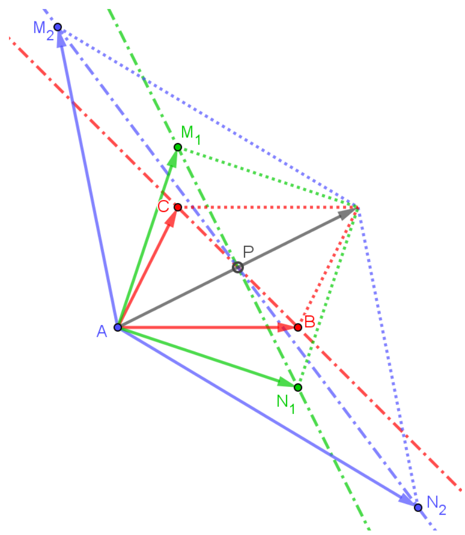
2.1 Corrections

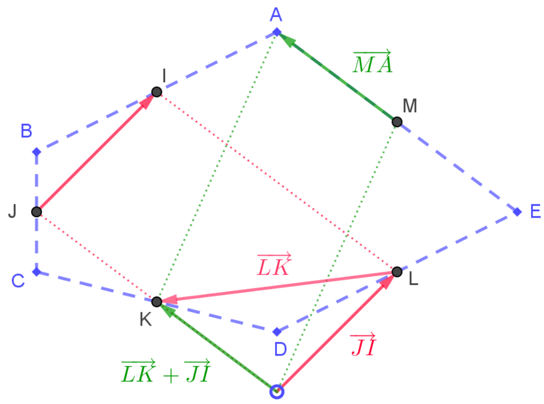
2.1.1 Vecteurs

Correction de l'exercice 2.1 (Point fixe)
Faisons une figure avec plusieurs solutions pour M et N, notées (M_1, N_1) et (M_2, N_2) ((B, C) est une 3ᵉ solution).

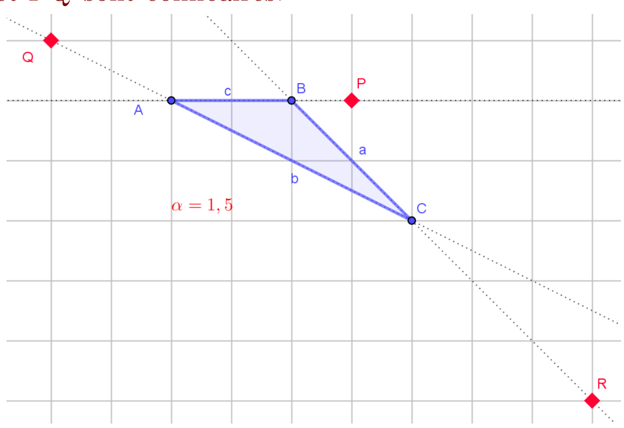
On constate que les droites (MN) passent toutes par le milieu de $[BC]$ que nous noterons donc P, le point fixe cherché. Montrons que P est sur (MN), et plus précisément que P est le milieu de $[MN]$:
$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM}) + (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PN})$ d'après Chasles.
Par conséquent $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$.
Or $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AP}$ puisque P est le milieu de $[BC]$.
On en déduit que $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$.
Mais comme $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ d'après les définitions de M et N, on en déduit que $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{0}$ ce qui est une traduction vectorielle du fait que P est le milieu de $[MN]$.



Correction de l'exercice 2.2 (Pentagone par ses milieux)
M étant le milieu de $[EA]$, on a $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$
Or, d'après Chasles, $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$. On en déduit que $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\right)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ED} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, soit, en introduisant les milieux L ($\overrightarrow{LD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$), K ($\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$), J ($\overrightarrow{JB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$) et I ($\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$) :
$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BI}$, d'où la conclusion cherchée, en utilisant Chasles à nouveau : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{JI}$.
On peut donc construire le point A (grâce au vecteur vert) et la suite de la construction ne posant pas de difficulté : B est tel que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ (B est le symétrique de A par rapport à I), C tel que $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BJ}$, etc.



Correction de l'exercice 2.3 (Points alignés)
Les points P, Q et R sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires.



$\boxed{\text{Cas particulier } \alpha = \frac{3}{2}}$:
$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CR} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$
d'où la figure ci-contre où on remarque que les points P, Q et R ne sont pas alignés.

$\boxed{\text{Cas général}}$:

1- Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$:

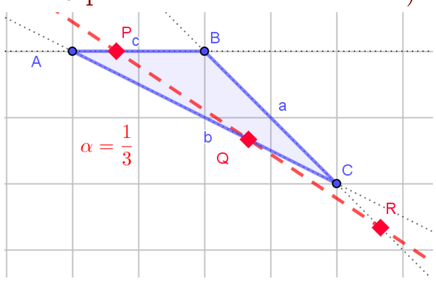
- comme $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB}$, les coordonnées de P sont $(\alpha; 0)$
- comme $\overrightarrow{CQ} = \alpha\overrightarrow{CA} \iff \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AC} = -\alpha\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AQ} = (1-\alpha)\overrightarrow{AC}$, les coordonnées de Q sont $(0; 1-\alpha)$
- comme $\overrightarrow{CR} = -\alpha\overrightarrow{CB} \iff \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AC} = -\alpha(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \iff \overrightarrow{AR} = -\alpha(\overrightarrow{AB} + (1+\alpha)\overrightarrow{AC}$, les coordonnées de R sont $(-\alpha; 1+\alpha)$

2- Dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, les coordonnées de $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ se déduisent de celles des points dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$:

- $\overrightarrow{PQ}$ a pour coordonnées $(0-\alpha; 1-\alpha-0)$, soit $(-\alpha; 1-\alpha)$
- $\overrightarrow{PR}$ a pour coordonnées $(-\alpha-\alpha; 1+\alpha-0)$, soit $(-2\alpha; 1+\alpha)$

3- Pour que P, Q et R soient alignés, il faut et il suffit que $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ soient colinéaires.
La condition de colinéarité s'écrit $-\alpha \times (1+\alpha) - (1-\alpha) \times (-2\alpha) = 0$.
Cela équivaut à $-\alpha \times (1 + \alpha - 2(1-\alpha)) = 0 \iff \alpha \times (-1+3\alpha) = 0$.
Il n'y a que deux valeurs qui vérifient cette égalité, mais la 1re est impossible car il est précisé dans l'énoncé que $\alpha \neq 0$ (si $\alpha = 0$, on aurait $Q = R = C$ et $P = A$, 2 des 3 points seraient confondus).

La seule possibilité est donc $-1 + 3\alpha = 0$, soit $\alpha = \frac{1}{3}$.
Dans ce cas $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.



Remarquer qu'on peut ici faire autrement :
Comme $2x_{\overrightarrow{PQ}} = x_{\overrightarrow{PR}}$ (car $2(-\alpha) = -2\alpha$), on en déduit que la condition de colinéarité peut s'écrire $2y_{\overrightarrow{PQ}} = y_{\overrightarrow{PR}}$
On en déduit $2(1-\alpha) = 1 + \alpha \iff 1 - 3\alpha = 0 \iff \alpha = \frac{1}{3}$.

Montrons qu'alors, Q est le milieu de $[PR]$:
$\overrightarrow{PQ}$ a pour coordonnées $(-\alpha; 1-\alpha)$, soit $(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$,
$\overrightarrow{PR}$ a pour coordonnées $(-2\alpha; 1+\alpha)$, soit $(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3})$.
On remarque que $x_{\overrightarrow{PR}} = 2 \times x_{\overrightarrow{PQ}}$ et $y_{\overrightarrow{PR}} = 2 \times y_{\overrightarrow{PQ}}$ ce qui prouve que $\overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{PQ}$ et achève la démonstration.

Correction de l'exercice 2.4 (Quadrilatère dans parallélogramme)

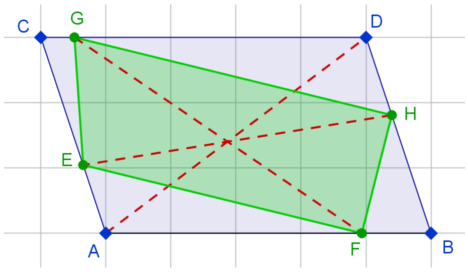
$\boxed{\text{Partie 1}}$:

En manipulant la figure créée sur GeoGebra, on remarque que le point d'intersection des diagonales du trapèze « semble » se déplacer sur la diagonale (AD) du parallélogramme (je mets des guillemets parce qu'il s'agit du terme consacré pour une conjecture : on voit que le point est « toujours » sur la diagonale).

1- Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, on a :

$A(0\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 1)$

De plus, $ABDC$ étant un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et donc $D(1\ ;\ 1)$.
Pour traduire $E \in [AC]$, on doit écrire qu'il existe un nombre $e \in [0; 1]$ tel que $\overrightarrow{AE} = e\overrightarrow{AC}$ et donc $E(0; e)$. De même pour les trois autres points, en particulier comme $H \in [BD]$ alors $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + h\overrightarrow{AC}$ avec $h \in [0; 1]$ et donc $H(1; h)$.



Avec ces coordonnées de points, calculons les composantes des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$: $\overrightarrow{EF}(f; -e)$ et $\overrightarrow{GH}(1-g; h-1)$.
Écrivons maintenant que $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires pour traduire le parallélisme des bases du trapèze :

$$f \times (h-1) - (-e) \times (1-g) = 0 \iff f \times (h-1) = e(g-1)$$

C'est la relation de l'énoncé qu'il nous restait à justifier.

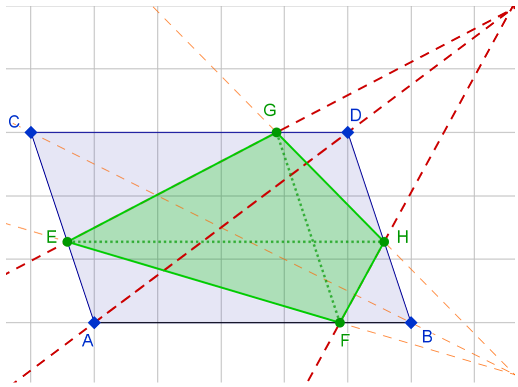
2- L'équation de la droite (AD) est évidemment $y = x$ ($A(0\ ;\ 0)$ et $D(1\ ;\ 1)$ vérifient cette égalité). Déterminons l'équation de la droite (EH) : on a $\overrightarrow{EH}(1; h-e)$ et, pour un point $M(x;y)$ quelconque $\overrightarrow{EM}(x; y-e)$. D'où $M \in (EH) \iff y - e - x(h-e) = 0 \iff y = x(h-e) + e$.
Déterminons, de même, l'équation de la droite (FG) : on a $\overrightarrow{FG}(g-f; h-e)$ et, pour un point $M(x;y)$ quelconque $\overrightarrow{FM}(x-f; y)$. D'où $M \in (FG) \iff x + y(f-g) - f = 0$.

3- Les coordonnées du point d'intersection $M_1 = (EH) \cap (AD)$ vérifient $y = x$ et $y = x(h-e)+e$ ce qui conduit à $x = x(h-e)+e \iff x(1+e-h) = e$.
Si $1+e-h \neq 0$, c'est-à-dire si $1+e \neq h$ ($1+e = h$ n'arrive jamais quand $e \in]0;1]$ et $h \in [0;1[$; ce cas correspond à $E = A$ et $H = D$), alors on a $\boxed{x_{M_1} = y_{M_1} = \frac{e}{1+e-h}}$
De même, les coordonnées du point d'intersection $M_2 = (FG) \cap (AD)$ vérifient les équations $y = x$ et $x + y(f-g) - f = 0$ ce qui conduit à $x + x(f-g) - f = 0 \iff x(1+f-g) = f$.
Si $1+f-g \neq 0$, c'est-à-dire si $1+f \neq g$ ($1+f = g$ n'arrive jamais quand $f \in]0;1]$ et $g \in [0;1[$; ce cas correspond à $F = A$ et $G = D$), alors on a $\boxed{x_{M_2} = y_{M_2} = \frac{f}{1+f-g}}$

4- Les points M_1 et M_2 sont confondus si et seulement si ils ont mêmes coordonnées.
Or $\frac{e}{1+e-h} = \frac{f}{1+f-g}$, dans le cas général où E et F diffèrent de A et G et H diffèrent de D, est équivalent à $e(1+f-g) = f(1+e-h) \iff e(1-g) = f(1-h)$, ce qui est l'égalité de la question 1 traduisant le parallélisme des bases du trapèze.
Conclusion : *un trapèze inscrit dans un parallélogramme a des diagonales qui se coupent sur la diagonale du parallélogramme que coupent les bases parallèles du trapèze.*

$\boxed{\text{Partie 2}}$:

Sur notre figure, les côtés (EG) et (FH) du quadrilatère sont sécants et leur point d'intersection semble se trouver sur la diagonale (AD) du parallélogramme et à l'extérieur du parallélogramme. Selon la position des points, ce point d'intersection est d'un côté ou de l'autre du parallélogramme, la position intermédiaire correspondant au parallélisme $(EG)//(FH)$. On remarque que lorsque les côtés (GH) et (EF) sont sécants, leur point d'intersection semblent se trouver sur la diagonale (BC).



Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, on a toujours $A(0\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 1)$ et $D(1\ ;\ 1)$.
Comme précédemment, avec $e \in [0;1]$ et $f \in [0;1]$, on a $E(0;e)$ et $F(f;0)$ qui traduit $E \in [AC]$ et $F \in [AB]$.
Comme, de plus, $(EH)//(AB)$ et $(FG)//(AC)$, on a nécessairement $H(1;e)$ et $G(f;1)$.
Les composantes des vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FH}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont : $\overrightarrow{EG}(f; 1-e)$ et $\overrightarrow{FH}(1-f; e)$.
$(EG)//(FH) \iff det(\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{FH}) = 0 \iff ef - (1-e)(1-f) = 0 \iff e + f = 1$.
Si $e + f \neq 1$, les droites (EG) et (FH) sont donc sécantes.
Cherchons les coordonnées de $M = (EG) \cap (FH)$.
Pour cela déterminons les équations de ces deux droites :

- Équation de (EG) : on a $\overrightarrow{EG}(f; 1-e)$ et, pour un point $M(x;y)$ quelconque $\overrightarrow{EM}(x; y-e)$. D'où $M \in (EG) \iff f(y-e) - x(1-e) = 0 \iff y = x\frac{1-e}{f} + e$
- Équation de (FH) : on a $\overrightarrow{FH}(1-f; e)$ et, pour un point $M(x;y)$ quelconque $\overrightarrow{FM}(x-f; y)$. D'où $M \in (FH) \iff y(1-f) - e(x-f) = 0 \iff y = e\frac{x-f}{1-f}$.

