 11616 41127 03905 09144 83440

43499 75284 23133 95946 61393 96935 24468 61097 38012 85219 97034 10776 07513 59367 27632 22936 23331 68561 54226 39644

09293 12901 63124 07315 86752 34799 80227 38507 16757 29115 17548 19574 88877 90410 28175 97627 28620 86010 87493 82105

78348 98665 34849 23381 11715 27434 50321 30499 25852 69401 87839 84181 90805 73405 83292 14038 55659 91102 32328 22540

78101 82896 68808 6

Cette suite de chiffres en contient 816, ainsi la suite (d_n) associée à ce quotient est périodique de période 816 à partir du rang 1.
La définition explicite de d_n dépend donc du reste r_n de la division par 816 de n.
On a $d_{n+816} = d_n$ pour $n \geqslant 1$ et, comme $2023 = 2 \times 816 + 391$, on a $d_{2023} = d_{391} = 4$.

Ci-dessous, la réponse aux même questions pour l'année 2021-2022 :
1. Explicitons les premiers termes de (d_n) en effectuant la division à la calculatrice $\frac{2021}{22} \approx 91,863636363636$.
L'affichage permet de distinguer une répétition puisqu'on lit que la suite de chiffres 36 se répète cinq fois. On sait que les chiffres doivent se répéter (la suite des restes ne pouvant prendre que 21 valeurs différentes est nécessairement périodique). Effectuons la division à la main :

$$\begin{array}{r|l}
2\ 0\ 2\ 1 & 22 \\ \cline{2-2}
1\ 9\ 0 & 96,863 \\
1\ 4\ 0 & \\
8\ 0 & \\
1\ 4 &
\end{array}$$

Ainsi, comme 14 est un reste qui a déjà été obtenu, la suite des chiffres du quotient va se répéter avec un 6, puis 3, etc.
On a $\frac{2021}{22} = 91,8636363\cdots$ la suite de 2 chiffres 63 se répétant jusqu'à l'infini.
La suite (d_n) est périodique de période 2, c'est-à-dire que pour tout $n \geqslant 2$ on a $d_{n+2} = d_n$.

La définition explicite de d_n dépend donc du reste r_n de la division par 2 de n.

r_n	0	1
d_n	6	3

Comme $2021 = 1010 \times 2 + 1$, on a $d_{2021} = d_3 = 3$.

2. Si d_n est le n$^{\text{e}}$ chiffre de la partie décimale de $\frac{2021}{2022} \approx 0.99950544015826$, on risque de peiner pour trouver à la main le développement décimal exact de $\frac{2021}{2022}$.
Pour cette raison, on va écrire un programme adapté.

```
def decimal(a,b):
    quotient=str(a//b)  # la partie entière du quotient
    reste=a%b           # le premier reste
    decimal=0           # le nombre est un décimal par défaut
    if reste!=0:
        restes=[reste]         # on va mettre dans cette liste tous les restes obtenus
        quotient+=","          # le quotient s'allonge avec une partie décimale non nulle
        longueurQ=len(quotient)# on enregistre la longueur de la partie entière avec virgule
        while decimal==0 :
            quotient+=str(reste*10//b) # on ajoute un chiffre au quotient
            reste=(reste*10)%b         # on recalcule le reste
            if reste==0 : break        # le nombre est décimal, la division s'arrête
            if reste in restes :       # si le reste a déjà été obtenu on arrête la division
                rang=restes.index(reste)          # rang du reste déjà obtenu dans la liste
                sequence=quotient[longueurQ+rang:]# extraction de la séquence périodique
                quotient+="..."
                print("Séquence périodique de longueur "+str(len(sequence))+" : "+sequence)
                decimal=1                        # le nombre est un rationnel non décimal
            else : restes.append(reste)# sinon on place le reste obtenur dans la liste
    return quotient,decimal

num,denom=2021,2022
q,i=decimal(num,denom)
nature=["décimal","rationnel non décimal"]
print(num,"/",denom,"est un nombre "+nature[i],":",q)
```

```
Séquence périodique de longueur 336 : 99505440158259149357072205736894164193867457962413452027695З
51137487636003956478733926805143422354104846686449060336300692383778437190900098911968348170128585
55885262116716122650840751730959446092977250247279920870425321463897131552917903066271018793273986
15232443125618199802176063303659742828882294757665677546983184965380811078140454
2021 / 2022 est un nombre rationnel non décimal : 0,9995054401582591493570722057368941641938674579
62413452027695351137487636003956478733926805143422354104846686449060336300692383778437190900098911
96834817012858555885262116716122650840751730959446092977250247279920870425321463897131552917903066
27101879327398615232443125618199802176063303659742828882294757665677546983184965380811078140454...
```

```
num,denom=2021,22
```

```
Séquence périodique de longueur 2 : 63
2021 / 22 est un nombre rationnel non décimal : 91,863...
```

Ce programme nous permet de vérifier nos calculs précédents (voir la sortie d'exécution en bleu).
Il nous donne ensuite la séquence des chiffres se répétant dans le quotient $\frac{2021}{2022}$:

$$99505440158259149357072205736894164193867457962413452027695351137 4\ldots$$

Cette suite de chiffres en contient 336, ainsi la suite (d_n) associée à ce quotient est périodique de période 336 à partir du rang 2 (car $d_1 = 9$ ne fait pas partie de la séquence périodique trouvée.
La définition explicite de d_n dépend donc du reste r_n de la division par 336 de n.
On a $d_{n+336} = d_n$ pour $n \geqslant 2$.
Comme $2021 = 6 \times 336 + 5$, on a $d_{2021} = d_5 = 0$.

Ci-dessous, la réponse aux même questions pour l'année 2020-2021 :
1. Explicitons les premiers termes de (d_n) en effectuant la division à la calculatrice $\frac{2020}{21} \approx 96,190476190476$.
L'affichage permet de distinguer une répétition puisqu'on lit que la suite de chiffres 190476 se répète deux fois. On sait que les chiffres doivent se répéter (la suite des restes ne pouvant prendre que 20 valeurs différentes est nécessairement périodique). Effectuons la division à la main :

$$\begin{array}{r|l}
2\,0\,2\,0 & \quad\quad\quad 21 \\ \cline{2-2}
\underline{2\,0\,1\,6} & 96,190476 \\
4\,0 & \\
1\,9\,0 & \\
1\,0\,0 & \\
1\,6\,0 & \\
1\,3\,0 & \\
4 &
\end{array}$$

Ainsi, comme 4 est un reste qui a déjà été obtenu, la suite des chiffres du quotient va se répéter avec un 1, puis 9, etc.
On a $\frac{2020}{21} = 96,190476190476190476\cdots$ la suite de 6 chiffres 190476 se répétant jusqu'à l'infini.
La suite (d_n) est périodique de période 6, c'est-à-dire que pour tout $n > 0$ on a $d_{n+6} = d_n$.
La définition explicite de d_n dépend donc du reste r_n de la division par 6 de n.

r_n	0	1	2	3	4	5
d_n	6	1	9	0	4	7

Comme $2020 = 336 \times 6 + 4$, on a $d_{2020} = d_4 = 4$.

2. Si d_n est le n$^{\text{e}}$ chiffre de la partie décimale de $\frac{2020}{2021} \approx 0.99951954478$, on risque de peiner pour trouver à la main le développement décimal exact de $\frac{2020}{2021}$.
Pour cette raison, on va écrire un programme adapté.

```
a=int(input("a="))
b=int(input("b="))
q=a//b     # quotient entier
r=a%b      # reste 1
s=r        # premier reste mobile
p=1        # période initialisée à 1
t=str((s*10)//b)    # chiffre 1 de la séquence periodique du quotient
while (s*10)%b!=r and s!=0: # tant que reste n'est ni reste 1 ni zéro
    s=(s*10)%b      # nouveau reste mobile
    p+=1            # incrément de la période                        :
    t+=str((s*10)//b) # ajout d'un chiffre dans la séquence periodique  1 ni zéro
if s==0:            # si le nombre est décimal
    print("Quotient :"+str(q)+","+t)
else:               # si la séquence commence après la virgule...       que
    print("Période  :",p)
    print("Séquence :",t)
    print("Quotient :"+str(q)+","+t+t+"...")
```

```
a=2020
b=2021
Période  : 966
Séquence : 9995051954477981197427016328550222662048490846115784265215239980207817911924789708065314200890648l9
39633844631370608609599208312716476991588322612568035625927758535378525482434438396833250865907966353290450272
142503711034141514101929737753587333003463631865413161801088570014844136566056407718951014349332013854527461б5
264720435428005937654626422563087580405739732805541810984661058881741712023750618505690252350321622958931222l6
724393864423552696684809500247402276100940128649183572488866897575457694210786739238000989609104403760514596 73
428995546759030183077684314695695200395843641761504205838693715982187036120732310737258782780801583374567046 01
682335477486392874814448292924294903513112320633349826818406729341909945571499257793171697179614052449282533 39
930727362691736763978228599703117268678871845620979713013359722909450766947055912914398812469074715487382483 91
88520534388916378030677882236516575952498762988619495299356754082137555665512122711528946066303 80
```

Ce programme nous permet de vérifier nos calculs précédents (voir la sortie d'exécution en bleu).
Il nous donne ensuite la séquence des chiffres se répétant dans le quotient $\frac{2020}{2021}$:

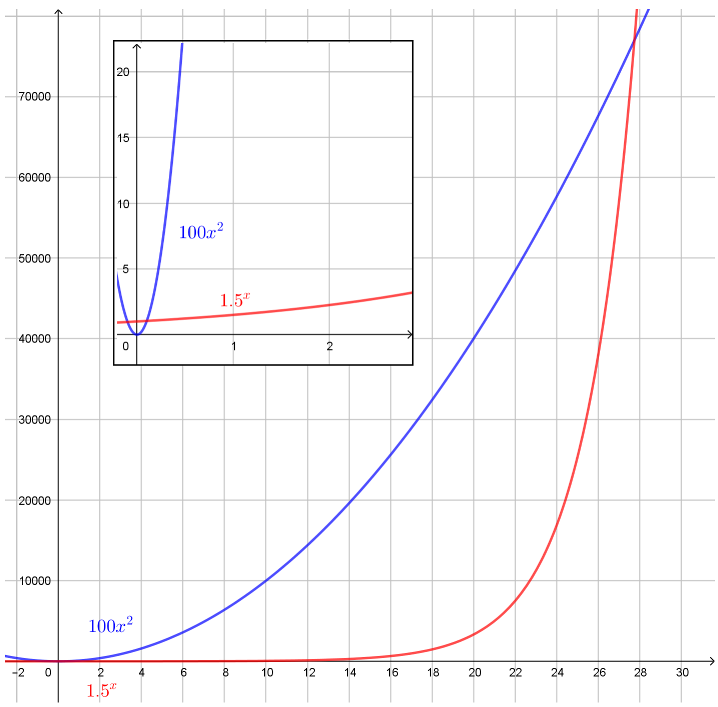
$$9995051954477981197427016328550222662048490846115784265215239980207817911924 7\ldots$$

Cette suite de chiffres en contient 966, ainsi la suite (d_n) associée à ce quotient est périodique de période 966. La définition explicite de d_n dépend donc du reste r_n de la division par 966 de n.
On a $d_{n+966} = d_n$, par exemple $d_{967} = d_1 = 9$, $d_{968} = d_2 = 9$, $d_{969} = d_3 = 9$ et $d_{970} = d_4 = 5$.
Comme $2020 = 2 \times 966 + 88$, on a $d_{2020} = d_{88}$.

Correction de l'exercice 3.2 (Comparaison)
On se propose de comparer les suites de termes généraux $1,5^n$ et $100n^2$.
Pour cela on pose $u_n = 1,5^n - 100n^2$.
La calculatrice nous donne $u_{28} = 1,5^{28} - 100 \times 28^2 \approx 6822 > 0$ alors que $u_{27} = 1,5^27 - 100 \times 27^2 \approx -16084 < 0$.
Étudions la croissance de (u_n) :
Pour cela calculons :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1,5^{n+1} - 100(n+1)^2 - (1,5^n - 100n^2) \\ &= 1,5^{n+1} - 1,5^n - \left(100(n+1)^2 - 100n^2\right) \\ &= 1,5^n(1,5-1) - 100\left(n^2+2n+1-n^2\right) \\ &= \frac{1,5^n}{2} - 100\,(2n+1) \\ &= 100(2n+1)\left(\frac{1,5^n}{200(2n+1)} - 1\right) \end{aligned}$$

La quantité $v_n = \frac{1,5^n}{200(2n+1)}$ est croissante car les termes de la suite (v_n) sont tous positifs et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1,5^{n+1} \times 200(2n+1)}{200(2(n+1)+1) \times 1,5^n} = 1,5 \times \frac{2n+1}{2n+3} > 1$ à partir de $n = 2$.
En effet $1,5 \times \frac{2n+1}{2n+3} > 1 \iff 3(2n+1) > 2(2n+3) \iff 6n+3 > 4n+6 \iff 2n > 3$.
La suite (u) est croissante dès que $v_n = \frac{1,5^n}{200(2n+1)} > 1$.
Comme on ne sait pas résoudre ce genre d'inéquation, on détermine la 1re valeur qui convient en tâtonnant sur la calculatrice :
$v_{22} = \frac{1,5^22}{200(2\times22+1)} > 1 \approx 0,83 < 1$ alors que $v_{23} = \frac{1,5^23}{200(2\times23+1)} > 1 \approx 1.19 > 1$.
La suite (u) est donc croissante dès que $n \geqslant 23$.
Conclusion : comme on sait que $u_{28} > 0$ et que pour $n \geqslant 28$ la suite (u) est croissante, on en déduit que, pour $n \geqslant 28$, on a $1,5^n \geqslant 100n^2$. La vérification graphique ne pose pas de problème si on gradue correctement les axes.
Ici, pour observer le dépassement de la courbe d'équation $y = 100x^2$ (en bleu) par la courbe d'équation $y = 1,5^x$ (en rouge), on peut prendre $x \in [0;30]$ et $y \in [0;80000]$.
NB : les fonctions de type $x \longmapsto 1,5^x$ sont appelées fonctions exponentielles (ici de base $1,5$) et seront étudiées plus tard dans l'année (chapitre Fonctions).



CORRECTION DE L'EXERCICE 3.3 (MONOTONIE)

➛ Si $u_n = 2n + \frac{1}{5^n}$, alors

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + \frac{1}{5^{n+1}} - \left(2n + \frac{1}{5^n}\right) = 2 + \left(\frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{5^n}\right) = 2 + \frac{1-5}{5^{n+1}} = 2 - \frac{4}{5^{n+1}}$$

Or $\frac{4}{5^{n+1}} < 2 \iff 5^{n+1} > 2$ et cela est vérifié pour tout $n \geqslant 0$.
Par conséquent, $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

➛ Si $u_n = 0,99^n + \frac{n}{100}$, alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 0,99^{n+1} + \frac{n+1}{100} - \left(0,99^n + \frac{n}{100}\right) \\ &= \frac{1}{100} + \left(0,99^{n+1} - 0,99^n\right) \\ &= \frac{1}{100} + 0,99^n(0,99-1) = \frac{1}{100}\left(1 - 0,99^n\right) \end{aligned}$$

Or $1 - 0,99^n > 0 \iff 0,99^n < 1$ et cela est vérifié pour tout $n \geqslant 1$.
Par conséquent, $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. La suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 1.
Vérification : $u_0 = 0,99^0 + \frac{0}{100} = 1$, $u_1 = 0,99^1 + \frac{1}{100} = 1 = u_0$ et $u_2 = 0,99^2 + \frac{2}{100} = 1,0001 > u_1$.

➛ Si $u_n = (1-a)^n + (1+a)^n$ avec $a \in]0;1[$, alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (1-a)^{n+1} + (1+a)^{n+1} - ((1-a)^n + (1+a)^n) \\ &= (1-a)^{n+1} - (1-a)^n + (1+a)^{n+1} - (1+a)^n \\ &= (1-a)^n\left((1-a)-1\right) + (1+a)^n\left((1+a)-1\right) \\ &= (-a) \times (1-a)^n + a(1+a)^n = a\left((1+a)^n - (1-a)^n\right) \end{aligned}$$

On sait que $a \in]0;1[$ donc $1 + a \in]1;2[$ et $1 - a \in]0;1[$.
La fonction $x \longmapsto x^n$ est une fonction strictement croissante pour tout $x > 0$.
En effet, $\forall x_2 > x_1 > 0$, le taux d'accroissement est :
$\frac{x_2^n - x_1^n}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2-x_1)\left(x_2^{n-1}+\dots+x_1^{n-1}\right)}{x_2-x_1} = x_2^{n-1} + \dots + x_1^{n-1}$.
La somme $x_2^{n-1} + \dots + x_1^{n-1}$ étant strictement positive, le taux d'accroissement l'est aussi et la fonction est strictement croissante. Par conséquent
$(1+a)^n > 1^n \iff (1+a)^n > 1$ et $(1-a)^n < 1^n \iff (1-a)^n < 1 \iff -(1-a)^n > -1$.
On en déduit $(1+a)^n - (1-a)^n > 1 + (-1) = 0$ et, comme $a > 0$, $u_{n+1} - u_n > 0$.
La suite (u_n) est donc strictement croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

➛ Si $u_n = \frac{3^n}{n+1}$, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)+1}}{\frac{3^n}{n+1}} = \frac{\frac{3^{n+1}}{n+2}}{\frac{3^n}{n+1}} = \frac{\left(3^{n+1}\right)(n+1)}{\left(3^n\right)(n+2)} = \frac{3(n+1)}{n+2}$$

On a $\frac{3(n+1)}{n+2} > 1 \iff 3(n+1) > n+2 \iff 2n > -1 \iff n > \frac{-1}{2}$ et comme, de plus, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3^n}{n+1} > 0$, on en déduit que $u_{n+1} > u_n$,
la suite (u_n) est donc strictement croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

➛ Si $u_n = \frac{2^n\sqrt{n}}{3^n}$, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}\sqrt{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{2^n\sqrt{n}}{3^n}} = \frac{2^{n+1}3^n\sqrt{n+1}}{2^n3^{n+1}\sqrt{n}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

Montrons maintenant qu'à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
Élevons au carré (cette opération ne modifie par l'ordre car $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$) :

$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{n+1}{n}} < 1 \Longrightarrow \frac{4}{9}\frac{n+1}{n} < 1$
On en déduit que l'on doit avoir $4(n+1) < 9n \Longleftrightarrow 4 < 5n \Longleftrightarrow n > \frac{4}{5}$.
Comme, de plus, $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit qu'à partir de $n = 1$, on a $u_{n+1} < u_n$.
La suite (u_n) est donc strictement décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Vérification : $u_0 = \frac{2^0\sqrt{0}}{3^0} = 0$, $u_1 = \frac{2^1\sqrt{1}}{3^1} = \frac{2}{3} \approx 0,67$ et $u_2 = \frac{2^2\sqrt{2}}{3^2} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \approx 0,63 < u_1$.