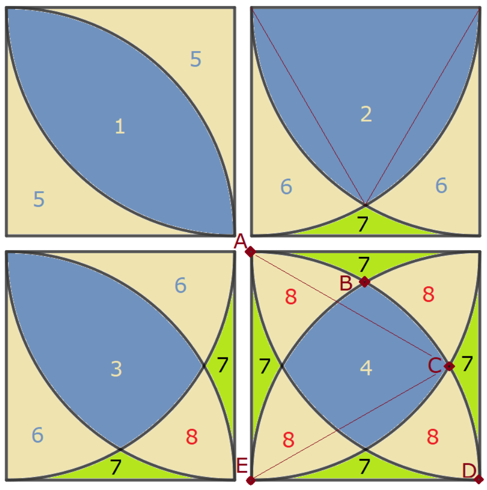
Les coordonnées de M vérifient, $y = x\frac{1-e}{f} + e$ et $y = e\frac{x-f}{1-f}$ ce qui conduit à $x\frac{1-e}{f} + e = e\frac{x-f}{1-f}$.
Je passe sur les détails du calcul, mais si $f \neq 1$ et $e + f \neq 1$, je trouve $x = \frac{ef}{e+f-1}$ et $y = \frac{ef}{e+f-1}$, soit $x_M = y_M$: le point M est sur (AD), la diagonale du parallélogramme.

Remarques : on aurait pu éviter de calculer les coordonnées de M puisqu'il s'agissait seulement de montrer que $x_M = y_M$. On aurait juste pu additionner membre à membre les équations de (EG) et (FH). Cela donne $f(y-e)-x(1-e)+y(1-f)-e(x-f)=0$ et se réduit en $-x+y=0 \Longleftrightarrow x=y$. Par ailleurs, ce que nous venons de faire pour les côtés opposés (EG) et (FH) pourrait être refait pour l'autre paire de côtés opposés ((EF) et (GH)). Il suffit, pour cela, d'échanger les noms de points. La propriété est vraie pour les deux paires de côtés opposés.
Conclusion : *un quadrilatère inscrit dans un parallélogramme dont les diagonales sont parallèles aux côtés du parallélogramme a ses côtés opposés parallèles ou sinon sécants, le point d'intersection étant alors toujours situé sur la diagonale correspondante du parallélogramme.*

2.1.2 Angles

Correction de l'exercice 2.5 (Périmètres et aires)
Á l'œil, je rangerai les domaines bleus dans l'ordre $4,3,1,2$ pour les aires (à moins que ce ne soit $4,3,2,1$) et la même chose ($4,3,1,2$ ou $4,3,2,1$, j'hésite encore) pour les périmètres, bien que ce soit moins évident pour les périmètres que pour les aires. Voyons maintenant les calculs.

Considérons cette figure donnant des noms aux différents types de domaines ainsi qu'à certains points de cette figure.
Les angles qui interviennent dans ces calculs sont $\widehat{AEB} = \widehat{BEC} = \widehat{CED} = \frac{\pi}{6}$. Ces angles sont égaux car AEC et BED sont deux triangles équilatéraux (leurs angles sont égaux à $\frac{\pi}{3}$) inscrits dans un carré (ses angles sont égaux à $\frac{\pi}{2}$). Les périmètres des différents domaines sont, par conséquents, égaux à :



1. $2\times \widehat{AD} = 2\times(\frac{\pi}{2}) = \pi \approx 3,1416$
2. $2\times \widehat{AC} + 1 = 2\times(\frac{\pi}{3}) + 1 = \frac{2\pi}{3} + 1 \approx 3,0944$
3. $2\times \widehat{AC} + \widehat{BC} = 2\times(\frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \approx 2,6180$
4. $4\times \widehat{BC} = 4\times(\frac{\pi}{6}) = \frac{2\pi}{3} \approx 2,0944$

Les périmètres des domaines sont donc rangés dans l'ordre $4,3,2,1$ (d'après les valeurs approchées $2,0944 - 2,6180 - 3,0944 - 3,1416$).
Pour les aires, calculons séparément

- l'aire d'un carré de côté 1 : 1
- l'aire d'un secteur circulaire d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rayon 1 : $\frac{\pi}{2} \div 2 = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854$
- l'aire du domaine n°5 : $1 - \frac{\pi}{4} = \approx 0,2146$
- l'aire du domaine n°1 : $2\times\frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,5708$
- l'aire d'un triangle équilatéral comme EAC, de côté 1 : $\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,4330$
- l'aire d'un secteur circulaire d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rayon 1 : $\frac{\pi}{3} \div 2 = \frac{\pi}{6} \approx 0,5236$
- l'aire du domaine n°2 : $2\times\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12} \approx 0,6142$
- l'aire du domaine n°6 : $\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{12} \approx 0,1712$
- l'aire du domaine n°7 : $1 - \frac{\pi}{4} - \left(\frac{3\sqrt{3}-\pi}{12}\right) = \frac{12-2\pi-3\sqrt{3}}{12} \approx 0,0434$
- l'aire du domaine n°8 : $1 - \frac{\pi}{4} - 2\left(\frac{12-2\pi-3\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{\pi-12+6\sqrt{3}}{12} \approx 0,1278$
- l'aire du domaine n°3 : $\frac{\pi}{2} - 1 - \left(\frac{\pi-12+6\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{5\pi-6\sqrt{3}}{12} \approx 0,4430$
- l'aire du domaine n°4 : $\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{12} - \left(\frac{\pi-12+6\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{4\pi+12-12\sqrt{3}}{12} \approx 0,3151$

C'est un peu fastidieux et assez difficile à suivre, d'autant qu'il y a différentes façons de procéder pour arriver à ces résultats. Mais la conclusion est que les aires des domaines sont donc rangées dans l'ordre

4, 3, 1, 2 (d'après les valeurs approchées $0,3151 - 0,4430 - 0,5708 - 0,6142$).
Si on ajoute les domaines verts au domaine bleu d'un même carré, on obtient :

1. l'aire du domaine n°1 : $2 \times \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,5708$
2. l'aire du domaine n°2 avec un ajout vert : $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 \times \left(\frac{12-2\pi-3\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{\pi+6-3\sqrt{3}}{6} \approx 0,6576$
3. l'aire du domaine n°3 avec deux ajouts verts : $\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{12} + 2 \times \left(\frac{12-2\pi-3\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{24+\pi-12\sqrt{3}}{12} \approx 0,5297$
4. l'aire du domaine n°4 avec quatre ajouts verts : $\frac{4\pi+12-12\sqrt{3}}{12} + 4 \times \left(\frac{12-2\pi-3\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{15-\pi-6\sqrt{3}}{3} \approx 0,4887$

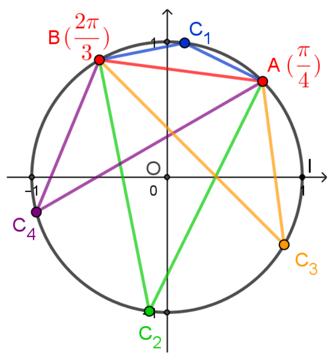
Conclusion finale : il n'y a pas de changement, les aires des domaines bleu+vert(s) sont donc rangées dans l'ordre 4, 3, 1, 2 (d'après les valeurs approchées $0,4887 - 0,5297 - 0,5708 - 0,6576$).

Correction de l'exercice 2.6 (Triangles isocèles dans cercle)

Il y a quatre points C du cercle trigonométrique tels que ABC soit un triangle isocèle.

Avant de se lancer dans les calculs, remarquons que l'axe de symétrie d'un triangle isocèle inscrit dans un cercle passe par le centre du cercle. En d'autres termes, la bissectrice du triangle isocèle AOB est confondue avec cet axe du triangle ABC.

Si le sommet principale est C, on a $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}{2}[\pi]$ (on divise aussi le modulo quand on divise l'égalité par 2), d'où :
$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + \frac{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}{2}$
D'où $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + \frac{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})}{2} = \frac{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})}{2}[\pi]$.
Dans la suite, je vais utiliser la notation classique des angles c'est-à-dire que les angles géométriques seront orientés par l'ordre des points (l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$ sera noté $\widehat{IOA}$ et l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) = -(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$ sera noté $\widehat{AOI}$, tout simplement.



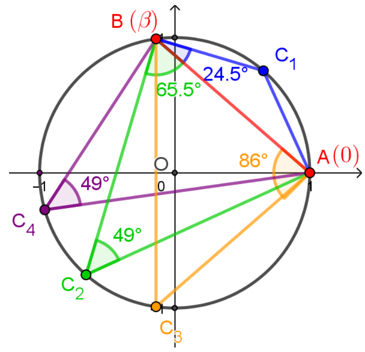
NB : On a le même type de relation (une moyenne) si c'est A ou si c'est B le sommet principal.

$\boxed{\text{Le cas particulier } A(\frac{\pi}{4}) \text{ et } B(\frac{2\pi}{3})}$: La figure montre la situation et les 4 points C_i, avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
Déterminons les abscisses curvilignes de ces points :

- C_1 : $\gamma_1 = \frac{\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{11\pi}{24}$
- C_2 : $\gamma_2 = \pi + \frac{11\pi}{24} = \frac{35\pi}{24}$ (C_1 et C_2 sont diamétralement opposés)
- C_3 : $\frac{\frac{2\pi}{3} + \gamma_4}{2} = \frac{\pi}{4}$ et donc $\gamma_4 = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{-\pi}{6}$
- C_4 : $\frac{\frac{\pi}{4} + \gamma_3}{2} = \frac{2\pi}{3}$ et donc $\gamma_3 = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}$

Les différents angles de ces triangles se calculent à l'aide du théorème de l'angle inscrit. Les angles $\widehat{AC_2B}$, $\widehat{AC_3B}$ et $\widehat{AC_4B}$ sont égaux car ils interceptent le même petit arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ (C_2, C_3 et C_4 sont situés du même côté de la corde $[AB]$, sur le même grand arc $\overset{\frown}{AB}$).
Ils sont égaux à la moitié de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ qui mesure ici $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$, soit $\frac{5\pi}{24}$.
L'angle $\widehat{AC_1B}$ intercepte le grand arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$; il est donc égal à la moitié de l'angle au centre rentrant $\widehat{AOB}$ qui mesure ici $2\pi - \frac{5\pi}{12} = \frac{19\pi}{12}$, d'où $\widehat{AC_1B} = \frac{19\pi}{24}$.
Voici donc les angles des 4 triangles isocèles ABC :

1. ABC_1 est isocèle en C_1 : $\widehat{AC_1B} = \frac{19\pi}{24}$ et $\widehat{C_1BA} = \widehat{BAC_1} = \frac{\pi - \frac{19\pi}{24}}{2} = \frac{5\pi}{48}$
2. ABC_2 est isocèle en C_2 : $\widehat{AC_2B} = \frac{5\pi}{24}$ et $\widehat{C_2BA} = \widehat{BAC_2} = \frac{\pi - \frac{5\pi}{24}}{2} = \frac{19\pi}{48}$
3. ABC_3 est isocèle en A : $\widehat{AC_3B} = \widehat{C_3BA} = \frac{5\pi}{24}$ et $\widehat{BAC_3} = \pi - 2 \times 2\frac{5\pi}{24} = \frac{7\pi}{12}$
4. ABC_4 est isocèle en B : $\widehat{AC_4B} = \widehat{C_4AB} = \frac{5\pi}{24}$ et $\widehat{ABC_4} = \pi - 2 \times \frac{5\pi}{24} = \frac{7\pi}{12}$



$\boxed{\text{Cas général}}$: Lorsque les abscisses curvilignes de A et B sont $A(0)$ et $B(\beta)$, celles des points C_i sont :

- C_1 :$\gamma_1 = \frac{\beta}{2}$
- C_2 :$\gamma_2 = \pi + \frac{\beta}{2} = \frac{2\pi+\beta}{2}$
- C_3 : $\frac{\gamma_3}{2} = \beta$ et donc $\gamma_3 = 2\beta$
- C_4 : $\frac{\beta+\gamma_4}{2} = 0$ et donc $\gamma_4 = -\beta$

Les expressions trouvées sont plus simples dans ce cas. Les angles des triangles se déduisent de l'angle au centre saillant $\beta < \frac{\pi}{2}$ ou de l'angle rentrant $2\pi - \beta$:

1. ABC_1 est isocèle en C_1 : $\widehat{AC_1B} = \frac{2\pi-\beta}{2}$ et $\widehat{C_1BA} = \widehat{BAC_1} = \frac{\pi - \frac{2\pi-\beta}{2}}{2} = \frac{\beta}{4}$

2. ABC_2 est isocèle en C_2 : $\widehat{AC_2B} = \frac{\beta}{2}$ et $\widehat{C_2BA} = \widehat{BAC_2} = \frac{\pi - \frac{\beta}{2}}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{4}$

3. ABC_3 est isocèle en A : $\widehat{AC_3B} = \widehat{C_3BA} = \frac{\beta}{2}$ et $\widehat{BAC_3} = \pi - 2 \times \frac{\beta}{2} = \pi - \beta$

4. ABC_4 est isocèle en B : $\widehat{AC_4B} = \widehat{C_4AB} = \frac{\beta}{2}$ et $\widehat{ABC_4} = \pi - 2 \times \frac{\beta}{2} = \pi - \beta$

En prenant des points quelconques $A(\alpha)$ et $B(\beta)$, on peut juste considérer qu'il y a une rotation d'angle α et considérer que l'angle β correspond, avant la rotation, à un angle égal à $\beta' = \beta - \alpha$ (l'angle α correspond à un angle égal à $\alpha' = \alpha - \alpha = 0$). On peut alors utiliser les formules précédentes en remplaçant β par β', et en ajoutant α aux abscisses curvilignes trouvées (pas aux angles des triangles car ceux-ci sont inchangés par la rotation) :

- C_1 :$\gamma_1 = \frac{\beta'}{2} + \alpha$; $\widehat{AC_1B} = \frac{2\pi-\beta'}{2}$ et $\widehat{C_1BA} = \widehat{BAC_1} = \frac{\beta'}{4}$
- C_2 :$\gamma_2 = \frac{2\pi+\beta'}{2} + \alpha$;$\widehat{AC_2B} = \frac{\beta'}{2}$ et $\widehat{C_2BA} = \widehat{BAC_2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta'}{4}$
- C_3 :$\gamma_3 = 2\beta' + \alpha$; $\widehat{AC_3B} = \widehat{C_3BA} = \frac{\beta'}{2}$ et $\widehat{BAC_3} = \pi - \beta'$
- C_4 :$\gamma_4 = -\beta' + \alpha$; $\widehat{AC_4B} = \widehat{C_4AB} = \frac{\beta'}{2}$ et $\widehat{ABC_4} = \pi - \beta'$