Correction de l'exercice 3.4 (Somme du carré des chiffres d'un entier)
Partie 1 : Nombres à 2 chiffres
La suite (u_n) associée à l'entier $a = 13$ est $u_0 = 13$, $u_1 = f(13) = 1^2+3^2 = 10$, $u_2 = f(10) = 1^2+0^2 = 1$, $u_3 = f(1) = 1^2 = 1$, etc. Tous les termes de la suite (u_n) sont égaux à 1 à partir du rang 2.
La suite (u_n) associée à l'entier $a = 4$ est $u_0 = 4$, $u_1 = f(4) = 4^2 = 16$, $u_2 = f(16) = 1^2 + 6^2 = 37$, $u_3 = f(37) = 3^2 + 7^2 = 58$, $u_4 = f(58) = 5^2 + 8^2 = 89$, $u_5 = f(89) = 8^2 + 9^2 = 145$, $u_6 = f(145) = 1^2 + 4^2 + 5^2 = 42$, $u_7 = f(42) = 4^2 + 2^2 = 20$, $u_8 = f(20) = 2^2 + 0^2 = 4$, etc. La suite (u_n) est périodique à partir du rang 0. Sa période est 8 et on a $u_{n+8} = u_n$ pour tout $n \geqslant 0$.
Écrivons un programme qui calcule les termes successifs de la suite (u) associée au nombre a. La condition d'arrêt de la boucle de calcul est indiquée dans l'énoncé : un terme est égal à 1 (la suite va être constante) ou à 4 (la suite va être périodique).

```
def sommeCarreChiffres(a):
    carreChiffres=[int(c)**2 for c in a]
    return sum(carreChiffres)

a=int(input("Entrer le 1er terme : "))
n,debut=0,-1
s=[4,16,37,58,89,145,42,20]
while a!=1 :
    n+=1
    a=sommeCarreChiffres(str(a))
    print("u{}={}".format(n,a))
    if a in s :
        if debut==-1 : debut=n
        elif n>debut+8 : break
if a==1: print("(un) est constante à partir du rang {}".format(n))
else : print("(un) est périodique à partir du rang {}".format(debut))
```

```
Entrer le 1er terme : 36
u1=45
u2=41
u3=17
u4=50
u5=25
u6=29
u7=85
u8=89
u9=145
u10=42
u11=20
u12=4
u13=16
u14=37
u15=58
u16=89
u17=145
(un) est périodique à partir du rang 8
```

```
Entrer le 1er terme : 3
u1=9
u2=81
u3=65
u4=61
u5=37
u6=58
u7=89
u8=145
u9=42
u10=20
u11=4
u12=16
u13=37
u14=58
(un) est périodique à partir du rang 5
```

```
Entrer le 1er terme : 85
u1=89
u2=145
u3=42
u4=20
u5=4
u6=16
u7=37
u8=58
u9=89
u10=145
(un) est périodique à partir du rang 1
```

```
Entrer le 1er terme : 44
u1=32
u2=13
u3=10
u4=1
(un) est constante à partir du rang 4
```

Ce programme peut être inscrit dans une boucle qui examine, successivement, le sort de tous les entiers jusqu'à 99. C'est ce que j'ai fait pour obtenir les résultats consignés dans le tableau ci-dessous. On observe qu'il y a 20 nombres pour lesquels la suite est constante à partir d'un certain rang (indiqué en rouge dans le tableau). Ces nombres sont :

$$0^*, 1, 7, 10, 13, 19, 23, 28, 31, 32, 44, 49, 68, 70, 79, 82, 86, 91, 94, 97$$

J'ai ajouté le 0 dans cette liste mais celui-ci est le seul qui a une suite constante égale à 0. Tous les autres ont une suite constante à partir d'un certain rang et égale à 1. Cette suite (sans le 0) est référencée dans l'Encyclopédie de Sloane sous le n°*A007770* et les nombres qui la constituent sont appelés nombres « heureux » par les mathématiciens. Bien sûr, cette liste ne s'arrête pas à 97, les prochains nombres

heureux sont 100, 103, etc.
Tous les autres nombres entiers inférieurs à 100 ont la même suite périodique que 4 à partir d'un certain rang (indiqué en bleu).

dizaine \ unité	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	1	5	1	4	9	5	5	4
1	0	2	5	2	6	3	1	5	3	4
2	1	5	6	3	1	3	2	6	3	2
3	5	2	3	4	4	5	8	1	2	5
4	1	6	1	4	4	7	4	3	6	4
5	4	3	3	5	7	5	2	4	1	2
6	9	1	2	8	4	2	7	2	2	5
7	5	5	6	1	3	4	2	2	4	3
8	5	3	3	2	6	1	2	4	7	1
9	4	4	2	5	4	2	5	3	1	8

Partie 2 : Nombres à 3 chiffres
Si $x = 100c+10d+u$ est un nombre à 3 chiffres ($c \neq 0$), alors $x - f(x) = 100c+10d+u-(c^2+d^2+u^2) = \left(100c - c^2\right) + \left(10d - d^2\right) + \left(u - u^2\right)$.
On sait que $1 \leqslant c \leqslant 9$. La fonction $g : x \longmapsto 100x - x^2 = 50^2 - (x-50)^2$ est croissante jusqu'à $x = 50$ puis décroissante. Comme $g(1) = 100 - 1 = 99$ on en déduit que $c - c^2 \geqslant 99$.
De même, on sait que $0 \leqslant d \leqslant 9$. La fonction $g' : x \longmapsto 10x - x^2 = 5^2 - (x-5)^2$ est croissante jusqu'à $x = 5$ puis décroissante. Comme $g'(0) = 0$ on en déduit que $d - d^2 \geqslant 0$.
La somme $\left(100c - c^2\right) + \left(10d - d^2\right)$ est donc bien supérieure ou égale à 99 et $x - f(x) \geqslant 99 + u - u^2 > 0$.
De la même façon, on sait que $0 \leqslant u \leqslant 9$. La fonction $g'' : x \longmapsto x - x^2 = \frac{1}{4}^2 - (x - \frac{1}{2})^2$ est croissante jusqu'à $x = \frac{1}{2}$ puis décroissante. On a $g''(0) = 0$, puis $g''(1) = 0$ et ensuite les nombres sont négatifs ($g''(2) = -2, \cdots, g''(9) = -72$). On en déduit que $-72 \leqslant u - u^2 \leqslant 0$.
Ce qui est certain, c'est que $x - f(x) \geqslant 27 \geqslant 1$ (car $27 \leqslant 99 + u - u^2 \leqslant 99$) et donc $x - 1 \geqslant f(x) \iff f(x) \leqslant x - 1$.
Tout cela permet de déduire que le terme qui succède à un entier de 3 chiffres est forcément inférieur à cet entier. Au pire, si on part du plus grand entier à 3 chiffres (999), il suffira de 900 itérations pour se retrouver en dessous de 100, donc avec 2 chiffres.
D'après ce qu'on a vu dans la partie 1, la suite (u_n) associée à un entier a d'au plus 3 chiffres sera d'un des deux types déjà définis (nombres heureux ou pas).
Notre programme permet de tester ce résultat et éventuellement de continuer la liste des nombres heureux : il y en a 123 de nouveaux.

$$100, 103, 109, 129, 130, 133, 139, 167, 176, 188, 190, 192, 193, 203, 208, 219, 226, 230, 236, 239, \cdots$$
$$\cdots, 888, 899, 901, 904, 907, 910, 912, 913, 921, 923, 931, 932, 937, 940, 946, 964, 970, 973, 989, 998$$

Partie 3 : Nombres à plus de 3 chiffres
Étudions la monotonie de la suite $n \longmapsto 10^{n-1} - 81n$ en étudiant le signe de la différence entre 2 termes consécutifs de cette suite :
$10^n - 81(n+1) - \left(10^{n-1} - 81n\right) = 10^{n-1}(10-1) - 81(n+1-n) = 9 \times 10^{n-1} - 81$.
Comme $9 \times 10^{n-1} - 81 > 0 \iff 10^{n-1} > 9$, la suite est croissante dès que $10^{n-1} > 9$ c'est-à-dire dès que $n \geqslant 2$ ($10^{1-1} = 1 < 9$ mais $10^{2-1} = 10 > 9$).
Comme $10^{2-1} - 81 \times 2 = -152 < 0$, $10^{3-1} - 81 \times 3 = -143 < 0$ et $10^{4-1} - 81 \times 4 = 676 > 0$, la suite est positive à partir du rang 4. Donc pour $n \geqslant 4$ on a $10^{n-1} > 81n$.
Or, pour un nombre à p chiffres, le terme suivant ce nombre est inférieur à $9^2 \times p = 81p$ puisqu'il y a p chiffres inférieurs ou égaux à 9. Comme $81p < 10^{p-1}$, dès que p atteint 4, le terme suivant un nombre de 4 chiffres (ou plus) aura forcément 1 chiffre de moins (au moins) que ce nombre. D'un nombre à 4 chiffres, on passe (au pire) à un nombre à 3 chiffres et la suite est connue : elle est d'un des deux types déjà définis (nombres heureux ou pas). De même, d'un nombre à $p > 4$ chiffres, on passe (au pire) à un nombre à $p-1$ chiffres et donc la suite associée est d'un des deux types déjà définis. Finalement, tous les entiers ont des suites associées qui sont d'un des deux types déjà définis.
Dernière remarque : cette propriété (être heureux ou pas) dépend de la base de numération choisie. Essayez de cerner le problème pour la base 2 : vous constaterez rapidement des différences significatives.

Pour commencer, $2_{(10)} = 10_{(2)}$ (2 se note 10 en base 2) est un nombre heureux en base 2 alors qu'il est malheureux en base 10. Quel est, à votre avis, le plus petit nombre malheureux en base 2 ?

3.1.2 Formules explicites

Correction de l'exercice 3.5 (Fraction continue)

1. Partant de $u_0 = 2$ on a

- $u_1 = 2 + \frac{1}{u_0} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{2\times2+1}{2} = \frac{5}{2}$
- $u_2 = 2 + \frac{1}{u_1} = 2 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 2 + \frac{2}{5} = \frac{2\times5+2}{5} = \frac{12}{5}$
- $u_3 = 2 + \frac{1}{u_2} = 2 + \frac{1}{\frac{12}{5}} = 2 + \frac{5}{12} = \frac{2\times12+5}{12} = \frac{29}{12}$
- $u_4 = 2 + \frac{1}{u_3} = 2 + \frac{1}{\frac{29}{12}} = 2 + \frac{12}{29} = \frac{2\times29+12}{29} = \frac{70}{29}$
- $u_5 = 2 + \frac{1}{u_4} = 2 + \frac{1}{\frac{70}{29}} = 2 + \frac{29}{70} = \frac{2\times70+29}{70} = \frac{169}{70}$

2. Partant de $(a_0, b_0) = (2, 1)$, on a

$(a_1, b_1) = (5, 2)$, $(a_2, b_2) = (12, 5)$, $(a_3, b_3) = (29, 12)$, $(a_4, b_4) = (70, 29)$ et $(a_5, b_5) = (169, 70)$

Ces nombres se déduisent directement des calculs précédents.
On peut vérifier que a_n et b_n sont premiers entre eux pour $n \leqslant 5$ en déterminant le PGCD de chacun des couples : il vaut 1 à chaque fois.

3. Les formules qui donnent a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n se déduisent de la définition de ces suites. Comme $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$ et $u_n = \frac{a_n}{b_n}$, on a $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{\frac{a_n}{b_n}} = 2 + \frac{b_n}{a_n} = \frac{2\times a_n + b_n}{a_n}$.
Mais comme $u_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$, on en déduit, par identification que $a_{n+1} = 2 \times a_n + b_n$ et $b_{n+1} = a_n$.
Finalement, en remplaçant b_n par a_{n-1}, on obtient $a_{n+1} = 2 \times a_n + a_{n-1}$. Ainsi, la suite a est définie par une relation de récurrence qui porte sur deux termes consécutifs (comme la suite de Fibonacci, exemple 41 du cours) ; de même pour la suite b qui, finalement, est la même suite mais avec un décalage des indices ($b_{n+1} = a_n$).

Montrons que les fractions obtenues sont irréductibles (a_n et b_n premiers entre eux pour tout $n \geqslant 0$) par récurrence :
$\frac{a_0}{b_0}$ est irréductible, donc la propriété est vraie pour $n = 0$
Supposons $\frac{a_n}{b_n}$ est irréductible ; dans ce cas a_n et $b_n = a_{n-1}$ sont premiers entre eux.
Au rang suivant, $a_{n+1} = 2 \times a_n + b_n = 2 \times a_n + a_{n-1}$ et $b_{n+1} = a_n$.
Si la fraction $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ était simplifiable, il existerait des entiers $k > 1$, α et β tels que
$a_{n+1} = 2 \times a_n + b_n = k \times \alpha$ et $b_{n+1} = a_n = k \times \beta$.
On en déduirait que $b_n = k \times \alpha - 2 \times a_n = k \times \alpha - 2 \times k \times \beta = k(\alpha - 2\beta)$.
Ainsi, a_n et b_n seraient des multiples de k et la fraction $\frac{a_n}{b_n}$ serait simplifiable par k, ce qui ne se peut pas.La fraction $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ est donc irréductible.
Conclusion : toutes les fractions $u_n = \frac{a_n}{b_n}$ obtenues sont irréductibles pour $n \geqslant 0$.

Ces formules se programment facilement : si on cherche à déterminer a_n et b_n connaissant n (ce qui est demandé par l'énoncé) on utilise une boucle fermée (boucle *for*) ; si on cherche la valeur de n à partir de laquelle on a certaine condition qui est atteinte (par exemple u_n assez proche d'une certaine valeur), on utilise une boucle conditionnelle (boucle *while*). Le programme qui suit répond strictement à la première demande. On aurait pu choisir de faire l'affichage des valeurs de (a_n, b_n) à chaque tour de boucle, cela aurait évité de relancer 15 fois le programme.

```
n=int(input("Quelle est la valeur de n? "))
a,b=2,1
for i in range(n):
    a,b=2*a+b,a
print("Numérateur a=",a)
print("Dénominateur b=",b)
print("Valeur approchée u=",a/b)
```

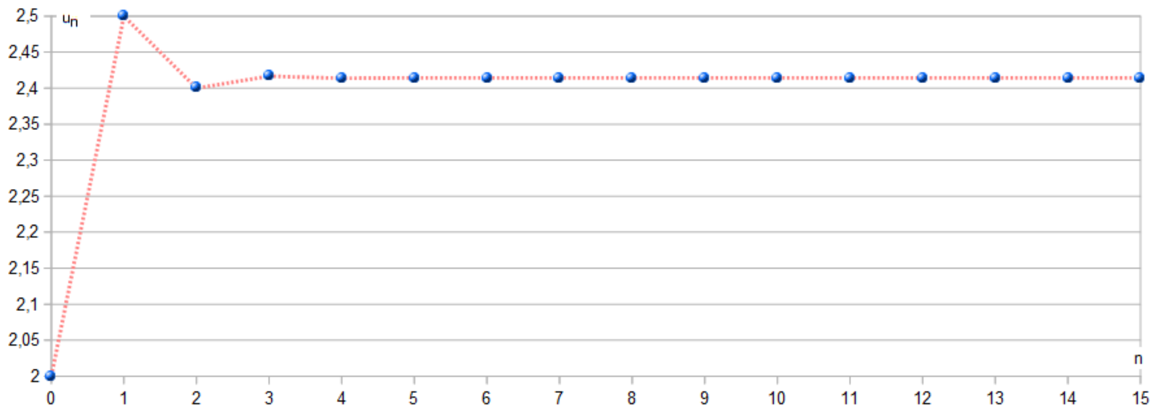
```
Quelle est la valeur de n? 1
Numérateur a= 5
Dénominateur b= 2
Valeur approchée u= 2.5
```

```
Quelle est la valeur de n? 15
Numérateur a= 1136689
Dénominateur b= 470832
Valeur approchée u= 2.41421356237469
```

Le tableau résume les valeurs obtenues pour a_n et b_n avec la valeur approchée de $u_n = \frac{a_n}{b_n}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741	13860	33461	80782	195025	470832	1136689
b_n	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741	13860	33461	80782	195025	470832
u_n	2	2,5	2,4	2,4167	2,4138	2,4143	2,41420	2,41422	2,414213198	2,414213625	2,414213552	2,414213564	2,4142135621	2,41421356243	2,41421356236	2,41421356237

Je l'ai construit au tableur afin d'obtenir directement le graphique suivant.



On observe que les valeurs de u_n deviennent rapidement très proches les unes des autres. Il faut afficher 11 décimales pour distinguer u_{15} de u_{14}. Sur le graphique cela devient impossible de distinguer les ordonnées des points à partir de u_4 ou u_5, même en n'affichant que la portion du plan pour laquelle $2 \leqslant y \leqslant 2,5$. La suite (u_n) tend a devenir constante, en alternant des valeurs supérieures à une certaine limite l et des valeurs inférieures. En effet, en prenant les valeurs de 2 en 2, on a deux suites qui semblent converger vers la même limite, l'une décroissante et l'autre croissante :

- La suite croissante $2 - 2,4 - 2,4138 - 2,4142 - 2,414213198 - \cdots$
- La suite décroissante $2,5 - 2,4167 - 2,4143 - 2,41422 - 2,414213625 - \cdots$

Il est donc clair que quand n tend vers l'infini, u_n tend vers l.

4. L'équation $x = 2 + \frac{1}{x}$ peut s'écrire, si $x \neq 0$, $x^2 = 2x + 1 \iff x^2 - 2x - 1 = 0$.

Les solutions de cette équation du second degré sont $x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$.
La solution positive est $1 + \sqrt{2} \approx 2,4142135623731$; elle semble correspondre à la valeur vers laquelle s'approchent les termes de la suite (u_n).
Á partir de l'égalité $1+\sqrt{2} = 2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}$, on peut remplacer *ad libitum* la valeur du dernier dénominateur :

$$1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} \Longrightarrow 1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}} \Longrightarrow 1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}}} \Longrightarrow \cdots$$

De cette façon, on comprend que la limite de la suite (u_n) est égale à $1 + \sqrt{2}$ car ses termes successifs s'approchent de plus en plus de la « fraction continue » :

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\cdots}}}$$

6. Calculons $2f(n)+f(n-1)$ en remplaçant chacun des termes par son expression :

$$\begin{aligned}
2f(n)+f(n-1) &= 2\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n-\left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}+\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}}{2\sqrt{2}}\\
&= \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}}{2\sqrt{2}}\left[2\left(1+\sqrt{2}\right)+1\right]-\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}}{2\sqrt{2}}\left[2\left(1-\sqrt{2}\right)+1\right]\\
&= \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}}{2\sqrt{2}}\left[3+2\sqrt{2}\right]-\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}}{2\sqrt{2}}\left[3-2\sqrt{2}\right]\\
&= \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}}{2\sqrt{2}}\left[1+\sqrt{2}\right]^2-\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}}{2\sqrt{2}}\left[1-\sqrt{2}\right]^2\\
&= \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}}{2\sqrt{2}}-\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}}{2\sqrt{2}}\\
&= f(n+1)
\end{aligned}$$

Ainsi $f(n+1)=2f(n)+f(n-1)$ pour tout entier $n\geqslant 1$ (on a manipulé des produits avec des exposants positifs si $n\geqslant 1$).
Calculons maintenant $f(2)$ et $f(3)$:

$$f(2)=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-\left(1-\sqrt{2}\right)^2}{2\sqrt{2}}=\frac{3+2\sqrt{2}-(3-2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=2=a_0$$

$$\begin{aligned}
f(3) &= \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^3-\left(1-\sqrt{2}\right)^3}{2\sqrt{2}}\\
&= \frac{1+3\sqrt{2}+3\times 2+2\sqrt{2}-(1-3\sqrt{2}+3\times 2-2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}\\
&= \frac{10\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=5=a_1
\end{aligned}$$

Comme $f(n+1)=2f(n)+f(n-1)$ et que $f(2)=a_0$ et $f(3)=a_1$, on en déduit que $f(4)=2f(3)+f(2)=2a_1+a_0=a_2$.
De proche en proche, cela implique que $f(5)=a_3$, $f(6)=a_4$, $f(7)=a_5$, etc.