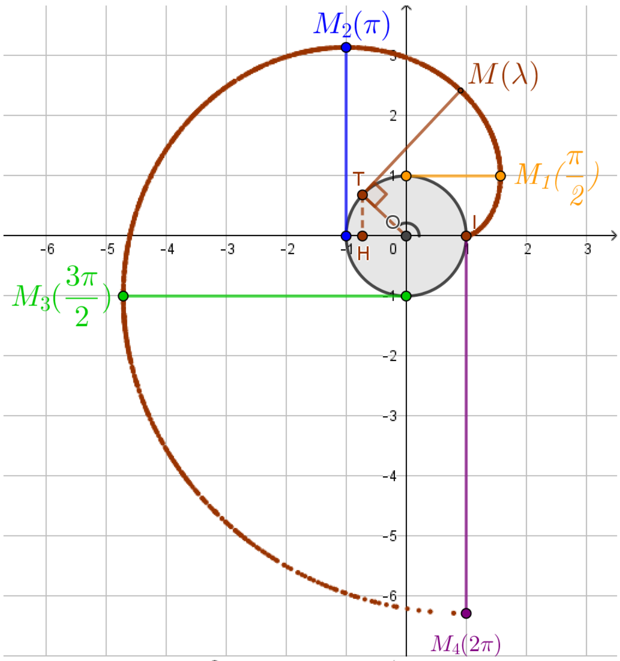
Vérifions que cela donne bien les bons résultats pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et $\beta = \frac{2\pi}{3}$ donc avec $\beta' = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$:

- C_1 :$\gamma_1 = \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{24}$; $\widehat{AC_1B} = \frac{2\pi - \frac{5\pi}{12}}{2} = \frac{19\pi}{24}$ et $\widehat{C_1BA} = \widehat{BAC_1} = \frac{5\pi}{48}$
- C_2 :$\gamma_2 = \frac{2\pi + \frac{5\pi}{12}}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{(29+6)\pi}{24} = \frac{35\pi}{24}$;$\widehat{AC_2B} = \frac{5\pi}{24}$ et $\widehat{C_2BA} = \widehat{BAC_2} = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{48} = \frac{19\pi}{48}$
- C_3 :$\gamma_3 = 2 \times \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}$; $\widehat{AC_3B} = \widehat{C_3BA} = \frac{5\pi}{24}$ et $\widehat{BAC_3} = \pi - \frac{5\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$
- C_4 :$\gamma_4 = -\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6}$; $\widehat{AC_4B} = \widehat{C_4AB} = -\frac{5\pi}{24}$ et $\widehat{ABC_4} = \pi - \frac{5\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$

Correction de l'exercice 2.7 (Courbe 1)

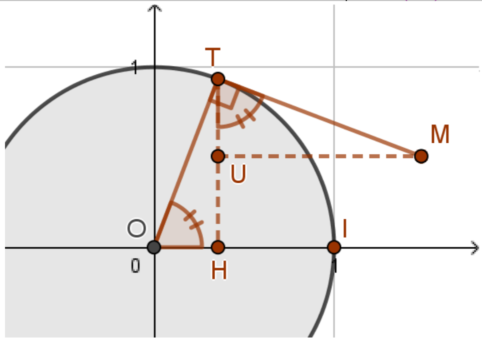
Voici la figure demandée où sont placées les positions de M pour $\lambda \in \{\frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi\}$.

J'ai fait la figure sur Geogebra plutôt que réellement à la main, ce qui permet d'afficher la trace du point M pour d'autres positions de T. Cette trace apparait comme une courbe, celle-la même que nous cherchons à exprimer de façon analytique.



Pour réaliser cette figure, il suffit de constater que la longueur de la ficelle déroulée est égale à la longueur de l'arc $\widehat{IT}$, soit à λ directement puisque λ est exprimé en radians et que le rayon du cercle vaut 1.

Déterminons maintenant les coordonnées de M dans le repère orthonormé (O,I,J), naturellement associé au cercle trigonométrique. La figure de l'énoncé suggérait que $\widehat{OTM}$ est un angle droit, (MT) étant la tangente au cercle en T. Cette caractéristique de la situation fait que, H étant le projeté orthogonal de T sur (OI), on a $\widehat{MTH} = \widehat{TOH}$. En effet, dans le triangle TOH rectangle en H, l'angle $\widehat{OTH}$ est le complémentaire de $\widehat{TOH}$. Or $\widehat{OTM}$ étant droit, $\widehat{OTH}$ est également le complémentaire de $\widehat{MTH}$. Par conséquent $\widehat{MTH}$ et $\widehat{TOH}$ ont même mesure, notée λ.



Considérons alors le point U, projeté orthogonal de M sur (TH).

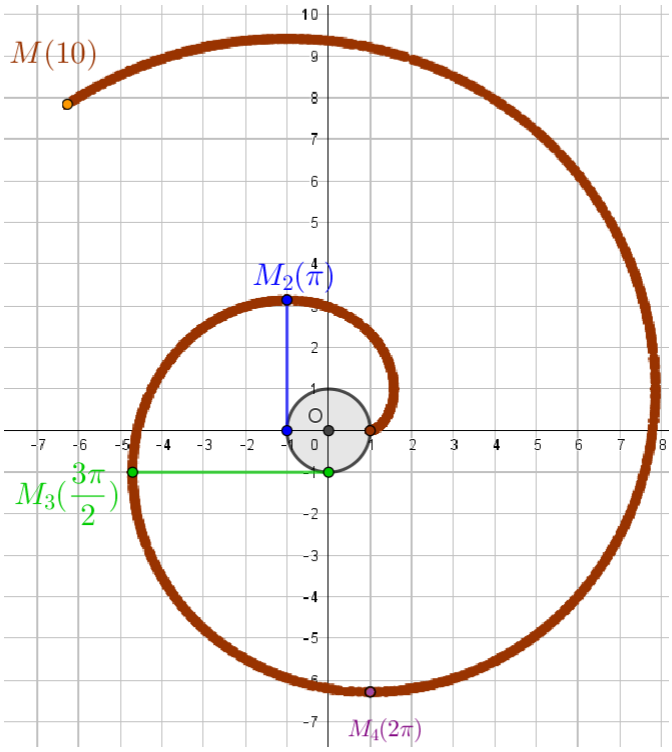
L'abscisse de M est égale à la somme $OH + UM$ (les longueurs sont ici considérées comme toujours positives, ce qui n'arrive réellement que lorsque $\lambda \in [0, \frac{\pi}{2}]$, mais en réalité elles pourront être négatives, comme OH dans la figure du haut où $\lambda \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$). Or $OH = \cos(\lambda)$ et $UM = \sin(\lambda) \times TM$ et on a vu que $TM = \lambda$, d'où $x_M = OH + UM = \cos(\lambda) + \lambda \sin(\lambda)$.

Pour l'ordonnée de M, ce n'est pas très différent : $y_M = TH - TU$ or $TH = \sin(\lambda)$ et $TU = \lambda \cos(\lambda)$, d'où $\boxed{M(\lambda) \begin{cases} x = \cos(\lambda) + \lambda \sin(\lambda) \\ y = \sin(\lambda) - \lambda \cos(\lambda) \end{cases}}$

Lorsque la ficelle est complètement déroulée (sa longueur est égale à 10), le point T se retrouve à l'abscisse curviligne $10 = 10 - 2\pi \approx 3,7168[2\pi]$. Les coordonnées de M sont alors calculées à partir de la formule

$$M(10)\left\{\begin{array}{l} x = \cos(10) + 10\sin(10) \approx -6,2793 \\ y = \sin(10) - 10\cos(10) \approx 7,8467 \end{array}\right.$$

Cette courbe est appelée « développante » du cercle trigonométrique ou aussi, plus savamment, « anti-clothoïde ». Elle a tendance à s'approcher d'une spirale d'Archimède au fur et à mesure que l'on déroule la ficelle. Une spirale d'Archimède est la trajectoire décrite par un point animé d'un mouvement rectiligne uniforme sur une demi-droite tournant elle-même de façon uniforme autour de l'origine de cette demi-droite (la courbe réalisée par un diamant qui parcourt les sillons d'un disque « vinyle » en est un exemple).



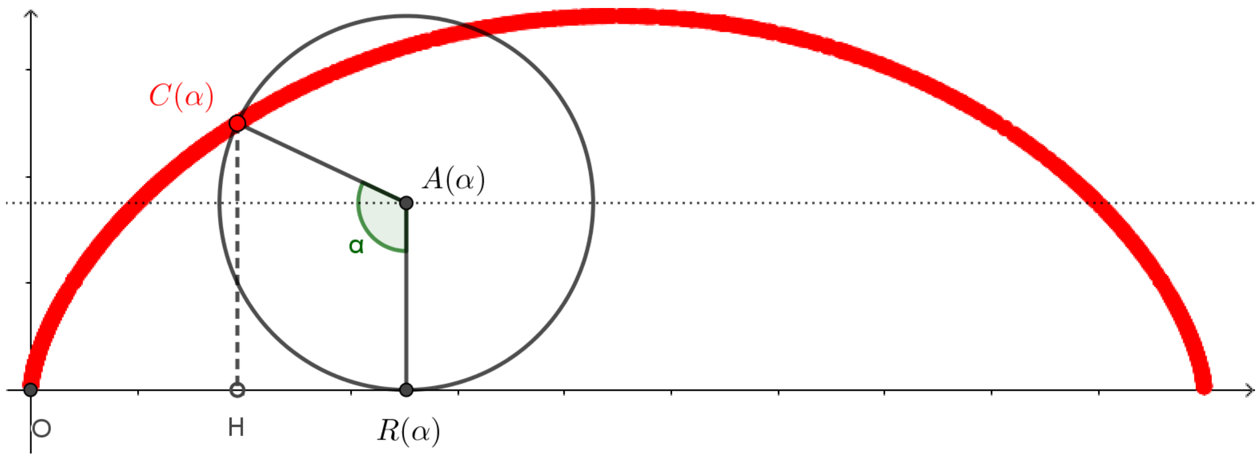
Voir les propriétés, développements et autres applications (engrenages, etc.) sur le site Mathcurve [1]

Correction de l'exercice 2.8 (Courbe 2)

1- Voici la figure demandée, réalisée avec Geogebra, pour $\alpha \in [0, 2\pi]$. Pour cet intervalle de valeurs, la roue effectue un tour complet. Le périmètre de la roue étant égal à πd où $d = 2r$ est le diamètre, égal à $700mm$ selon l'énoncé, la valeur de x parcourra ainsi tout l'intervalle $[0, 700\pi]$ comme il était demandé.
Pour placer correctement le point C sur la roue, il faut déjà réaliser que la longueur $x = OR$ doit être égale à l'arc $\widehat{RC}$. Or, la longueur de cet arc est égale à $r\alpha$. On en déduit la valeur de l'angle à donner à Geogebra pour placer C à partir de r :

$$\alpha = \frac{OR}{AR} = \frac{x}{r} = \frac{x}{700}, \text{ si } x \text{ est exprimé en } mm \text{ comme } r$$

Sur ma figure, j'ai pris $r = 3,5cm = 35mm$, soit une échelle de $\frac{1}{10}$. La courbe est réalisée en activant la trace du point C et en déplaçant le point R mobile sur la droite horizontale passant par O.



2- L'abscisse de C est égale à la différence $OR - RH$. Or $OR = x = r\alpha$ et $RH = r\sin\alpha$ (on doit imaginer un cercle trigonométrique de centre A avec le point $I(1,0)$ sur la demi-droite $[AR)$ et orienté dans le sens horaire). On en déduit que $x_C = OR - RH = r\alpha - r\sin(\alpha) = r(\alpha - \sin\alpha)$.
Pour l'ordonnée de M, ce n'est pas très différent : $y_C = RA - AT$ or $RA = r$ et $AT = r\cos\alpha$ (je n'ai

1. `https://www.mathcurve.com/courbes2d/developpantedecercle/developpantedecercle.shtml`

pas indiqué le point T sur cette nouvelle figure pour ne pas la surcharger - se reporter à la figure de l'énoncé), d'où

$$\boxed{C(\alpha)\left\{\begin{array}{l} x = r(\alpha - \sin\alpha) \\ y = r(1-\cos\alpha)\end{array}\right.}$$

Cette courbe est appelée « roulette » ou plutôt cycloïde. Voir à son propos dans Mathcurve [2].

3- Le programme qui va nous permettre d'estimer la longueur de cette arche de cycloïde utilise la formule que nous venons de mettre au point pour les coordonnées d'un point de cette courbe. L'intervalle $[0, 2\pi]$ est découpé en n tranches avec des angles de la forme $\alpha_i = \frac{2i\pi}{n}$, l'entier i décrivant l'ensemble $\{0, 1, 2, \cdots, n\}$.

```
from math import *
n=int(input("Combien de subdivisions? "))
diam=700
r=diam/2
long=0
alpha=0
x1,y1=0,0
for i in range(1,n+1):
    alpha+=2*pi/n
    x2=r*(alpha-sin(alpha))
    y2=r*( 1   -cos(alpha))
    long+=sqrt((x1-x2)**2+(y1-y2)**2)
    x1,y1=x2,y2
print("Longueur estimée = {}mm".format(long))
print("Rapport avec diam = {}".format(long/diam))
```

```
Combien de subdivisions? 100
Longueur estimée = 2799.884908283351mm
Rapport avec diam = 3.99983558326193

Combien de subdivisions? 1000000
Longueur estimée = 2799.9999999988186mm
Rapport avec diam = 3.999999999998312
```

Les exécutions du 1er programme (en bleu ci-dessus) montrent qu'avec $n = 100$ subdivisions, on s'approche déjà beaucoup d'une valeur qui parait la limite atteignable $2800mm$, soit 4 fois le diamètre. Avec $n = 1\,000\,000$ subdivisions, la valeur obtenue ne s'écarte de cette limite hypothétique que d'un milliardième. La preuve mathématique de ce résultat (la longueur d'une branche de cycloïde vaut 4 fois le diamètre du cercle qui l'a engendrée) a été donnée au XVII^{e} siècle par Christopher Wren, l'architecte qui conçut la cathédrale Saint-Paul de Londres.

```
from math import *
n=9 #nombre de subdivisions
diam=700
r=diam/2
long_total=0
diff=1
while long_total<4*diam-diff/2:
    n+=1
    long,alpha=0,0
    x1,y1=0,0
    for i in range(1,n+1):
        alpha+=2*pi/n
        x2=r*(alpha-sin(alpha))
        y2=r*( 1   -cos(alpha))
        long+=sqrt((x1-x2)**2+(y1-y2)**2)
        x1,y1=x2,y2
    long_total=long
print("à partir de n={}, la longueur est à moins de {}mm près".format(n,diff/2))
```

```
à partir de n=48, la longueur est à moins de 0.5mm près
```

Pour savoir à partir de quelle valeur de n la longueur estimée dépasse $2799,5mm$ (l'arrondi au mm le plus proche doit donner la valeur limite), on peut tâtonner. J'ai préféré écrire un 2^{e} programme, assez proche du 1er (voir ci-dessus), qui détermine directement ce nombre : il faut au moins 48 subdivisions pour obtenir cette précision du millimètre.