Montrons par récurrence que $a_n=f(n+2)$:
On sait que $a_0=f(2)$ et que $a_1=f(3)$; la propriété est donc vraie pour $n=0$ et $n=1$.
Supposons que $a_{n-1}=f(n+1)$ et $a_n=f(n+2)$ pour un rang $n>0$; on a alors $a_{n+1}=2\times a_n+a_{n-1}=2\times f(n+2)+f(n+1)$, or on vient de montrer que $f(n+1)=2f(n)+f(n-1)$ pour tout $n>0$ et donc $f(n+2)=2f(n+1)+f(n)$. On en déduit que $a_{n+1}=2\times f(n+2)+f(n+1)=f(n+3)$.
Conclusion : la propriété $a_n=f(n+2)$ étant vraie pour n et pour $n-1$ est vraie pour $n+1$, or elle est vraie pour $n=0$ et $n=1$. Elle est donc vraie pour tout $n\geqslant 0$.

On peut donc calculer a_n en prenant $f(n+2)$ et de même b_n en prenant $f(n+1)$.
Finalement on en déduit l'expression explicite de u_n :

$$u_n=\frac{a_n}{b_n}=\frac{f(n+2)}{f(n+1)}=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+2}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+2}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}}$$

Correction de l'exercice 3.6 (Sommes)
1. La somme des n premiers entiers se calcule en additionnant 2 fois chacun des nombres, puis en réorganisant cette somme de manière à avoir n fois la somme $n+1$:

$$\begin{aligned}
2S_n &= (1+2+\cdots+(n-1)+n)+(1+2+\cdots+(n-1)+n)\\
&= (1+2+\cdots+(n-1)+n)+(n+(n-1)+\cdots+2+1)\\
&= (1+n)+(2+(n-1))+\cdots+((n-1)+2)+(n+1)=n(n+1)
\end{aligned}$$

D'où $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2a). Démontrons par récurrence que la somme des n premiers carrés est $C_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:
Cette propriété est vraie pour les premiers entiers :

- pour $n = 0$: $C_0 = 0^2 = 0$ et $\frac{0(0+1)(2\times0+1)}{6} = \frac{0\times1\times1}{6} = 0$
- pour $n = 1$: $C_1 = 1^2 = 1$ et $\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = \frac{1\times2\times3}{6} = 1$
- pour $n = 2$: $C_2 = 1^2 + 2^2 = 5$ et $\frac{2(2+1)(2\times2+1)}{6} = \frac{2\times3\times5}{6} = 5$

Supposons qu'elle soit vraie pour un entier $n > 0$ et calculons C_{n+1} :
$C_{n+1} = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = C_n + (n+1)^2$,
or $C_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (hypothèse de récurrence). On a par conséquent :
$C_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right) = (n+1)\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6} = (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6}$
Comme $2n^2+7n+6 = (n+2)(2n+3)$, on en déduit que $C_{n+1} = (n+1)\frac{(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$.
C'est exactement ce que l'on s'attendait à trouver avec la formule.
Celle-ci est donc valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2b). Démontrons par récurrence que la somme des n premiers cubes est $K_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$:
Cette propriété est vraie pour les premiers entiers :

- pour $n = 0$: $K_0 = 0^3 = 0$ et $\left(\frac{0\times(0+1)}{2}\right)^2 = 0$
- pour $n = 1$: $K_1 = 1^3 = 1$ et $\left(\frac{1\times(1+1)}{2}\right)^2 = \frac{2}{2}^2 = 1^2 = 1$
- pour $n = 2$: $K_2 = 1^3 + 2^3 = 9$ et $\left(\frac{2\times(2+1)}{2}\right)^2 = \frac{6}{2}^2 = 3^2 = 9$

Supposons qu'elle soit vraie pour un entier $n > 0$ et calculons K_{n+1} :
$K_{n+1} = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = K_n + (n+1)^3$,
or $K_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ (hypothèse de récurrence). On a par conséquent :
$K_{n+1} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\frac{n^2+4(n+1)}{4} = (n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4} = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}$
On en déduit que $K_{n+1} = \left(\frac{(n+1)^2((n+1)+1)}{2}\right)^2$.
C'est exactement ce que l'on s'attendait à trouver avec la formule.
Celle-ci est donc valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3a). La suite (u) est définie par $u_n = 1\times2 + 2\times3 + 3\times4 + \cdots + n\times(n+1)$.
Comme $n(n+1) = n^2 + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrivons cette somme autrement : $u_n = (1^2+1) + (2^2+2) + (3^2+3) + \cdots + (n^2+n) = (1+2+3+\cdots+n) + (1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) = S_n + C_n$
Or $S_n + C_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{3n(n+1)+n(n+1)(2n+1)}{6} = n(n+1)\frac{3+(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3b). La suite (v) est définie par $v_n = 1\times2\times3 + 2\times3\times4 + 3\times4\times5 + \cdots + n\times(n+1)\times(n+2)$.
Comme $n\times(n+1)\times(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrivons cette somme autrement : $v_n = (1^3+3\times1^2+2\times1)+(2^3+3\times2^2+2\times2)+(3^3+3\times3^2+2\times3)+\cdots+(n^3+3\times n^2+2\times n) = K_n+3C_n+2S_n$
Or $K_n + 3C_n + 2S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{2} = \frac{(n(n+1))^2+2n(n+1)(2n+1)+4n(n+1)}{4} = n(n+1)\frac{n(n+1)+2(2n+1)+4}{4} = n(n+1)\frac{n^2+5n+6}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

3c). La suite (w) est définie par $w_n = 1\times3\times5 + 2\times4\times6 + 3\times5\times7 + \cdots + n\times(n+2)\times(n+4)$.
Comme $n\times(n+2)\times(n+4) = n^3 + 6n^2 + 8n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrivons cette somme autrement : $w_n = (1^3+6\times1^2+8\times1)+(2^3+6\times2^2+8\times2)+(3^3+6\times3^2+8\times3)+\cdots+(n^3+6\times n^2+8\times n) = K_n+6C_n+8S_n$
Or $K_n + 6C_n + 8S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{8n(n+1)}{2} = \frac{(n(n+1))^2+4n(n+1)(2n+1)+16n(n+1)}{4} = n(n+1)\frac{n(n+1)+4(2n+1)+16}{4} = n(n+1)\frac{n^2+9n+20}{4} = \frac{n(n+1)(n+4)(n+5)}{4}$

4. Il reste à valider ces formules (une erreur de calcul est toujours possible). On peut déjà les essayer pour de petites valeurs de n mais la question suggère de le faire par programme. Écrivons un tel programme pour la suite (w). J'ai laissé en commentaires dans le programme (en rouge) les modifications à faire pour la suite (u) et la suite (v).

```python
def terme(k):
    return k*(k+2)*(k+4)          #k*(k+1)          #k*(k+1)*(k+2)

def formule(k):
    return k*(k+1)*(k+4)*(k+5)/4 #k*(k+1)*(k+2)/3 #k*(k+1)*(k+2)*(k+3)/4

n=int(input("Entrer le rang du dernier terme de la somme : "))
somme=0
for i in range(1,n+1): somme+=terme(i)
print("La somme vaut {}".format(somme))
print("La formule donne {}".format(formule(n)))
```

Les résultats sont concluants : le calcul effectif de la somme des 100 termes et la formule donne le même résultat pour les 3 sommes. Comme une coïncidence est peu probable, j'en conclus que mes formules sont correctes. $u_{100} = 343\,400$, $v_{100} = 26\,527\,650$ et $w_{100} = 27\,573\,000$

3.1.3 Suites arithmétiques et géométriques

Correction de l'exercice 3.7 (Suite auxiliaire géométrique)

1. $u_{n+1} = 2u_n + 5$

Pour montrer que u n'est ni arithmétique ni géométrique, je vais observer trois termes consécutifs :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 2 + 5 = 7 \text{ et } u_2 = 2 \times 7 + 5 = 19$$

$u_1 - u_0 = 7 - 1 = 6$ tandis que $u_2 - u_1 = 19 - 7 = 12 \neq 6$; la suite u n'est pas arithmétique.
$\frac{u_1}{u_0} = \frac{7}{1} = 7$ tandis que $\frac{u_2}{u_1} = \frac{19}{7} \neq 7$; la suite u n'est pas géométrique.
En posant $v_n = u_n + 5$ pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $v_{n+1} = u_{n+1} + 5 = (2u_n + 5) + 5 = 2u_n + 10 = 2(u_n + 5) = 2v_n$.
(v_n) est donc une suite géométrique de raison 2.
Le premier terme de cette suite est $v_0 = u_0 + 5 = 1 + 5 = 6$.
Ainsi $v_n = 6 \times 2^n$ et donc $u_n = v_n - 5 = 6 \times 2^n - 5$.

2. $u_{n+1} = -3u_n + 8$

Pour montrer que u n'est ni arithmétique ni géométrique, je vais observer trois termes consécutifs :

$$u_0 = 6,\ u_1 = -3 \times 6 + 8 = -10 \text{ et } u_2 = -3 \times (-10) + 8 = 38$$

$u_1 - u_0 = -10 - 6 = -16$ tandis que $u_2 - u_1 = 38 + 10 = 48 \neq -16$; la suite u n'est pas arithmétique.
$\frac{u_1}{u_0} = \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3}$ tandis que $\frac{u_2}{u_1} = \frac{38}{-10} = -3,8 \neq \frac{-5}{3}$; la suite u n'est pas géométrique.
En posant $v_n = u_n - 2$ pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = (-3u_n + 8) - 2 = -3u_n + 6 = -3(u_n - 2) = -3v_n$.
(v_n) est donc une suite géométrique de raison -3.
Le premier terme de cette suite est $v_0 = u_0 - 2 = 6 - 2 = 4$.
Ainsi $v_n = 4 \times (-3)^n$ et donc $u_n = v_n + 2 = 4 \times (-3)^n + 2$.