Un petit prolongement pour ceux qui, munis d'une calculatrice Numworks, se demandent si on ne pourrait pas tracer directement cette courbe au moyen d'un programme en Python. La question

2. https://www.mathcurve.com/courbes2d/cycloid/cycloid.shtml

est intéressante : on dispose d'une formule pour cette courbe (les coordonnées x et y du point C en fonction du paramètre $\alpha \in [0, 2\pi]$) et le module Kandinsky permet de changer la couleur d'un pixel de l'écran (composé de 320 pixels sur sa longueur et de 222 pixels sur sa hauteur). La question est comment faire ?

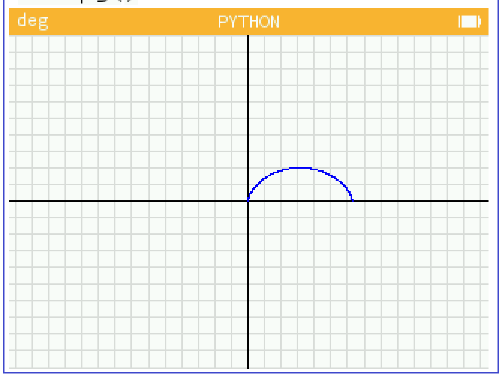
La 1re approche que l'on peut faire de ce problème est de s'inspirer (essayer de comprendre) d'un programme existant. Dans le Workshop de Numworks, je trouve le programme `parametric_graphing.py` créé par `ferr0fluidmann`, avec cette description explicite (pour initiés seulement)

`Plot parametric graphs with parametric_graph(x_function, y_function, tMin, tMax)`

Le moins qu'on puisse dire est qu'il n'est pas évident de s'y retrouver dans ce programme ! J'ai cependant adapté les fonctions `x_function` et `y_function` pour qu'elles traduisent notre formule et j'ai modifié le nom (`pg` à la place de `parametric_graph`). Le résultat se voit dans la fenêtre : en tapant `pg()`, on obtient bien un arc de cycloïde.

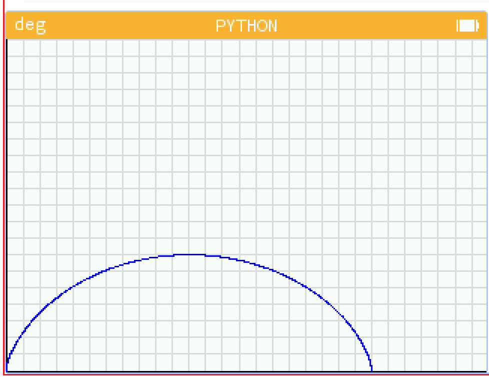
```
from math import *
from kandinsky import *
tMin = 0
tMax = 2*pi
def x_function(x):
  return x-sin(x)

def y_function(x):
  return 1-cos(x)

def pg(it=1000,fx=x_function,fy=y_function,tmax=tMax,tmin=tMin,xmin=-14.4,xmax=14.4,ymin=-10,ymax=10):
  col=color(0,0,255)
  blk=color(0,0,0)
  gry=color(220, 220, 220)
  y_0=int(ymax*221/(ymax-ymin))
  x_0=int(xmin*319/(xmin-xmax))
  gridx = int(xmin)
  while gridx <= xmax:
    x=int(319.0*(gridx-xmin)/(xmax-xmin))
    for y in range(222):
      set_pixel(x,y,gry)
    gridx+=1
  gridy = int(ymin)
  while gridy <= ymax:
    y=int(221.0*(gridy-ymin)/(ymax-ymin))
    for x in range(320):
      set_pixel(x,y,gry)
    gridy+=1
  for x in range(320):
    set_pixel(x,y_0,blk)
  for y in range(222):
    set_pixel(x_0,y,blk)
  for t in range(it):
    T = tmin+t*(tmax-tmin)/float(it)
    try:
      X=fx(T)
      Y=fy(T)
      pixel_x=int((X-xmin)*319/(xmax-xmin))
      pixel_y=int((Y-ymax)*221/(ymin-ymax))
      set_pixel(pixel_x,pixel_y,col)
    except:
      X=0
      Y=0
```

```
>>> pg()
```



modification

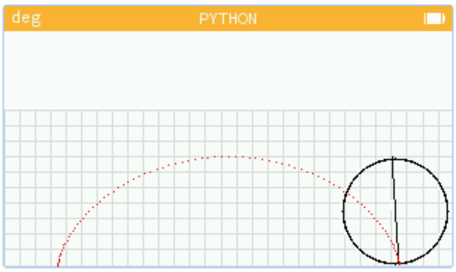
```
def x_function(x):
  return 3.5*(x-sin(x))
def y_function(x):
  return 3.5*(1-cos(x))

>>> pg(xmin=0,xmax=28.8,ymin=0,ymax=20)
```



Les deux premières boucles `While` servent à tracer le quadrillage (en gris, `gry`). Les deux boucles `For` qui suivent servent à tracer les axes de coordonnées (en noir, `blk`). La dernière boucle trace la courbe (en bleu, `col`) : l'intervalle $[0, 2\pi]$ est subdivisé en `it`$= 1000$ points et, pour chaque point, le programme calcule ses coordonnées et les attribue à un pixel de l'écran.

Pour voir si j'ai bien compris le fonctionnement du programme, j'adapte les paramètres envoyés à cette fonction pour que soit affichée une courbe correspondant à un diamètre de $700mm$ (ici il y aura 7 carreaux) : Je modifie légèrement les fonctions pour que le diamètre fasse 7 et non 2. Je double les valeurs maximales par défaut et annule les valeurs minimales pour supprimer les cadrans où on a $x < 0$ ou $y < 0$. Pour cela, je lance le programme avec la commande `pg(xmin=0,xmax=28.8,ymin=0,ymax=20)`. Le résultat est encadré en rouge.
On pourrait faire mieux et tracer la roue qui se déplace avec la trajectoire du point C qui se dessine progressivement. Il faut fabriquer une fonction qui fera office de *timer*, pour ralentir le tracé et donner l'illusion d'une roue qui roule (un exemple de timer est la fonction `temporise` qui se trouve dans mon programme `horloge.py`, disponible dans le Workshop). Il faut aussi une fonction qui trace un cercle de centre et de rayon donné (il y a une telle fonction dans `horloge.py`). Bien que ces perfectionnements sortent des limites de ce corrigé, je me suis amusé à programmer une telle animation.
Je n'ai pas eu besoin du timer car, en fait, les tracés demandés prennent suffisamment de temps pour que la roue avance à vitesse lente (même très lente). Ce qui est contraignant dans ce module Kandinsky, c'est qu'une figure tracée doit être effacée (donc tracée à nouveau mais avec un stylo de couleur blanche) avant d'être retracée ailleurs. Sinon, les figures se superposent. Sans ces effacements, après avoir tracé le cercle dans ses 1000 positions intermédiaires, on ne verrai qu'une grosse tâche noire. Il faut aussi retracer le quadrillage si on veut le garder intact tout le temps de l'animation.
Comme ce programme n'est pas destiné à être adapté à d'autres situations, j'ai simplifié le programme initial de `ferrOfluidmann`. J'ai ajouté des fonctions pour tracer un cercle (pour la roue) et un segment (je voulais'« voir » la roue tourner, il fallait donc au moins 1 rayon, j'ai tracé un diamètre). J'ai relégué à de mini-fonctions le rôle de transformer les coordonnées réelles en coordonnées pour l'écran : par exemple, le centre du cercle a, au début, pour coordonnées réelles $(0;3.5)$ et pour l'écran $(0;183)$. Les 222 pixels de hauteur de l'écran étant divisé en 20 unités, comme $222 - \frac{3,5\times 222}{20} = 183,15$, le pixel est arrondi à 183.
Une dernière chose : j'écris le programme dans le Workshop de Numworks car c'est beaucoup plus facile (copié/collés autorisés, utilisation du clavier de l'ordinateur) mais l'exécution de cette animation n'est visible à chaque étape que sur la calculatrice. Dans le Workshop, on ne voit que la phase finale (celle que j'ai mis sur l'illustration ci-dessous).

```
from math import *
from kandinsky import *
def cercle(x0,y0,r,c,e):
  for i in range(2*e):
    xd=x0-int((r-i*0.5)/sqrt(2))
    xf=x0+int((r-i*0.5)/sqrt(2))
    for x in range(xd,xf+1):
      x1=x
      y1=y0+int(sqrt((r-i*0.5)**2-(x-x0)**2))
      set_pixel(x,y1,c)
      for j in range(3):
        x2=x0+y1-y0
        y2=y0+x0-x1
        set_pixel(x2,y2,c)
        x1,y1=x2,y2

  def seg(xa,ya,xb,yb,c):
    if abs(yb-ya)<abs(xb-xa):
      if xb<xa:
        xa,xb=xb,xa
        ya,yb=yb,ya
      m=(yb-ya)/(xb-xa)
      p=ya-m*xa
      for i in range(xb-xa):
        set_pixel(int(xa+i),int(m*(xa+i)+p),c)
    else:
      if yb<ya:
        ya,yb=yb,ya
        xa,xb=xb,xa
      m=(xb-xa)/(yb-ya)
      p=xa-m*ya
      for i in range(yb-ya):
        set_pixel(int(m*(ya+i)+p),int(ya+i),c)
```

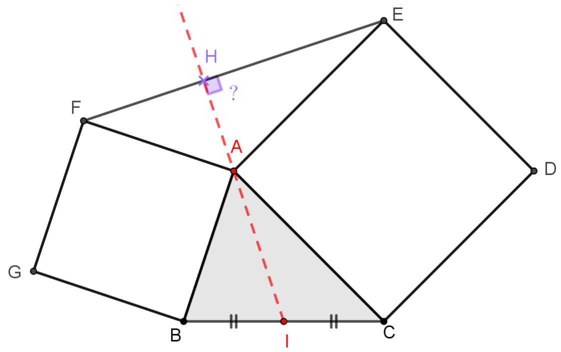



```
xmax,ymax=28.8,20

def px(x):
  return int(x*319/xmax)

def py(y):
  return int((ymax-y)*221/ymax)

def pg():
  col=color(255,0,0)
  blk=color(0,0,0)
  wht=color(255,255,255)
  gry=color(220, 220, 220)
  r=3.5
  X1,Y1,X2,Y2=0,0,1,1
  for x in range(320):
    set_pixel(x,221,blk)
  for i in range(100):
    gridx,gridy=0,10
    while gridx<=xmax:
      x=int(319.0*gridx/xmax)
      for y in range(111,222):
        set_pixel(x,y,gry)
      gridx+=1
    while gridy<=ymax:
      y=int(221.0*gridy/ymax)
      for x in range(320):
        set_pixel(x,y,gry)
      gridy+=1
    seg(px(X1),py(Y1),px(X2),py(Y2),wht)
    cercle(px((X1+X2)/2),py(3.5),px(r),wht,1)
    T=i*pi/50
    X1=r*(1+T-sin(T))
    Y1=r*(1-cos(T))
    X2=r*(1+T+sin(T))
    Y2=r*(1+cos(T))
    seg(px(X1),py(Y1),px(X2),py(Y2),blk)
    cercle(px((X1+X2)/2),py(3.5),px(r),blk,1)
    for t in range(i):
      T=t*pi/50
      X=r*(1+T-sin(T))
      Y=r*(1-cos(T))
      set_pixel(px(X),py(Y),col)
```

2.1.3 Produit scalaire

Correction de l'exercice 2.9 (Carrés sur triangle)
Si I est le milieu de $[AB]$ montrons alors que le médiane (AI) de ABC est une hauteur de AFH, autrement dit, montrons que $(AI)\perp(FE)$. Montrons, pour cela, que le produit scalaire $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{FE}$ est nul :
Comme I est le milieu de $[AB]$, on a $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.
De plus, d'après Chasles $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}$
On en déduit que $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{FE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}\right)$

Mais, comme $ACDE$ et $BAFG$ sont des carrés, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=0$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=0$.
On a donc $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{FE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}\right)$.
Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=AB\times AE\times\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})$
et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=AC\times AF\times\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF})$.
Les angles $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})$ et $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF})$ sont opposés
car $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})$
et $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF})=(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF})$
alors que $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})=-(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$
et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF})=-(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})$ (angles droits de sens opposés).



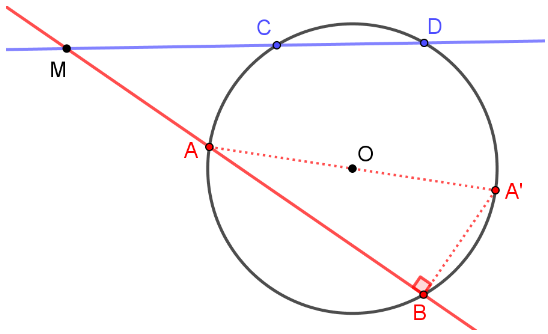
On en déduit que les cosinus sont égaux : $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})=\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF})$, notons c ce nombre.
Finalement, $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{FE}=\frac{c}{2}(AB\times AE-AC\times AF)$. Et comme $AB=AF$ et $AC=AE$ (côtés de mêmes carrés), le membre de droite s'annule : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{FE}=\frac{c}{2}(AB\times AE-AE\times AB)=0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont donc orthogonaux, ce qui achève de prouver que (AI) est une hauteur du triangle AEF.

Correction de l'exercice 2.10 (Puissance d'un point)
Montrons que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ est indépendant de A et B en introduisant A' le symétrique de A par rapport au centre O de $\mathscr{C}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'} && \text{car } (MB)\perp(BA')\\
&= \left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA'}\right) && \text{d'après Chasles}\\
&= MO^2-OA^2 && \text{car } O \text{ milieu de } [AA']\\
&= OM^2-r^2 && \text{en développant le produit scalaire}
\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque 4 points distincts A, B, C et D sont sur un même cercle de centre O et de rayon r tels que (AB) et (CD) soient sécantes en M, on a
- $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=OM^2-r^2$
- $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=OM^2-r^2$

On a donc nécessairement $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$. La partie directe de la propriété est prouvée :
A, B, C, D cocycliques $\Longrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$
Montrons la réciproque :



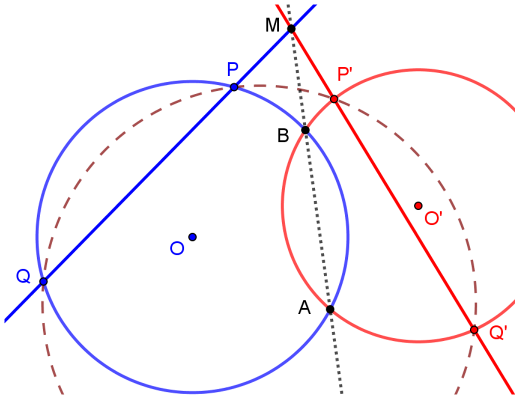
On sait que A, B, C, D sont distincts et tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$.

- Montrons que A, B et C ne sont pas alignés. Si c'était le cas, comme $M=(AB)\cap(CD)$, alors on aurait $M=C$ et alors $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CC}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{0}\cdot\overrightarrow{CD}=0$. On aurait donc aussi $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\iff\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$. Or A, B et C étant alignés, cela impliquerait que soit $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0}\iff C=A$, soit $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{0}\iff C=B$, ce qui ne se peut pas puisque les points sont supposés distincts. A, B et C ne peuvent donc pas être alignés.
- A, B et C n'étant pas alignés, appelons $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit à ce triangle. Montrons que D appartient à $\mathscr{C}$. On sait que le point $M=(AB)\cap(CD)$ est tel que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$; or, la droite (MC) recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en un point, noté E, tel que, d'après la partie directe $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{ME}$. On en déduit que $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{ME}$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{MC}\cdot\left(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{ME}\right)=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{ED}=0$.
Les points M, C, D et E étant alignés ($M\in(CD)$ par hypothèse et $E\in(MC)$ par définition de E), un des vecteurs de ce produit scalaire est nul. Ce ne peut pas être $\overrightarrow{MC}$ car $M\neq C$ (on

a montré que $C \notin (AB)$). C'est donc $\overrightarrow{ED}$. Par conséquent $E = D$, le point D appartient donc bien au cercle $\mathscr{C}$.

Application 1 :

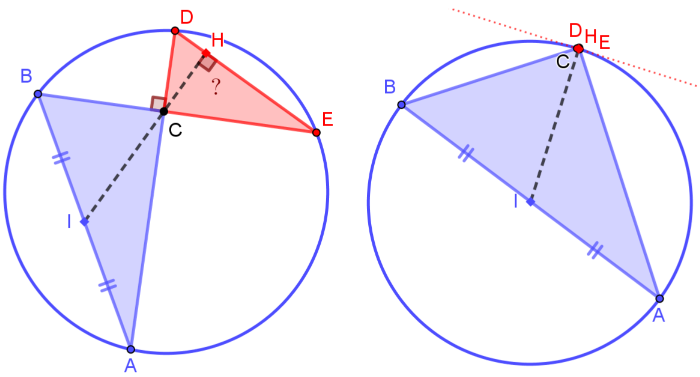
Comme A, B, P, Q sont cocycliques (ils sont sur $\mathscr{C}$ par hypothèse) alors, par application de la propriété directe, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$.
De même, comme A, B, P', Q' sont cocycliques, alors $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MP'} \cdot \overrightarrow{MQ'}$.
On en déduit que $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP'} \cdot \overrightarrow{MQ'}$ et donc, par application de la propriété réciproque, P, Q, P' et Q' sont cocycliques.



Application 2 : Nommons I le milieu de $[AB]$ et montrons que $(CI) \perp (DE)$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DE} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CD}\right) && \text{car } I \text{ milieu de } [AB] \\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}\right) && \text{par développement} \\
&= \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CE}\right) && \text{car } [AD] \perp [BE] \\
&= \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CE}\right) && \text{car } A, B, D, E \text{ sont cocycliques} \\
&= 0
\end{aligned}$$

La médiane de la corde $[AB]$ est donc orthogonale à la corde $[DE]$. Regardez ce que devient cette médiane lorsque $[AB]$ devient un diamètre du cercle : un rayon. Et ce rayon est orthogonal à ce qui reste de $[DE]$: la tangente au cercle en C (figure du milieu). La propriété est vraie pour les 4 médianes d'un quadrilatère $ABDE$ inscrit dans le cercle tel que ses diagonales soit perpendiculaires (figure de droite).



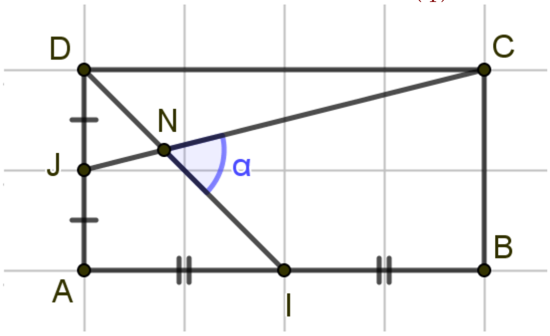
CORRECTION DE L'EXERCICE 2.11 (RECTANGLES)

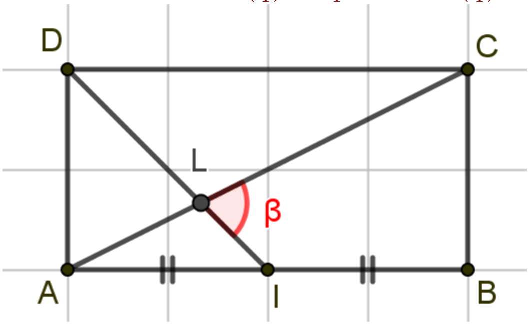
Comme $ABCD$ est un rectangle, on a $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$. De plus, I et J étant les milieux de $[AB]$ et $[AD]$, on a $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{JD} = 0$ et aussi $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{JD} = -l \times \frac{l}{2}$ (J milieu de $[AD]$) et $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{DC} = L \times \frac{L}{2}$. Ces 4 produits scalaires intervenant dans le calcul de $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{JC} = DI \times JC \times \cos(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{JC})$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{JC} &= \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}\right) \cdot \left(\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DC}\right) && \text{d'après Chasles} \\
&= \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{DC} && \text{par développement} \\
&= (-l \times \frac{l}{2}) + 0 + 0 + (L \times \frac{L}{2}) && \text{d'après les contraintes de l'énoncé} \\
&= \frac{L^2}{2} - \frac{l^2}{2} = \frac{L^2 - l^2}{2}
\end{aligned}$$

Pour déterminer l'angle $\widehat{CNI} = (\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{JC})$ il nous reste à exprimer DI et JC en fonction de L et l :
D'après Pythagore, $DI^2 = l^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{L^2+4l^2}{4}$ et $JC^2 = L^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{l^2+4L^2}{4}$.
On en déduit que $\frac{\sqrt{L^2+4l^2}}{2} \times \frac{\sqrt{l^2+4L^2}}{2} \times \cos(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{JC}) = \frac{L^2-l^2}{2}$, et donc $\cos(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{JC}) = \frac{2(L^2-l^2)}{\sqrt{L^2+4l^2}\times\sqrt{l^2+4L^2}}$.

Application numérique :
Si $L = 4$ et $l = 2$, alors on a $\cos(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{JC}) = \frac{24}{\sqrt{32}\times\sqrt{68}} = \frac{3}{\sqrt{34}} \approx 0,514496$
et donc $(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{JC}) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right) \approx 1,030377$.
Remarque :
Il est plus simple de déterminer cet angle sans le produit scalaire. L'expression finale obtenue est aussi plus simple. Cet exercice n'a donc qu'une vocation d'entraînement.
Puisque $\tan(\widehat{CDI}) = \frac{l}{\frac{L}{2}} = \frac{2l}{L}$ et $\tan(\widehat{DCN}) = \frac{\frac{l}{2}}{L} = \frac{l}{2L}$, on en déduit que $\widehat{DNC} = \pi - (\widehat{CDI} + \widehat{DCN})$ et comme $\widehat{CNI} = \pi - \widehat{DNC} = \widehat{CDI} + \widehat{DCN}$ d'où $\widehat{CNI} = \tan^{-1}\left(\frac{2l}{L}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{l}{2L}\right)$. L'application numérique donne $\widehat{CNI} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right) + tan^{-1}\left(\frac{2}{8}\right) = \tan^{-1}(1) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx 1,030377$.





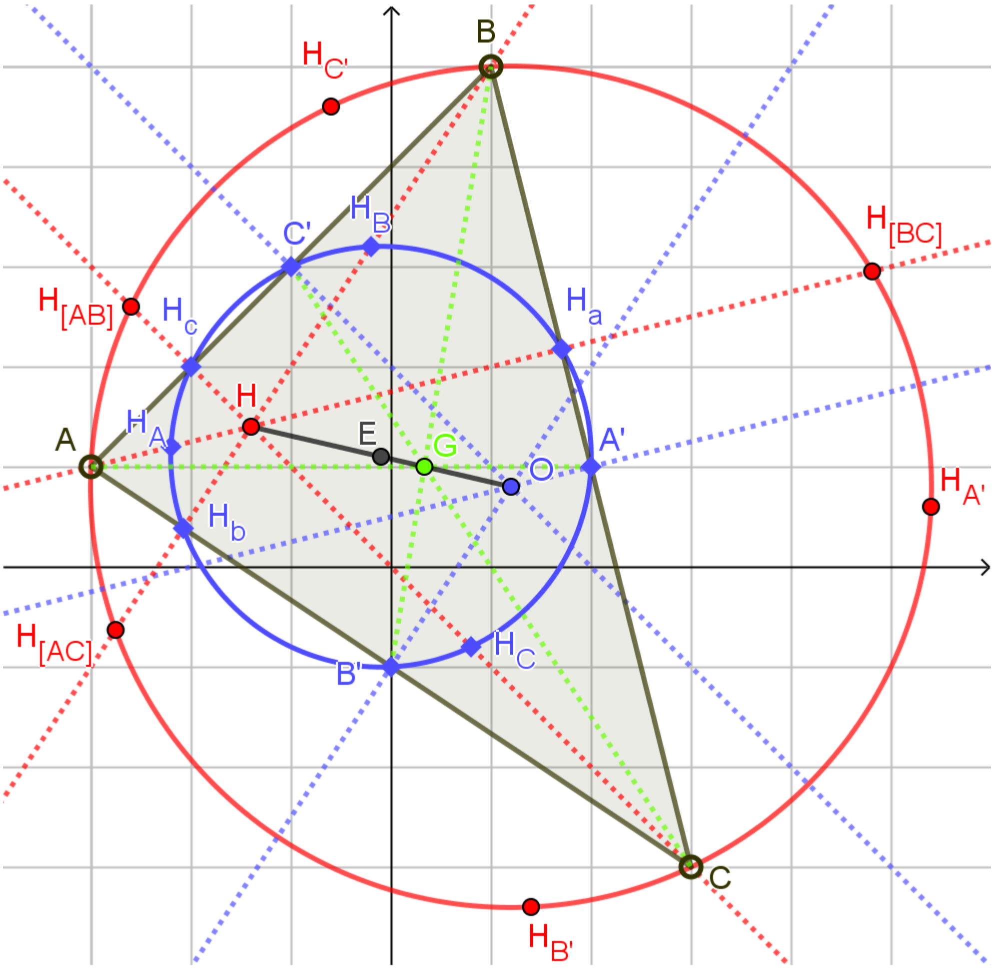
Pour déterminer $\widehat{CLI}$, nous allons reprendre la méthode du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) && \text{d'après Chasles} \\
&= \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{DC} && \text{par développement} \\
&= (-l^2) + 0 + 0 + (L \times \frac{L}{2}) && \text{d'après les contraintes de l'énoncé} \\
&= \frac{L^2}{2} - l^2 = \frac{L^2 - 2l^2}{2}
\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AC} = DI \times AC \times \cos(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\sqrt{L^2+4l^2}}{2} \times \sqrt{l^2 + L^2} \times \cos(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{AC})$.
On en déduit que $\frac{\sqrt{l^2+L^2}\sqrt{L^2+4l^2}}{2} \times \cos(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{AC}) = \frac{L^2-2l^2}{2}$ et donc $\cos(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{AC}) = \frac{L^2-2l^2}{\sqrt{(l^2+L^2)(L^2+4l^2)}}$, d'où $(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{AC}) = \cos^{-1}\left(\frac{L^2-2l^2}{\sqrt{(l^2+L^2)(L^2+4l^2)}}\right)$.
L'expression obtenue pour $\widehat{CLI}$ n'est pas beaucoup plus simple que pour $\widehat{CNI}$...mais elle va être très pratique pour répondre à la question posée dans l'application, contrairement à ce que donnerait le calcul plus direct de $\widehat{CLI}$, soit $\tan^{-1}\left(\frac{2l}{L}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{l}{L}\right)$.

Application numérique :
Si $\widehat{CLI} = \frac{\pi}{2}$, alors on doit avoir $\cos(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{AC}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, d'où $\frac{L^2-2l^2}{\sqrt{(l^2+L^2)(L^2+4l^2)}} = 0$. Comme le dénominateur de cette fraction est strictement positif, il faut avoir $L^2 - 2l^2 = 0$ et donc $\left(\frac{L}{l}\right)^2 = 2$. Ceci est seulement réalisé lorsque $L = \sqrt{2}l$ (car L et l sont des longueurs, des nombres strictement positifs). Les feuilles des photocopies du format $A4$ mesurent $21cm$ sur $29,7cm$, ce qui correspond bien à ce rapport puisque $\sqrt{2} \times 21 \approx 29,69848$ qui s'arrondit au mm près à $29,7cm$.
NB : Les formats sont déterminés pour une autre particularité de ce rapport. Quand on coupe ou qu'on plie une feuille $A4$ en deux, on obtient une feuille qui possède le même rapport $\frac{L}{l} = \sqrt{2}$: c'est le format $A5$. Et ainsi de proche en proche, en partant du format initial, noté $A0$ qui est défini initialement par son aire de $1m^2$ et la propriété $\frac{L}{l} = \sqrt{2}$. C'est la norme internationale $ISO216$ qui a fixé cet usage. Une feuille $A0$ mesure ainsi $\sqrt[4]{2}m \approx 118,9cm$ sur $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}m \approx 84,1cm$.