3. *Généralisation :* $u_{n+1} = au_n + b$

Pour que u ne soit pas arithmétique, il faut que $a \neq 1$. Et pour que u ne soit pas géométrique non plus, il faut que $b \neq 0$.
On pose $v_n = u_n - \alpha$ pour tout entier $n \geqslant 0$, et on calcule α pour que (v_n) soit une suite géométrique.
$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = (au_n + b) - \alpha = au_n + b - \alpha = a(u_n - \alpha) + b + \alpha a - \alpha = a(u_n - \alpha) + b + \alpha(a-1)$.
(v_n) est une suite géométrique de raison a si et seulement si :

$$b + \alpha(a-1) = 0 \iff b = -\alpha(a-1) \iff \alpha = \frac{-b}{a-1} = \frac{b}{1-a}$$

Par conséquent, la suite v est géométrique de raison $a \neq 1$ quand $v_n = u_n - \frac{b}{1-a} = u_n + \frac{b}{a-1}$.
Dans ce cas, le premier terme est $v_0 = u_0 + \frac{b}{a-1} = c + \frac{b}{a-1}$.
L'expression l'explicite de v_n est $v_0 \times a^n = \left(c + \frac{b}{a-1}\right) \times a^n$.
On en tire l'expression l'explicite de u_n qui est $u_n = v_n + \alpha = \left(c + \frac{b}{a-1}\right) \times a^n + \frac{b}{1-a}$.
Remarquons, comme le suggérait l'énoncé, que nous pouvons calculer α en cherchant la solution de $ax + b = x$.

Cette équation équivaut, en effet, à $ax - x = -b \iff x(a-1) = -b \iff x = \frac{-b}{a-1} = \frac{b}{1-a}$.
Quand $a = 1$, ce qui précède n'est pas valable. Dans ce cas $u_{n+1} = u_n + b$, la suite u est arithmétique de raison b.

Vérifions les résultats précédents :

1. Si $u_{n+1} = 2u_n + 5$ et $u_0 = 1$, on a $a = 2, b = 5, c = 1$ et donc $\alpha = \frac{b}{1-a} = \frac{5}{1-2} = -5$ (on retrouve $v_n = u_n + 5$) et l'expression explicite $u_n = \left(c + \frac{b}{a-1}\right) \times a^n + \frac{b}{1-a} = (1+5) \times 2^n - 5 = 6 \times 2^n - 5$
2. Si $u_{n+1} = -3u_n + 8$ et $u_0 = 6$, on a $a = -3, b = 8, c = 6$ et donc $\alpha = \frac{b}{1-a} = \frac{8}{1+3} = 2$ (on retrouve $v_n = u_n - 2$) et l'expression explicite $u_n = \left(c + \frac{b}{a-1}\right) \times a^n + \frac{b}{1-a} = (6-2) \times (-3)^n + 2 = 4 \times (-3)^n + 2$

Sachant que $u_{n+1} = \frac{u_n}{3} - \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{6}$, on a $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{6}$ et donc $\alpha = \frac{b}{a-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}-1} = \frac{3}{4}$ et l'expression explicite $u_n = (c+\alpha) \times a^n - \alpha = \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 5 = \frac{11}{12 \times 3^n} - \frac{3}{4}$.

Correction de l'exercice 3.8 (Suite auxiliaire arithmétique)

1. $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$
En posant $v_n = \frac{1}{u_n}$ pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{u_n}{1+2u_n}} = \frac{1+2u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} + \frac{2u_n}{u_n} = v_n + 2$.
(v_n) est donc une suite arithmétique de raison 2.
Le premier terme de cette suite est $v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2}$.
Ainsi $v_n = \frac{1}{2} + 2n$ et donc $u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{\frac{1}{2}+2n} = \frac{2}{1+4n}$.
Remarque : le numérateur de cette fraction ne s'annulant jamais et son dénominateur étant toujours défini, on a bien $u_n \neq 0$ pour tout entier n, et les termes de la suite v sont bien toujours définis.

2. $u_{n+1} = \frac{10u_n}{10+u_n}$
En posant $v_n = \frac{5}{u_n}$ pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $v_{n+1} = \frac{5}{u_{n+1}} = \frac{5}{\frac{10u_n}{10+u_n}} = \frac{5(10+u_n)}{10u_n} = \frac{10+u_n}{2u_n} = \frac{10}{2u_n} + \frac{u_n}{2u_n} = v_n + \frac{1}{2}$.
(v_n) est donc une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.
Le premier terme de cette suite est $v_0 = \frac{5}{u_0} = \frac{5}{5} = 1$.
Ainsi $v_n = 1 + \frac{n}{2}$ et donc $u_n = \frac{5}{v_n} = \frac{5}{1+\frac{n}{2}} = \frac{10}{2+n}$.
Remarque : le numérateur de cette fraction ne s'annulant jamais et son dénominateur étant toujours défini, on a bien $u_n \neq 0$ pour tout entier n, et les termes de la suite v sont bien toujours définis.

3. *Généralisation :* $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+au_n}$ En posant $v_n = \frac{\alpha}{u_n}$ pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :
$v_{n+1} = \frac{\alpha}{u_{n+1}} = \frac{\alpha}{\frac{u_n}{1+au_n}} = \frac{\alpha(1+au_n)}{u_n} = \frac{\alpha}{u_n} + \frac{\alpha a u_n}{u_n} = v_n + \alpha a$.
La suite (v_n) est arithmétique pour tout α et sa raison est αa.
Le premier terme de cette suite est $v_0 = \frac{\alpha}{u_0} = \frac{\alpha}{b}$.
Ainsi $v_n = \frac{\alpha}{b} + n\alpha a$ et donc $u_n = \frac{\alpha}{v_n} = \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{b}+n\alpha a} = \frac{b}{1+nab}$.
Remarques : on prendra soin de choisir un $\alpha \neq 0$ car sinon la suite v serait nulle et ne permettrait pas de déterminer u_n.
Par ailleurs, la suite u est constante si $a = 0$ ou si $b = 0$. Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, l'expression explicite de u_n est toujours définie à condition que $1 + nab \neq 0$. Il faut donc s'assurer que $\frac{-1}{ab}$ ne soit pas un entier positif.
La suite définie par $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$ et $u_0 = \frac{-1}{10}$ par exemple ne respecte pas cette condition. Pour une telle suite, la formule explicite n'est pas définie pour $n = \frac{-1}{ab} = \frac{-1}{2 \times \frac{-1}{10}} = \frac{-10}{-2} = 5$.
Observons le comportement de cette suite :

$$u_0 = \frac{-1}{10},\ u_1 = \frac{\frac{-1}{10}}{1+\frac{-2}{10}} = \frac{-1}{8},\ u_2 = \frac{\frac{-1}{8}}{1+\frac{-2}{8}} = \frac{-1}{6},\ u_3 = \frac{\frac{-1}{6}}{1+\frac{-2}{6}} = \frac{-1}{4},\ u_4 = \frac{\frac{-1}{4}}{1+\frac{-2}{4}} = \frac{-1}{2}$$

Ensuite, u_5 n'est pas défini (division par 0) ni aucun u_n pour $n \geqslant 5$.

Vérifions les résultats précédents :

1. Si $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$ et $u_0 = 2$, on a $a = 2, b = 2$ et n ne peut jamais être égal à $\frac{-1}{ab} = \frac{-1}{4}$. L'expression explicite, valable pour tout entier n est $u_n = \frac{b}{1+nab} = \frac{2}{1+4n}$.
2. Si $u_{n+1} = \frac{10u_n}{10+u_n} = \frac{u_n}{1+\frac{u_n}{10}}$ et $u_0 = 5$, on a $a = \frac{1}{10}, b = 5$ et n ne peut jamais être égal à $\frac{-1}{ab} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$. L'expression explicite, valable pour tout entier $n \geqslant 0$, est $u_n = \frac{b}{1+nab} = \frac{5}{1+\frac{n}{2}} = \frac{10}{2+n}$.

Sachant que $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2-u_n} = \frac{u_n}{1-\frac{u_n}{2}}$ et $u_0 = 6$, on a $a = \frac{-1}{2}, b = 6$ et n ne peut jamais être égal à $\frac{-1}{ab} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$. L'expression explicite, valable pour tout entier $n \geqslant 0$, est $u_n = \frac{6}{1-3n}$.

3.1.4 Limites des suites

Correction de l'exercice 3.9 (Suite logistique)

$\boxed{\mu < 1 :}$

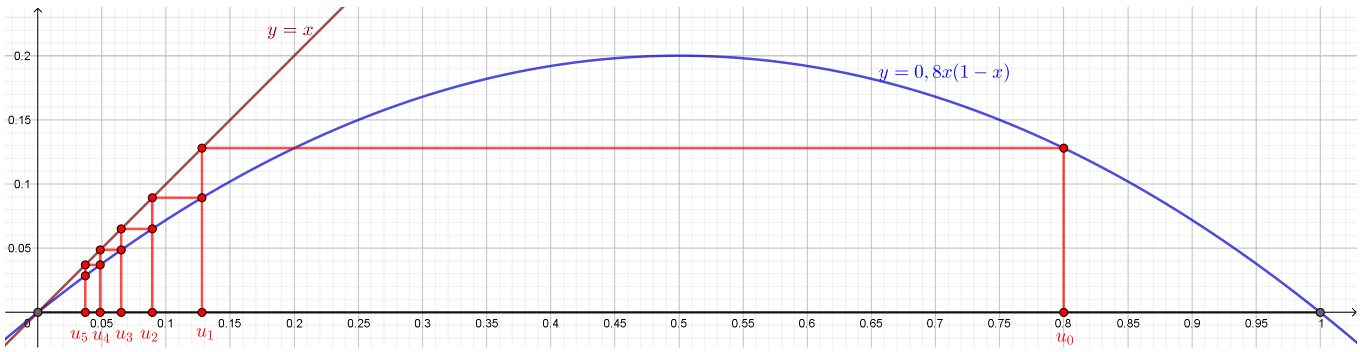
J'ai choisi $\mu = 0,8$ et $x_0 = 0,6$.

1. Représentation graphique :

On commence par tracer la courbe d'équation $y = 0,8x(1-x)$ puis on représente la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = 0,8x_n(1-x_n)$, $x_0 = 0,6$. On peut remarquer au passage que le trinôme $0,8x(1-x)$ a pour maximum $0,2$, ce qui correspond à la valeur $\frac{\mu}{4}$.