Correction de l'exercice 2.12 (Orthocentre)
Coordonnées des sommets : $A(-3,1)$, $B(1,5)$ et $C(3,-3)$.
Coordonnées des milieux : $A'(2,1)$ de $[BC]$, $B'(0,-1)$ de $[AC]$ et $C'(-1,3)$ de $[AB]$.
Composantes des vecteurs : $\overrightarrow{AB}(4,4)$, $\overrightarrow{BC}(2,-8)$ et $\overrightarrow{CA}(-6,4)$.



Un point $M(x,y)$ appartient à la hauteur issue de A si $\overrightarrow{AM}(x+3,y-1) \perp \overrightarrow{BC}(2,-8)$, soit si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \iff 2(x+3)-8(y-1)=0 \iff x-4y+7=0$.
De même, l'équation des hauteurs issue de B : $3x-2y+7=0$ et issue de C : $x+y=0$.
Si les hauteurs sont concourantes, les coordonnées d'un point vérifient les 3 égalités simultanément :

$$\begin{cases} x-4y+7=0 \\ 3x-2y+7=0 \\ x+y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{-7}{5} \\ y=\frac{7}{5} \end{cases}$$

L'orthocentre du triangle est donc le point $H(\frac{-7}{5};\frac{7}{5})$.

Un point $M(x,y)$ appartient à la médiatrice de $[BC]$ si $\overrightarrow{A'M}(x-2,y-1) \perp \overrightarrow{BC}(2,-8)$, soit si $\overrightarrow{A'M}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \iff 2(x-2)-8(y-1)=0 \iff x-4y+2=0$.
De même, l'équation des médiatrices de $[CA]$: $3x-2y-2=0$ et de $[AB]$: $x+y=2$.
Si les médiatrices sont concourantes, les coordonnées d'un point vérifient les 3 égalités simultanément :

$$\begin{cases} x-4y+2=0 \\ 3x-2y-2=0 \\ x+y=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{6}{5} \\ y=\frac{4}{5} \end{cases}$$

Le centre du cercle circonscrit au triangle est donc le point $O(\frac{6}{5};\frac{4}{5})$.

L'isobarycentre G de $\{A,B,C\}$ a pour coordonnées $(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3})$, donc $G(\frac{1}{3};1)$.
Les points O, G et H sont alignés car $\overrightarrow{OH}(\frac{-13}{5},\frac{3}{5})$ est colinéaire à $\overrightarrow{OG}(\frac{-13}{15},\frac{1}{5})$. On peut le vérifier en calculant le déterminant de ces vecteurs, mais on peut surtout remarquer que $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$, ce qui prouve l'alignement des points O, G, H dans cet ordre sur la droite de Euler du triangle.

Un point $M(x,y)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC si $OM^2=OA^2 \iff \left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\left(y-\frac{4}{5}\right)^2=\left(-3-\frac{6}{5}\right)^2+\left(1-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{442}{25}$.
Déterminons les coordonnées des points et assurons nous qu'elles vérifient l'équation de $\mathscr{C}$:

- $H_{[BC]}(x;y)$ est sur la hauteur issue de A et le milieu de $[HH_{[BC]}]$ est sur (BC). Or l'équation de (BC) est $4x+y-9=0$ et le milieu de $[HH_{[BC]}]$ a pour coordonnées $(\frac{x+\frac{-7}{5}}{2};\frac{y+\frac{7}{5}}{2})$. Les coordonnées cherchées vérifient le système :
$$\begin{cases}4\left(\frac{x+\frac{-7}{5}}{2}\right)+\left(\frac{y+\frac{7}{5}}{2}\right)-9=0\\ x-4y+7=0\end{cases} \iff \begin{cases}20x+5y-111=0\\ x-4y+7=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=\frac{409}{85}\\ y=\frac{251}{85}\end{cases}$$
Vérifions que $H_{[BC]}(\frac{409}{85};\frac{251}{85})$ est sur $\mathscr{C}$: $\left(\frac{409}{85}-\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{251}{85}-\frac{4}{5}\right)^2=\left(\frac{307}{85}\right)^2+\left(\frac{183}{855}\right)^2=\frac{442}{25}$. Donc oui, $H_{[BC]}\in\mathscr{C}$.
- De même, $H_{[AC]}$ est sur la hauteur issue de B et le milieu de $[HH_{[AC]}]$ est sur (AC). L'équation de (AC) est $2x+3y+3=0$; le milieu de $[HH_{[AC]}]$ a toujours pour coordonnées $(\frac{x+\frac{-7}{5}}{2};\frac{y+\frac{7}{5}}{2})$ et on trouve finalement $H_{[AC]}(\frac{-179}{65};\frac{-41}{65})$. Vérification que $H_{[AC]}\in\mathscr{C}$: $\left(\frac{-179}{65}-\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{-41}{65}-\frac{4}{5}\right)^2=\left(\frac{-257}{65}\right)^2+\left(\frac{-93}{65}\right)^2=\frac{442}{25}$.
- De même, on trouve que $H_{[AB]}(\frac{-13}{5};\frac{13}{5})$ et que ces coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{C}$.
- Le segment $[HH_{A'}]$ a pour milieu $A'(2,1)$.
Les coordonnées de $H_{A'}(x;y)$ vérifient le système : $\begin{cases}\frac{1}{2}\left(x-\frac{7}{5}\right)=2\\ \frac{1}{2}\left(y+\frac{7}{5}\right)=1\end{cases} \iff \begin{cases}x=\frac{27}{5}\\ y=\frac{3}{5}\end{cases}$.
Vérification que $H_{A'}\in\mathscr{C}$: $\left(\frac{27}{5}-\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\right)^2=\left(\frac{21}{5}\right)^2+\left(\frac{-1}{5}\right)^2=\frac{442}{25}$.
- De même, $H_{B'}(\frac{7}{5},\frac{-17}{5})\in\mathscr{C}$ et $H_{C'}(\frac{-3}{5},\frac{23}{5})\in\mathscr{C}$

Le cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC contient donc bien les 6 points (en rouge) qui sont les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés et aux milieux des côtés, ce qui se voyait sur la figure mais qui nécessitait une preuve. Le calcul analytique fournit cette preuve qui se généralise pour tous les triangles. On peut reprocher à cette méthode son côté fastidieux mais elle a ses avantages : en fournissant les coordonnées des points elle peut être programmée. Pour traiter le cas général (bien plus intéressant), recommencer avec les points $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ et $C(x_C,y_C)$.

Le milieu E du segment $[HO]$ a pour coordonnées $(\frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}-\frac{7}{5}\right);\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{5}\right))$, soit donc$E(\frac{-1}{10};\frac{11}{10}$. Le cercle de centre E passant par A', on le notera $\mathscr{C}'$, a donc pour équation $(x-x_E)^2+(y-y_E)^2=(x_{A'}-x_E)^2+(y_{A'}-y_E)^2 \iff (x+\frac{1}{10})^2+(y-\frac{11}{10})^2=\frac{221}{50}$.
Déterminons les coordonnées des points et assurons nous qu'elles vérifient l'équation de $\mathscr{C}'$:

- H_a est le milieu de $[HH_{[BC]}]$ qui a pour coordonnées $(\frac{x+\frac{-7}{5}}{2};\frac{y+\frac{7}{5}}{2})$ avec $x=\frac{409}{85}$ et $y=\frac{251}{85}$ (voir plus haut). On en déduit $H_a(\frac{29}{17};\frac{37}{17})$. Vérification que $H_a\in\mathscr{C}'$: $(\frac{29}{17}+\frac{1}{10})^2+(\frac{37}{17}-\frac{11}{10})^2=\frac{221}{50}$.
- De même, $H_b(\frac{-27}{13},\frac{5}{13})\in\mathscr{C}'$ et $H_c(-2,2)\in\mathscr{C}'$.
- H_A étant le milieu du segment $[HA]$ a pour coordonnées $(\frac{-11}{5};\frac{6}{5})$.
Vérification que $H_A\in\mathscr{C}'$: $(\frac{-11}{5}+\frac{1}{10})^2+(\frac{6}{5}-\frac{11}{10})^2=\frac{221}{50}$.
- De même, $H_B(\frac{-1}{5},\frac{16}{5})\in\mathscr{C}'$ et $H_C(\frac{4}{5},\frac{-4}{5})\in\mathscr{C}'$.

Le cercle $\mathscr{C}'$ circonscrit au triangle $A'B'C'$ contient donc bien les 6 points (en bleu) qui sont les projections orthogonales de l'orthocentre sur les côtés du triangle et les milieux des segments joignant l'orthocentre à ses sommets. Si on remarque que l'orthocentre du triangle $A'B'C'$ est le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC, on va alors trouver d'autres points sur ce cercle : les symétriques de O par rapport aux côtés et aux milieux des côtés du triangle $A'B'C'$; mais 3 de ces nouveaux points sont déjà connus, je vous laisse trouver lesquels.

2.1.4 Trigonométrie

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.13 (PENTAGONE RÉGULIER)
Partie 1 :
Pour exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\sin x$, utilisons la formule d'addition :
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
Ainsi, $\sin(5x) = \sin(4x+x) = \sin(4x)\cos(x) + \cos(4x)\sin(x)$.
Mais, d'après les formules de duplication, on a
$\sin(4x) = \sin(2\times 2x) = 2\sin(2x)\cos(2x) = 4\sin x\cos x\cos(2x) = 4\sin x\cos x(1-2\sin^2 x)$
D'autre part, à l'aide des mêmes formules
$\cos(4x) = \cos(2\times 2x) = 2\left(\cos(2x)\right)^2 - 1 = 2\left(1-2\sin^2 x\right)^2 - 1$.
On en déduit que

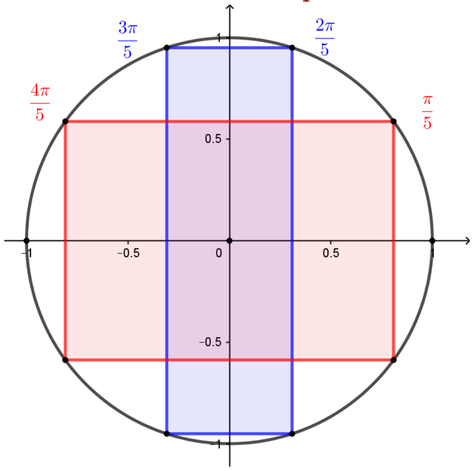
$$\begin{aligned}\sin(5x) &= \left(4\sin x\cos x(1-2\sin^2 x)\right)\cos x + \left(2\left(1-2\sin^2 x\right)^2 - 1\right)\sin x\\ &= 4\sin x\cos^2 x(1-2\sin^2 x) + 2\sin x\left(1-2\sin^2 x\right)^2 - \sin x\\ &= 4\sin x(1-\sin^2 x)(1-2\sin^2 x) + 2\sin x\left(1-2\sin^2 x\right)^2 - \sin x\end{aligned}$$

Développons cela et ordonnons les termes. Pour simplifier l'écriture, je note $X = \sin x$:
$\sin(5x) = 4X(1-X^2)(1-2X^2) + 2X(1-2X^2)^2 - X = 16X^5 - 20X^3 + 5X = X(16X^4 - 20X^2 + 5)$.
On obtient donc finalement $\sin(5x) = \sin x\left(16\sin^4 x - 20\sin^2 x + 5\right)$.

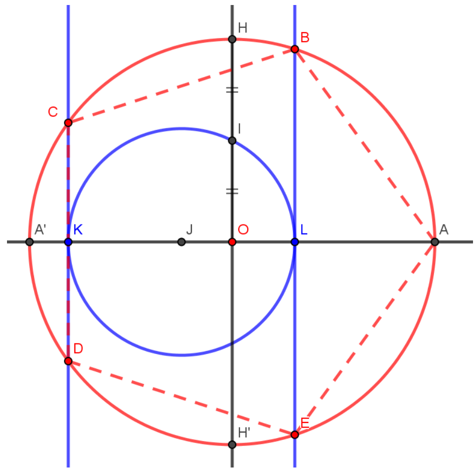
L'équation $\sin(5x) = 0$ peut être résolue en considérant l'équation algébrique $16X^5 - 20X^3 + 5X = X(16X^4 - 20X^2 + 5) = 0$.
Le facteur $16X^4 - 20X^2 + 5$ s'annule pour $X^2 = \frac{20\pm\sqrt{80}}{32} = \frac{5\pm\sqrt{5}}{8}$ qui sont 2 nombres positifs.
Donc, il y a 4 solutions qui sont $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$, $-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$, $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ et $-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.
Á ces solutions, il convient bien sûr d'ajouter $X = 0$.
L'équation $\sin(5x) = 0$ peut aussi être résolue de façon trigonométrique $5x = 0[2\pi]$ ou $5x = \pi[2\pi]$, ce qui revient à $5x = 0[\pi]$, d'où en divisant par 5 : $x = 0[\frac{\pi}{5}]$. Sur le cercle trigonométrique, il y a 10 points qui correspondent à cette définition, mais cela ne fait que 5 valeurs différentes pour les sinus.

Par identification des valeurs trouvées, on en déduit que :
- $\sin(\frac{2\pi}{5}) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ (la plus grande valeur positive)
- $\sin(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ (la plus petite valeur positive)

Par symétrie $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \sin(\frac{2\pi}{5})$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin(\frac{\pi}{5})$.
Pour les cosinus, on utilise la formule $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$,
donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - 2\times\frac{5-\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$,
et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 1 - 2\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - 2\times\frac{5+\sqrt{5}}{8} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.
Pour le cosinus de $\frac{\pi}{5}$, on remarque que $\frac{\pi}{5} = \pi - \frac{4\pi}{5}$ et donc $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
De même, $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$.



Partie 2 :
La construction est réalisée ci-contre et semble conduire à un pentagone régulier.
Déterminons les longueurs :
$IJ = \sqrt{\left(\frac{r}{4}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = r \times \frac{\sqrt{5}}{4}$.
$OK = OJ + JK = \frac{r}{4} + IJ = r \times \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
$OL = JL - JO = IJ - \frac{r}{4} = r \times \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.



Comme $OK = r \times \frac{1+\sqrt{5}}{4} = OA \times \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et comme $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont de sens contraires, on en déduit que $\overrightarrow{OK} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}\overrightarrow{OA} = \cos\frac{4\pi}{5}\overrightarrow{OA}$. Les points C et D qui sont situés sur la perpendiculaire à (OA) passant par K, on donc des abscisses curvilignes qui correspondent à cet angle $\frac{4\pi}{5}$ et à celui qui a le même cosinus, c'est-à-dire $-\frac{4\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$.
De même, comme $OL = r \times \frac{\sqrt{5}-1}{4} = OA \times \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et comme $\overrightarrow{OL}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont de même sens, on en déduit que $\overrightarrow{OL} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\overrightarrow{OA} = \cos\frac{2\pi}{5}\overrightarrow{OA}$. Les points B et E qui sont situés sur la perpendiculaire à (OA) passant par L, ont donc des abscisses curvilignes qui correspondent à cet angle $\frac{2\pi}{5}$ et à celui qui a le même cosinus, c'est-à-dire $-\frac{2\pi}{5} = \frac{8\pi}{5}$.
Finalement, les points A, B, C, D et E qui ont des abscisses curvilignes égales à $\frac{0\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$ et $\frac{8\pi}{5}$ sont les sommets d'un pentagone régulier.