La construction des points de coordonnées $(x_n; 0)$ a été décrite dans l'énoncé (et aussi dans le cours, notamment dans les exercices 44 et 45).

On constate que la suite (x_n), pour ces valeurs de μ et x_0, est décroissante. Les termes s'approchent progressivement de 0 qui semble être la limite vers laquelle converge la suite.



2. Utilisation du tableur :

Obtenir les valeurs de x_n est très simple avec le tableur. Les résultats confirment l'observation du graphique : la suite décroit et tend vers 0. On obtient $x_{50} \approx 0,000002082675573$ et on pourrait aller facilement plus loin avec le tableur. La conjecture n'est pas mise en défaut mais, à ce stade, elle n'est pas prouvée non plus.

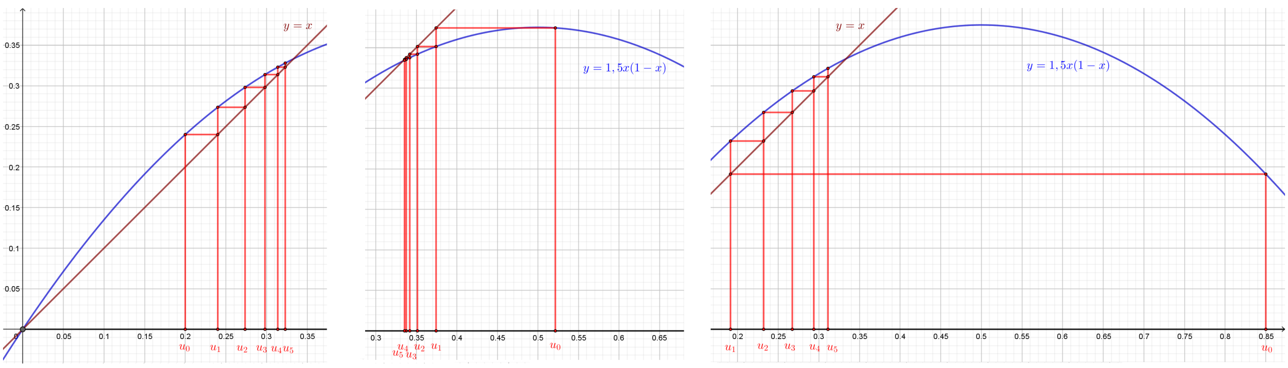
μ	0,8									
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_n	0,6	0,192000	0,124109	0,086965	0,063521	0,047589	0,036260	0,027956	0,021739	0,017013
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_n	0,013379	0,010560	0,008359	0,006631	0,005270	0,004194	0,003341	0,002664	0,002125	0,001697
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_n	0,001355	0,001083	0,000865	0,000691	0,000553	0,000442	0,000353	0,000283	0,000226	0,000181
n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_n	0,000145	0,000116	0,000093	0,000074	0,000059	0,000047	0,000038	0,000030	0,000024	0,000019
n	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_n	0,000016	0,000012	0,000010	0,000008	0,000006	0,000005	0,000004	0,000003	0,000003	0,000002

3. Si la suite converge vers une limite l, deux termes consécutifs x_{n+1} et x_n tendent à s'approcher tous les deux de l. Donc, à la limite, il y a égalité entre ces termes, ce qui s'écrit $x = \mu x(1-x)$. Cette

équation du second degré que l'on réécrit $\mu x^2 + (1-\mu)x = 0$ a pour solution évidente $x = 0$, l'autre étant la solution de $\mu x + (1-\mu) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{\mu-1}{\mu} = 1 - \frac{1}{\mu}$.
Ainsi, les deux valeurs potentielles pour la limite de cette suite sont 0 et $1 - \frac{1}{\mu}$ (dans notre exemple $1 - \frac{1}{0{,}8} = -0,25$).

4. Les termes de la suite sont tous compris entre 0 et 1 : en effet, au départ on choisit $x_0 \in [0;1]$ et ensuite, si $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ on a $-1 \leqslant -x_n \leqslant 0$ et donc $0 \leqslant 1 - x_n \leqslant 1$. Donc x_{n+1}, étant le produit de 3 nombres de l'intervalle $[0;1]$, est forcément un nombre de l'intervalle $[0;1]$.
Tant que $x_n \neq 0$, on peut écrire $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \mu(1-x_n) \leqslant \mu < 1$. En effet, comme on l'a vu $0 \leqslant 1 - x_n \leqslant 1$ et donc, en multipliant par $0 < \mu < 1$, on a $0 \leqslant \mu(1-x_n) \leqslant \mu$.
La suite (x_n) est donc décroissante et minorée par 0. Sa limite est donc égale à 0. L'autre limite potentielle est $1 - \frac{1}{\mu}$, mais comme $0 < \mu < 1$, $\frac{1}{\mu} > 1$ (la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^+$) et donc $1 - \frac{1}{\mu} < 0$. Cette valeur est l'abscisse du 2e point d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = x$ (le 1er point est l'origine). Ce point est en dehors de la portion de courbe qui nous intéresse ici.

$\boxed{1 < \mu < 2 :}$
1. Représentation graphique :
J'ai choisi $\mu = 1,5$ et $x_0 = 0,2$ (à gauche), $x_0 = 0,52$ (au centre) et $x_0 = 0,85$ (à droite).
Je m'aperçois que la suite est croissante pour les petites valeurs de x_0. Je dois prendre $x_0 < 1 - \frac{1}{\mu}$ (l'abscisse du 2e point d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = x$). Cette fois, avec $\mu = 1,5$, on a $1 - \frac{1}{\mu} = 1 - \frac{1}{1{,}5} = \frac{1}{3}$. On retrouve ce comportement lorsque x_0 dépasse une certaine valeur, égale à .



2. Utilisation du tableur :

$1 < \mu < 3$(on pourra subdiviser cet intervalle en deux morceaux : avant et après $\mu = 2$).

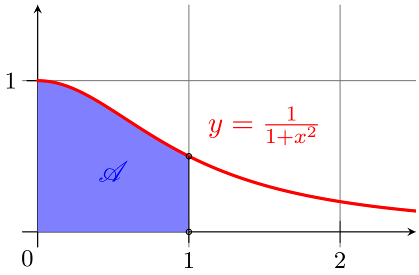
$3 < \mu < 4$ (on pourra subdiviser cet intervalle en différents morceaux correspondants à des comportements différents. En particulier, on observera la différence entre ce qui se passe avant et après $\mu = 3,57$)

3.1.5 le coin du chercheur : l'irrationnel célèbre

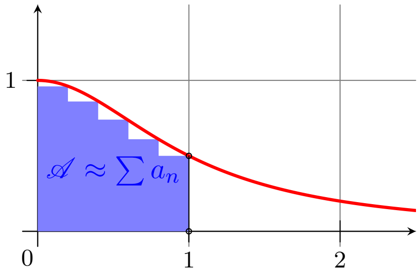
Correction de l'exercice 3.10

L'aire $\mathscr{A}$ est approchée par s_n en additionnant les aires a_n de n rectangles intérieurs au domaine.

La largeur de ces rectangles est $\frac{1}{n}$.
Les abscisses des sommets de ces rectangles (par exemple ceux qui sont sur la courbe) constituent la suite x :
$x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{2}{n}$, $\cdots$, $x_{n-1} = \frac{n-1}{n}$, $x_n = 1$.
Les hauteurs des rectangles constituent la suite h :
$h_1 = \frac{1}{1+x_1^2}$, $h_2 = \frac{1}{1+x_2^2}$, $\cdots$, $h_{n-1} = \frac{1}{1+x_{n-1}^2}$, $h_n = \frac{1}{2}$.
En simplifiant ces écritures, on trouve h :
$h_1 = \frac{n^2}{1+n^2}$, $h_2 = \frac{n^2}{2^2+n^2}$, $\cdots$, $h_{n-1} = \frac{n^2}{(n-1)^2+n^2}$, $h_n = \frac{1}{2}$.
Les aires des rectangles constituent la suite a :
$a_1 = \frac{n}{1+n^2}$, $a_2 = \frac{n}{2^2+n^2}$, $\cdots$, $a_{n-1} = \frac{n}{(n-1)^2+n^2}$, $a_n = \frac{1}{2n}$.
(division par n des hauteurs car les bases mesurent $\frac{1}{n}$)
Les aires a_n des rectangles s'ajoutent pour constituer une valeur approchée par défaut de $\mathscr{A}$.
Cette somme dépendant de n, nous la notons s_n :
$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$.



Voilà



donc notre formule qui permet le calcul algorithmique de S_n.
Déterminons s_{10}, s_{100}, s_{1000}, etc. en écrivant le programme suivant :

Algorithme

```
Lire n
s=0
Pour i allant de 1 à n
    s=s+n/(i²+n²)
Fin du Pour
Afficher s
```

Programme en Python

Rappel : la syntaxe a+=b signifie ici a=a+b

```
n,s=int(input("n=")),0
for i in range(1,n+1):
    s+=n/(i**2+n**2)
print("4s{}={}".format(n,4*s))
```

Pour une Casio

```
"N"?→ N
0 → S
For 1 → I To N
S+N/(I^2+N^2) → S
Next
S ◢
```

Pour une TI

```
Prompt N
0 → S
For (I,1,N)
S+N/(I^2+N^2) → S
End
Disp S
```

Voici donc les résultats obtenus en prenant successivement pour n, les valeurs suggérées : $S_1 = 0,5$; $S_{10} \approx 0,75$;
$4S_1 = 2$; $4S_{10} \approx 3,03$;

Je suppose que tout le monde reconnait alors, dans les valeurs de plus en plus précises de $4S_n$, les décimales du célèbre nombre π (nous avons, à chaque fois, tronqué les résultats).
Jusqu'à quelle valeur de n faut-il aller pour que $4S_n$ nous donne les 4 bonnes premières décimales de cet irrationnel ?
Bien que la valeur arrondie de π à 4 chiffres (au plus proche nombre de dix-millièmes) soit $3,1416$, les 4 bonnes premières décimales de ce nombre sont $3,1415$. Comme la suite S est croissante et majorée par π, il ne faut pas s'attendre à obtenir un 6 en 4ᵉ position, car cela n'arrivera jamais.
Modifions donc légèrement notre programme pour qu'il réponde à la question : on laisse la boucle `Pour i allant de 1 à n` et on l'inclut dans une boucle `Tant que 3.1415-4s>0`. Le programme va devoir essayer toutes les valeurs de n, successivement, jusqu'à trouver celle qui convient. Ne pas oublier d'incrémenter à chaque tour, la valeur de n.
Le programme Python modifié est donné ci-dessous.