Partie 3 :
Vérifions $\sin(a+b) + \sin(a-b) = (\sin a \cos b + \cos a \sin b) + (\sin a \cos b - \cos a \sin b) = 2 \sin a \cos b$.
Calculons

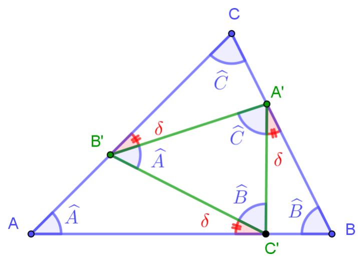
$$\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{5}\left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5}\right) &= \sin\frac{\pi}{5} + 2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} + 2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5} \\
&= \sin\frac{\pi}{5} + \left(\sin\frac{3\pi}{5} + \sin\frac{-\pi}{5}\right) + \left(\sin\frac{5\pi}{5} + \sin\frac{-3\pi}{5}\right) \\
&= \left(\sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{-\pi}{5}\right) + \left(\sin\frac{3\pi}{5} + \sin\frac{-3\pi}{5}\right) + \sin\pi \\
&= 0 + 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

Comme $\sin\frac{\pi}{5} \neq 0$, on en déduit que $1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$.
Mais $\cos\frac{4\pi}{5} = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$ d'après la propriété $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.
On en déduit, en posant $X = \cos\frac{2\pi}{5}$, que $1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\left(2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1\right) = 1 + 2X + 2(2X^2 - 1) = 0$.
En développant et ordonnant $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$.
Mais $\cos\frac{2\pi}{5} = \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\frac{8\pi}{5}$, on en déduit que $1 + 2\cos\frac{4\pi}{5} + 2\cos\frac{8\pi}{5} = 0$ et donc, en posant $X = \cos\frac{4\pi}{5}$, on trouve que $\cos\frac{4\pi}{5}$ est solution de la même équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$.
$\cos\frac{4\pi}{5}$ est la solution négative de cette équation alors que $\cos\frac{2\pi}{5}$ en est la solution positive.
Ces solutions étant $X = \frac{-2\pm\sqrt{20}}{8} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$, on en déduit que $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

Correction de l'exercice 2.14 (Triangle)

Dans le triangle $A'BC'$ l'angle $\widehat{BC'A'}$ qui n'est pas noté, est égal à $\pi - \delta - \widehat{B}$ (somme des angles d'un triangle). On en déduit que l'angle $\widehat{C'}$ est égal à $\pi - \left(\pi - \delta - \widehat{B}\right) = \widehat{B}$ (alignement de A, C', B).
De même, on montre que $\widehat{B'} = \pi - \left(\pi - \delta - \widehat{A}\right) = \widehat{A}$ et que $\widehat{A'} = \pi - \left(\pi - \delta - \widehat{C}\right) = \widehat{C}$.
Les triangles ABC et $A'B'C'$ ont donc les mêmes angles, ils sont dits semblables. Le plus grand, ABC, est un agrandissement de rapport $k > 1$ du plus petit, $A'B'C'$. On cherche k. Pour cela calculons $BC = BA' + A'C$ en déterminant BA' et $A'C$ à l'aide de la loi des sinus :

Dans le triangle $BA'C'$, on a $\frac{A'C'}{\sin \widehat{B}} = \frac{BA'}{\sin(\pi-\delta-\widehat{B})} = \frac{BA'}{\sin(\delta+\widehat{B})}$.
Dans le triangle $CA'B'$, on a $\frac{A'B'}{\sin \widehat{C}} = \frac{A'C}{\sin \delta}$.
On en déduit que $BC = BA' + A'C = \frac{A'C' \sin(\delta+\widehat{B})}{\sin \widehat{B}} + \frac{A'B' \sin \delta}{\sin \widehat{C}}$.
Mais $k \times A'C' = BC$ et $k \times A'B' = AC$ (côtés homologues des triangles semblables), donc la relation précédente s'écrit
$k \times BC = \frac{BC \sin(\delta+\widehat{B})}{\sin \widehat{B}} + \frac{AC \sin \delta}{\sin \widehat{C}}$.
On en tire $k = \frac{\sin(\delta+\widehat{B})}{\sin \widehat{B}} + \frac{AC \sin \delta}{BC \sin \widehat{C}}$.



Simplifions le dernier terme à l'aide de la loi des sinus : $\frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{BC}{\sin \widehat{A}}$ et donc $\frac{AC}{BC} = \frac{\sin \widehat{B}}{\sin \widehat{A}}$, d'où

$$\begin{aligned}
k &= \frac{\sin(\delta+\widehat{B})}{\sin \widehat{B}} + \frac{\sin \widehat{B} \sin \delta}{\sin \widehat{A} \sin \widehat{C}} \\
&= \frac{\sin \widehat{A} \sin \widehat{C} \left(\sin(\delta+\widehat{B})\right) + \sin^2 \widehat{B} \sin \delta}{\sin \widehat{A} \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}} \\
&= \frac{\sin \widehat{A} \sin \widehat{C} \left(\sin \delta \cos \widehat{B} + \cos \delta \sin \widehat{B}\right) + (1-\cos^2 \widehat{B}) \sin \delta}{\sin \widehat{A} \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}} \\
&= \frac{\cos \delta \sin \widehat{A} \sin \widehat{B} \sin \widehat{C} + \sin \delta \left(\sin \widehat{A} \cos \widehat{B} \sin \widehat{C} + 1 - \cos^2 \widehat{B}\right)}{\sin \widehat{A} \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}} \\
&= \cos \delta + \sin \delta \times \frac{1 + \cos \widehat{B} \left(\sin \widehat{A} \sin \widehat{C} - \cos \widehat{B}\right)}{\sin \widehat{A} \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}}
\end{aligned}$$

Pour obtenir la forme symétrique souhaitée, il faut maintenant remplacer $\cos \widehat{B}$ par $\cos\left(\pi - (\widehat{A}+\widehat{C})\right) = -\cos\left(\widehat{A}+\widehat{C}\right) = -\left(\cos \widehat{A} \cos \widehat{C} - \sin \widehat{A} \sin \widehat{C}\right)$. On obtient :

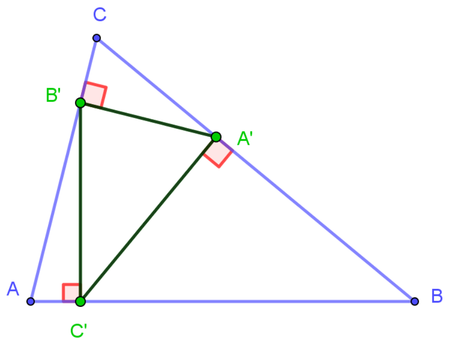
$$\begin{aligned}
k &= \cos \delta + \sin \delta \times \frac{1 + \cos \widehat{B} \left(\sin \widehat{A} \sin \widehat{C} + \left(\cos \widehat{A} \cos \widehat{C} - \sin \widehat{A} \sin \widehat{C}\right)\right)}{\sin \widehat{A} \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}} \\
&= \cos \delta + \sin \delta \times \frac{1 + \cos \widehat{A} \cos \widehat{B} \cos \widehat{C}}{\sin \widehat{A} \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}}
\end{aligned}$$

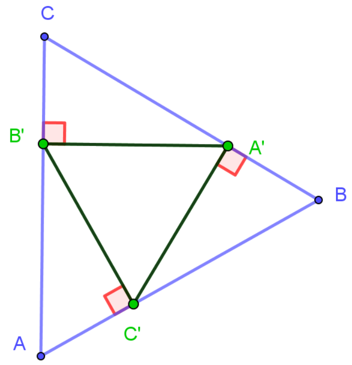
Voilà le résultat attendu.
Lorsque $\delta = \frac{\pi}{2}$ cela se simplifie en

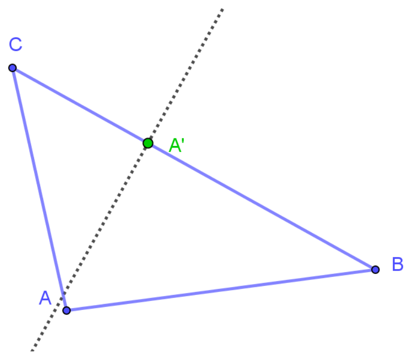
$$k = \frac{1 + \cos \widehat{A} \cos \widehat{B} \cos \widehat{C}}{\sin \widehat{A} \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}}$$

La figure n'est pas facile à faire : un triangle ABC étant donné, peut-on dans tous les cas construire le triangle $A'B'C'$ respectant la consigne avec $\delta = \frac{\pi}{2}$? Il semble que si on sait placer un sommet de $A'B'C'$ sur un des côtés de ABC, le reste de la construction ne pose pas de problème (il suffit de tracer les 3 perpendiculaires successivement). Déterminons la longueur CA' :
On a vu que $\frac{A'B'}{\sin \widehat{C}} = \frac{A'C}{\sin \delta}$, donc $CA' = \frac{A'B' \sin \delta}{\sin \widehat{C}} = \frac{AC \sin \delta}{k \sin \widehat{C}}$ et, lorsque $\delta = \frac{\pi}{2}$, on obtient $CA' = \frac{AC}{k \sin \widehat{C}}$.
Avec la valeur de k trouvée, cela devient $CA' = \frac{AC\left(\sin \widehat{A} \sin \widehat{B}\right)}{1+\cos \widehat{A} \cos \widehat{B} \cos \widehat{C}}$.

Pour un triangle ABC, on peut ainsi placer A' et, de là, trouver les points B' et C'. Lorsque ABC est obtus la construction ne conduit pas à un triangle $A'B'C'$ (figure de droite).







Correction de l'exercice 2.15 (Triangle équilatéral)

$(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = \frac{-2\pi}{3} + x$

$(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = \frac{2\pi}{3} + x$

Appliquons le théorème d'Al-Kashi aux triangles OMA, OMB et OMC :

$MA^2 = OM^2 + OA^2 - 2OM \cdot OA\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = r^2 + r^2 - 2r^2\cos x = 2r^2(1-\cos x)$. $MB^2 = OM^2 + OB^2 - 2OM \cdot OB\cos(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}) = r^2 + r^2 - 2r^2\cos\left(\frac{x-2\pi}{3}\right) = 2r^2\left(1-\cos\left(\frac{x-2\pi}{3}\right)\right)$. $MC^2 = OM^2 + OC^2 - 2OM \cdot OC\cos(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OM}) = r^2 + r^2 - 2r^2\cos\left(\frac{x+2\pi}{3}\right) = 2r^2\left(1-\cos\left(\frac{x+2\pi}{3}\right)\right)$. Pour simplifier cette expression, utilisons la propriété de linéarisation $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$:

$MA^2 = 2r^2(1-\cos x) = 2r^2\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right) = \left(2r\sin\frac{x}{2}\right)^2 \Longrightarrow MA = 2r\sin\frac{x}{2}$ (car $MA > 0$).

$MB^2 = 2r^2\left(1-\cos\left(\frac{x-2\pi}{3}\right)\right) = 2r^2\left(2\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(2r\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 \Longrightarrow MB = 2r\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$ (car $MB > 0$).

$MC^2 = 2r^2\left(1-\cos\left(\frac{x+2\pi}{3}\right)\right) = 2r^2\left(2\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(2r\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 \Longrightarrow MC = 2r\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ (car $MC > 0$).

Pour prendre la racine carrée de ces expressions, il faut se poser la question du signe.

On sait que $x \in [0, \frac{2\pi}{3}]$.

On a donc $\frac{x}{2} \in [0, \frac{\pi}{3}]$ et donc $\sin\frac{x}{2} > 0$ d'où $MA^2 = \left(2r\sin\frac{x}{2}\right)^2 \Longrightarrow MA = 2r\sin\frac{x}{2}$.

Pour $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{3}, 0]$, on a $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right) < 0$ et $MB^2 = \left(2r\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 \Longrightarrow MB = -2r\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$.

Pour $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$, on a $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right) > 0$ et $MB^2 = \left(2r\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 \Longrightarrow MC = 2r\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$.

Finalement, la propriété $MA + MB = MC$ s'écrit $2r\sin\frac{x}{2} - 2r\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = 2r\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$.

Simplifiée par $2r$, il reste donc $\sin\frac{x}{2} = \sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$.

Or $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ Cela se simplifie en $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

On en déduit que $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ (car $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$).

Correction de l'exercice 2.16 (Problème d'arithmétique)

Calculons $\cos(\alpha)$ avec le théorème d'Al-Kashi :$\cos(\alpha) = \frac{a^2+l^2-b^2}{2al} = \frac{73^2+112^2-57^2}{2\times73\times112} = \frac{457}{511}$

On en déduit que :$\sin^2(\alpha) = 1-\cos^2(\alpha) = 1-\left(\frac{457}{511}\right)^2 = \frac{52272}{261121}$ et donc $\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{52272}{261121}} = \sqrt{\frac{132^2\times3}{511^2}} = \frac{132\times\sqrt{3}}{511}$

De l'autre côté, de la même manière, on a $\cos(\beta) = \frac{a^2+l^2-c^2}{2al} = \frac{73^2+112^2-c^2}{2\times73\times112} = \frac{17873-c^2}{16352}$

Mais comme $\beta = \frac{\pi}{3} - \alpha$ (triangle équilatéral), on va calculer autrement le cosinus de β :

$\cos(\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(\alpha) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(\alpha)$

soit $\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha)}{2} + \frac{\sqrt{3}\sin(\alpha)}{2} = \frac{457}{2\times511} + \frac{(\sqrt{3})^2\times132}{2\times511} = \frac{853}{1022}$

D'où $\frac{17873-c^2}{16352} = \frac{853}{1022} \Longleftrightarrow c^2 = 17873 - 16352\times\frac{853}{1022} = 4225 = 65^2$ et donc $c = 65$.