Algorithme

```
n=0
s=0
Tant que 3.1415-4s>0
    n=n+1     s=0
    Pour i allant de 1 à n
        a=a+n/(i²+n²)
    Fin du Pour
Fin du Tant que
Afficher n, s et 4s
```

Programme en Python

```
n,s=0,0
While 3.1415-4*s>0:
    n,s=0,0
    For i in range(1,n+1):
        s+=n/(i**2+n**2)
print("pour n={}, s={} et
4s={}".format(n,s,4*s))
```

Voici donc le résultat obtenu avec ce nouveau programme :
Avec $n = 10794$, $S_n = 0,7853750020244538$ et $4S_n = 3,141500008097815$; il faut subdiviser l'intervalle $[0;1]$ en 10794 parties, pour espérer obtenir les 4 premières décimales de π.

Remarquons que cet algorithme nécessite de faire un travail énorme : on balaie toutes les possibilités jusqu'à trouver la bonne... Les utilisateurs d'une calculatrice testeront leur programme avec une valeur moins précise, par exemple $3,14$ ou même $3,1$.

❀ Règle : *Il est prudent de tester un programme sur des petites valeurs (sans forcément avoir une idée de la réponse) avant de le laisser tourner pendant des heures.*

On aurait pu optimiser cette recherche en optant pour une stratégie plus efficace : on aurait pu augmenter les valeurs de n de 100 en 100 afin obtenir un encadrement d'amplitude 100 pour la valeur cherchée. Ensuite, en parcourant cet intervalle unité par unité, on atteindrait la valeur exacte cherchée. Cela devrait diviser à peu près le temps d'exécution par 100, ce qui est appréciable...

Essayons cette nouvelle stratégie pour pousser l'exploration plus loin (sans changer l'algorithme, pour obtenir 5 décimales exactes, il faut attendre longtemps). Le programme Python ci-contre améliore l'idée exposée, en procédant de 1000 en 1000, puis de 100 en 100, etc. jusqu'à procéder de 1 en 1.

Avec cette version optimisée, pour obtenir les 5 premières décimales, soit l'approximation $3,14159$, on obtient :

```
n,s=0,0
val=3.14159
while val-4*s>0:
  n,s=n+1000,0
  for i in range(1,n+1):
    s+=n/(i**2+n**2)
n,s=n-1000,0
while val-4*s>0:
  n,s=n+100,0
  for i in range(1,n+1):
    s+=n/(i**2+n**2)
n,s=n-100,0
while val-4*s>0:
  n,s=n+10,0
  for i in range(1,n+1):
    s+=n/(i**2+n**2)
n,s=n-10,0
while val-4*s>0:
  n,s=n+1,0
  for i in range(1,n+1):
    s+=n/(i**2+n**2)
print("pour n={}, S={} \
et 4S={}".format(n,s,4*s))
```

Avec $n = 376849$, $S_n = 0,78539750000146$ et $4S_n = 3,14159000000584$; il faut subdiviser l'intervalle $[0;1]$ en 376 849 parties, pour espérer obtenir les 5 premières décimales de π avec cette méthode.

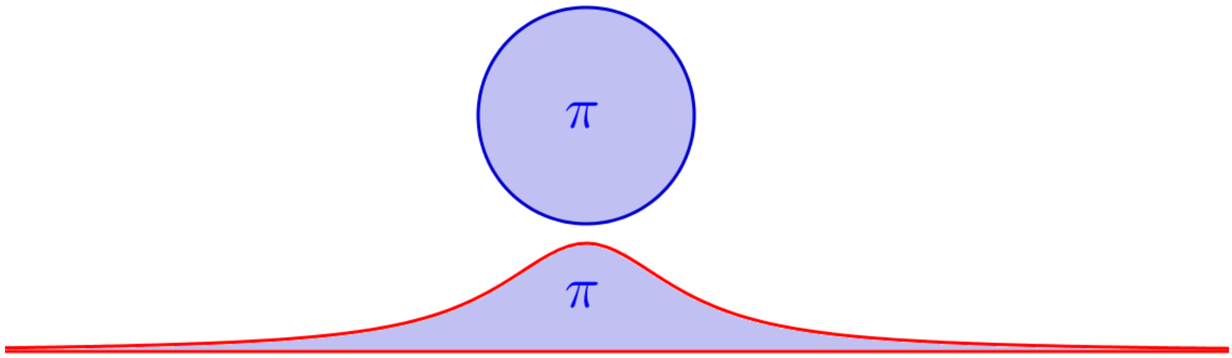
Question d'intuition : à votre avis, l'aire sous la courbe à partir de $x = 1$ jusqu'à $+\infty$, notée $\mathscr{B}$, est-elle plus ou moins grande que $\mathscr{A}$? Si la réponse est plus, cette aire est-elle finie ou infinie ?
La réponse est : ni plus ni moins grande, $\mathscr{A} = \mathscr{B}$.
Comment s'en apercevoir ? En classe de Terminale, on résoudra cette question à l'aide d'une intégrale. En attendant, il va encore falloir se contenter de valeurs approchées...
Le problème vient du fait qu'on doive faire une sommation d'aires rectangulaires aussi fines que possible (pour être proche de la valeur exacte) mais le nombre de rectangles de base $\frac{1}{n}$ est théoriquement illimité ici, puisqu'on va jusqu'à l'infini.
Notre idée est d'augmenter l'amplitude de l'intervalle en fonction de n (le nombre de subdivisions).

- Si $n = 4$, on subdivise l'intervalle $[1;2]$ en 4 parties, mais on va aussi tenir compte des intervalles $[2;3]$, $[3;4]$ et $[4;5]$. On ne va pas jusqu'à l'infini (c'est d'ailleurs impossible) mais ici, comme la précision attendu n'est pas très grande, on estime que c'est suffisant.
- Si $n = 5$, on subdivise l'intervalle $[1;2]$ en 5 parties, mais on va aussi tenir compte des intervalles $[2;3]$, $[3;4]$, $[4;5]$ et $[5;6]$.
- D'une façon générale, on subdivise l'intervalle $[1;2]$ en n parties, et on tient compte des inter-

valles $[2;3]$, $[3;4]$,…, $[n;n+1]$.
Pour résumer, nous allons faire exactement comme pour le calcul de $\mathscr{A}$, en additionnant les aires a_k, sauf que nous partons de $k=n+1$ et nous nous arrêtons à ... $n(n+1)$. Cela, parce qu'il est prévu de constituer n intervalles contenant chacun n subdivisions. Utilisons le même programme, légèrement modifié pour calculer cette somme. Je change juste, dans le premier programme, les valeurs de `i` : au lieu d'aller de 1 à n, on va de $n+1$ à $n(n+1)$. Les résultats sont les suivants. J'indique côte à côte les résultats des deux suites :

	A, estime $\mathscr{A}$	$4S_1=2$; $4S_{10}\approx 3,03$; $4S_{100}\approx 3,131$; $4S_{1000}\approx 3,140$; $4S_{10000}\approx 3,14149$
des deux suites :	B, estime $\mathscr{B}$	$4S_1=0,8$; $4S_{10}\approx 2,68$; $4S_{100}\approx 3,092$; $4S_{1000}\approx 3,136$; $4S_{10000}\approx 3,14109$
	D = B - A	$D_1=1,2$; $D_{10}\approx 0,35$; $D_{100}\approx 0,039$; $D_{1000}\approx 0,004$; $D_{10000}\approx 0,0004$

Voilà, je crois que c'est assez convainquant : les deux sommes s'approchent l'une de l'autre, et surtout elles s'approchent de la même limite π, enfin $\frac{\pi}{4}$ pour chacun des domaines. C'est l'aire de tout le domaine situé entre la courbe de la fonction et l'axe des abscisses qui vaut exactement π.
Les deux domaines colorés en bleu ci-dessous ont donc la même aire.



➩ En contemplant cette belle image, une question monte : si nous faisons tourner ces deux figures, qui ont même aire, autour de l'axe de symétrie vertical, les volumes engendrés par cette rotation ont-ils forcément la même mesure ? Qu'en pensez-vous ?
Est-ce le cas pour d'autres situations du même genre ?

> *Un carré de côté 2, si on le fait tourner autour de la médiatrice d'un de ses côtés, engendre un volume cylindrique qui mesure 2π.*
> *Prenons maintenant un triangle équilatéral de côté c solution de l'équation $\frac{\sqrt{3}c^2}{2}=2^2$ (pour que son aire égale celle du carré), soit $c=\sqrt{\frac{8}{\sqrt{3}}}$ (c'est mal parti pour avoir l'égalité...). Le volume engendré par la rotation de ce triangle est un cône de base $\frac{\pi c^2}{4}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ et de hauteur $c\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{2\sqrt{3}}$, son volume est donc $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\times\sqrt{2\sqrt{3}}\times\frac{1}{3}$...*
> *Sauf erreur de ma part, ce nombre n'est pas égal à 2π.*

Par conséquent, on est en droit de penser que les deux figures ci-dessus ne vont pas engendrer les mêmes volumes. Sauriez-vous estimer ces volumes ?
Celui engendré par le cercle est simple si on en connait la formule : il s'agit d'une sphère et son volume vaut $\frac{4\pi r^3}{3}$, donc ici $\frac{4\pi}{3}$.
Pour le volume sous la courbe 3D, il faut faire le calcul.