Généralisons cette recherche du 4e nombre (c) connaissant les 3 premiers (a, b et l) :

$\cos(\alpha) = \frac{a^2+l^2-b^2}{2al}$

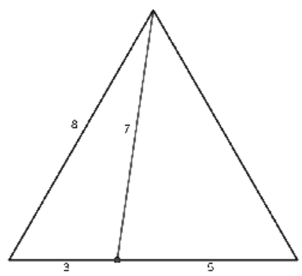
$\sin(\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)} = \sqrt{1-\left(\frac{a^2+l^2-b^2}{2al}\right)^2} = \frac{\sqrt{(2al)^2-(a^2+l^2-b^2)^2}}{2al}$

$\cos(\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{\cos(\alpha)}{2} + \frac{\sqrt{3}\sin(\alpha)}{2}$ mais aussi $\cos(\beta) = \frac{a^2+l^2-c^2}{2al}$
On en déduit que $\frac{a^2+l^2-c^2}{2al} = \frac{\cos(\alpha)}{2} + \frac{\sqrt{3}\sin(\alpha)}{2} = \frac{a^2+l^2-b^2}{4al} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{(2al)^2-(a^2+l^2-b^2)^2}}{4al}$
en multipliant par $4al$, on obtient $2(a^2+l^2-c^2) = a^2+l^2-b^2+\sqrt{3}\sqrt{(2al)^2-(a^2+l^2-b^2)^2}$
d'où $a^2+b^2+l^2-\sqrt{3}\sqrt{(2al)^2-(a^2+l^2-b^2)^2} = 2c^2$
et, finalement $c^2 = \frac{a^2+b^2+l^2-\sqrt{3}\sqrt{(2al)^2-(a^2+l^2-b^2)^2}}{2}$,
il suffit d'en prendre la racine carrée pour obtenir notre 4^{e}longueur.
Les contraintes portant sur les 4 nombres sont :

- a, b, c et l sont des entiers non nuls (une solution avec $a = 0$ par exemple n'est pas intéressante car alors P est confondu avec un sommet)
- $a < l$, $b < l$ et $c < l$ pour que le point soit à l'intérieur du triangle. Sans perte de solutions, on peut supposer que les nombres sont rangés dans cet ordre $a \leqslant b \leqslant c$ (l'égalité n'est pas écartée)
- les inégalités triangulaires doivent être respectées pour que le point P existe vraiment. On doit avoir $a+b \geqslant l$, $b+c \geqslant l$ et $a+c \geqslant l$ (l'égalité n'est pas intéressante à priori car alors le point P est sur un bord, mais on peut ne pas refuser ces solutions qui ne sont pas forcément triviales)

Il ne reste plus qu'à construire un programme qui examine toutes les possibilités.
Je fais croître l en partant de $l = 1$ sans trop d'espoir pour cette valeur, mais dans l'ignorance d'une valeur plus pertinente pour le début.
Je choisis ensuite a dans l'intervalle $]1; l[$ et puis b dans l'intervalle $[a; l[$, de manière à respecter l'inégalité $a + b \geqslant l$ (je n'écarte pas la possibilité de l'égalité).
Je calcule alors la valeur de c avec la formule trouvée et je vérifie que ce nombre est un entier. Si c'est bien le cas, alors j'ordonne les 4 nombres pour qu'ils soient bien dans l'ordre (à priori il n'y a que c à classer) et j'affiche la solution.
Le programme continue de cette manière en essayant toutes les combinaisons.
Vous noterez que je n'ai pas programmé toutes les contraintes mais, pour effectuer le calcul de c, on doit prendre deux fois la racine carrée d'un nombre. Or, cette opération n'est possible que si le nombre est positif. J'ai donc mis deux tests dans la fonction qui calcule c pour éliminer les cas où un de ces nombres se révèlerait négatif. Je suppose, sans l'avoir démontré, que ces tests reviennent à écarter les cas qui ne satisfont pas les deux autres inégalités triangulaires.

```
from math import *
def distance(a,b,l):
    if 3*((2*a*l)**2-(l**2+a**2-b**2)**2)>0 and (l**2+a**2+b**2-sqrt(3*((2*a*l)**2-(l**2+a**2-b**2)**2)))>0:
        return sqrt((l**2+a**2+b**2-sqrt(3*((2*a*l)**2-(l**2+a**2-b**2)**2)))/2)
    else : return -1

n=0
solutions=list()
for L in range(1,120):#coté du triangle
    #print("triangle de côté {}".format(L))
    for A in range(1,L):#première distance
        for B in range(A,L):#deuxième distance
            if A+B<L:continue
            C=distance(A,B,L)#troisième distance
            if C>0 and int(C)==C:
                long=[A,B,int(C),L]
                long.sort()
                if long not in solutions:
                    n+=1
                    print("solution n°{} : {}".format(n,long))
                    solutions.append(long)
```



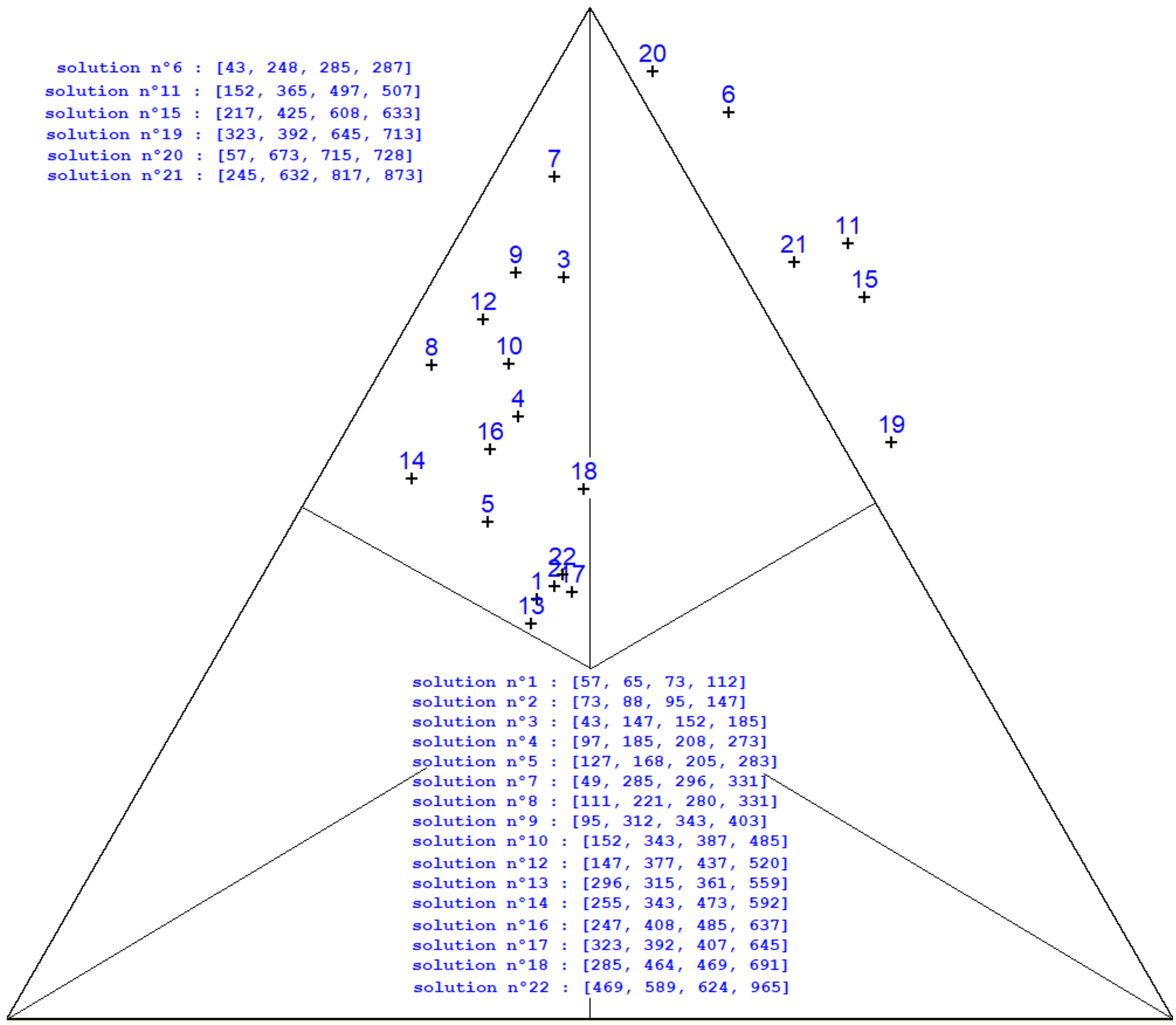

```
solution n°1 : [3, 5, 7, 8]
solution n°2 : [7, 8, 13, 15]
solution n°3 : [6, 10, 14, 16]
solution n°4 : [5, 16, 19, 21]
solution n°5 : [9, 15, 21, 24]
solution n°6 : [14, 16, 26, 30]
solution n°7 : [12, 20, 28, 32]
solution n°8 : [11, 24, 31, 35]
solution n°9 : [7, 33, 37, 40]
solution n°10 : [15, 25, 35, 40]
solution n°11 : [10, 32, 38, 42]
solution n°12 : [21, 24, 39, 45]
solution n°13 : [13, 35, 43, 48]
solution n°14 : [18, 30, 42, 48]
solution n°15 : [16, 39, 49, 55]
solution n°16 : [21, 35, 49, 56]
solution n°17 : [28, 32, 52, 60]
solution n°18 : [15, 48, 57, 63]
solution n°19 : [24, 40, 56, 64]
solution n°20 : [9, 56, 61, 65]
solution n°21 : [22, 48, 62, 70]
solution n°22 : [27, 45, 63, 72]
solution n°23 : [35, 40, 65, 75]
solution n°24 : [32, 45, 67, 77]
solution n°25 : [14, 66, 74, 80]
solution n°26 : [17, 63, 73, 80]
solution n°27 : [30, 50, 70, 80]
solution n°28 : [20, 64, 76, 84]
solution n°29 : [33, 55, 77, 88]
solution n°30 : [42, 48, 78, 90]
solution n°31 : [40, 51, 79, 91]
solution n°32 : [11, 85, 91, 96]
solution n°33 : [26, 70, 86, 96]
solution n°34 : [36, 60, 84, 96]
solution n°35 : [19, 80, 91, 99]
solution n°36 : [39, 65, 91, 104]
solution n°37 : [25, 80, 95, 105]
solution n°38 : [33, 72, 93, 105]
solution n°39 : [49, 56, 91, 105]
solution n°40 : [32, 78, 98, 110]
solution n°41 : [42, 70, 98, 112]
solution n°42 : [55, 57, 97, 112]
solution n°43 : [57, 65, 73, 112]
```

L'exécution de ce programme montre qu'il existe beaucoup de solutions :

- la 1re solution ($a = 3, b = 5, c = 7, l = 8$) est toujours intéressante mais elle correspond à un point P sur le bord du triangle. La solution proposée par le texte (elle est extraite d'une publication de *American Mathematical Monthly*) porte le n°43
- pour $l < 1000$ je trouve 678 solutions (le programme est assez long pour aboutir) dont voici la dernière :$a = 295, b = 704, c = 889, l = 999$
- toutes les valeurs entières ne conviennent pas pour l, la liste des valeurs pour lesquelles il y a des solutions commence par : $8, 15, 16, 21, 24, 30, 32, 35, 40, 42, 45, 48, 55, 56, 60, 63, 64, 65, 70, 72, 75, 77, 80, 84, 88,$ Cette liste se retrouve dans l'encyclopédie des nombres entiers de Sloane[3] où elle porte le n°229839 mais, en réalité, il ne s'agit que des valeurs pour lesquelles le point P est sur un côté. Si on ne retient que les solutions où le point P est vraiment à l'intérieur du triangle et non sur le bord (il faut ajouter quelques tests), la 1re est celle de l'énoncé (cela explique son choix par l'*AMM*). Les suivantes sont $a = 73, b = 88, c = 95, l = 147$ et $a = 43, b = 147, c = 152, l = 185$. Ces vraies solutions sont beaucoup plus rares : je n'en trouve plus que 50 pour $l < 1000$, la plus grande étant $a = 333, b = 663, c = 840, l = 993$. La liste est présente dans l'OEIS sous le n°61281 ; une formule y est associée à cette situation : $3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$, je vous laisse découvrir pourquoi. On peut être encore plus restrictif si on élimine les solutions non-primitives comme la 4e ($a = 114, b = 130, c = 146, l = 224$) qui est juste un agrandissement de la 1re d'un facteur 2. En éliminant les solutions non-primitives (il faut ajouter un petit module « PGCD »), il n'en reste plus que 22 pour $l < 1000$, la plus grande étant $a = 469, b = 589, c = 624, l = 965$. La liste des valeurs pour lesquelles il y a ce type de vraies solutions primitives commence par :
  $112, 147, 185, 273, 283, 287, 331, 403, 485, 507, 520, 559, 592, 633, 637, 645, 691, 713, 728, 873, 965.$
  Cette liste n'est pas présente dans l'OEIS.

Pour finir, voici une représentation des proportions de ces 22 triangles-solutions. J'ai réalisé cette figure pour visualiser les solutions trouvées, éventuellement observer des particularités. En réalité je m'aperçois surtout qu'une partie des solutions n'est pas à l'intérieur du triangle comme je m'y attendais. Cela me montre une lacune dans mon système de contraintes : il faut être plus restrictif encore pour éliminer ces solutions extérieures. J'ai ajouté cette condition supplémentaire : $a + b + c < 2 * l$ et les 6 fausses solutions sont éliminées. Sauriez-vous justifier cette contrainte supplémentaire, ou la prendre en défaut ?

3. `https://oeis.org`


solution n°6 : [43, 248, 285, 287]
solution n°11 : [152, 365, 497, 507]
solution n°15 : [217, 425, 608, 633]
solution n°19 : [323, 392, 645, 713]
solution n°20 : [57, 673, 715, 728]
solution n°21 : [245, 632, 817, 873]
20
6
7
11
21
9
3
15
12
8
10
4
16
19
14
18
5
22
2
17
1
13
solution n°1 : [57, 65, 73, 112]
solution n°2 : [73, 88, 95, 147]
solution n°3 : [43, 147, 152, 185]
solution n°4 : [97, 185, 208, 273]
solution n°5 : [127, 168, 205, 283]
solution n°7 : [49, 285, 296, 331]
solution n°8 : [111, 221, 280, 331]
solution n°9 : [95, 312, 343, 403]
solution n°10 : [152, 343, 387, 485]
solution n°12 : [147, 377, 437, 520]
solution n°13 : [296, 315, 361, 559]
solution n°14 : [255, 343, 473, 592]
solution n°16 : [247, 408, 485, 637]
solution n°17 : [323, 392, 407, 645]
solution n°18 : [285, 464, 469, 691]
solution n°22 : [469, 589, 624, 965]