1.1 Corrections

1.1.1 Problèmes du second degré

Correction de l'exercice 1.1 (Jeu)
Puisque $n-1$ joueurs ont perdu et donnent n€ au gagnant, celui-ci reçoit $n(n-1)=20$.
Cette équation s'écrit $n^2-n-20=0$.
Son discriminant est $\Delta=(-1)^2-4\times(-20)=1+80=81=9^2>0$.
Il y a donc deux solutions à cette équation : $\frac{1-9}{2}=-4$ et $\frac{1+9}{2}=5$.
La 1re ne convient pas car le nombre de joueur est positif ; il y avait donc 5 joueurs.

Correction de l'exercice 1.2 (Poids de l'astronaute)
L'altitude de l'astronaute vérifie l'inéquation :
$70\times\left(\frac{6400}{6400+x}\right)^2\leqslant 5\iff 14\times 6400^2\leqslant 5(6400+x)^2\iff 14\times 6400^2-5(6400+x)^2\leqslant 0$
Cette inéquation se factorise en :
$(\sqrt{14}\times 6400-(6400+x))(\sqrt{14}\times 6400+(6400+x))\leqslant 0\iff(6400(\sqrt{14}-1)-x)(6400(\sqrt{14}-1)+x)$.
Elle change de signe pour :

- $x=x_1=6400(\sqrt{14}-1)\approx 17546,61$
- $x=x_2=-6400(\sqrt{14}+1)\approx -30346,61$

Le poids de l'astronaute sera inférieur à 5 à partir de $17547km$ d'altitude environ, pour ce qui est de la racine positive. L'autre racine du trinôme est $-30347<0$. Elle correspond à l'altitude de l'astronaute lorsqu'il est de l'autre côté de la Terre ($12800km$ de diamètre), en dessous de nos pieds, ce qui explique le signe $-$.

Correction de l'exercice 1.3 (Rectangle dans rectangle 1)
Si je note x et x' les dimensions cherchées, ces nombres sont solutions de $xx'=750$ (aire du terrain) et $xx'-(x-0,2)(x'-0,2)=11$. Cette dernière équation se simplifie en $0,2(x+x')-0,2^2=11\iff x+x'=\frac{11+0,04}{0,2}=55,2$. On connait donc la somme et le produit des racines du trinôme $x^2-55,2x+750$, il ne reste plus qu'à déterminer ces racines $x=\frac{55,2\pm\sqrt{55,2^2-4\times 750}}{2}=\frac{55,2\pm\sqrt{47,04}}{2}$. Les dimensions du terrain sont donc $x=\frac{55,2+\sqrt{47,04}}{2}\approx 31,0m$ et $x'=\frac{55,2-\sqrt{47,04}}{2}\approx 24,2m$.

Correction de l'exercice 1.4 (Rectangle dans rectangle 2)
En notant L et l les dimensions du terrain, on doit avoir $(L-2x)(l-2x)=\frac{Ll}{2}$, soit, en développant et en multipliant tout par 2 : $2Ll-4x(L+l)+8x^2=Ll$. La largeur de la bordure vérifie donc l'équation $8x^2-4x(L+l)+Ll=0$. Le discriminant est $\Delta=16(L+l)^2-32Ll=16(L^2+l^2)>0$ (les produits Ll s'éliminent). On obtient $x=\frac{4(L+l)\pm\sqrt{16(L^2+l^2)}}{16}=\frac{L+l\pm\sqrt{L^2+l^2}}{4}$. La valeur $\frac{L+l+\sqrt{L^2+l^2}}{4}$ est trop grande car $L+l>L$ et aussi $\sqrt{L^2+l^2}>L$, donc $L+l+\sqrt{L^2+l^2}>2L$ et $\frac{L+l+\sqrt{L^2+l^2}}{4}>\frac{L}{2}$ ce qui ne se peut pas car la largeur de la bordure ne peut dépasser la moitié de la longueur du terrain. Il reste une seule valeur qui solutionne le problème, la bordure mesure $x=\frac{L+l-\sqrt{L^2+l^2}}{4}$, ce qui correspond bien au quart de la différence entre le demi-périmètre $(L+l)$ et la diagonale du terrain $(\sqrt{L^2+l^2})$.

Correction de l'exercice 1.5 (Profondeur du puits)
La profondeur du puits x vérifie l'égalité suivante portant sur la durée des trajets $\frac{x}{340}+\sqrt{\frac{x}{4,9}}=3$ où le 1er terme est la durée mise par le son pour parcourir la distance x et le 2e terme est celle de la chute de la pierre. En posant $X=\sqrt{x}$, l'égalité s'écrit $\frac{X^2}{340}+\frac{X}{\sqrt{4,9}}=3$ et, en remarquant que $\frac{1}{\sqrt{4,9}}=\frac{1}{\sqrt{10\times 49\times 10^{-2}}}=\frac{10}{7\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{7}$, on obtient l'égalité $\frac{X^2}{340}+\frac{X\sqrt{10}}{7}-3=0$ qui, sans dénominateur, s'écrit $7X^2+340\sqrt{10}X-7140=0$ (j'ai multiplié le tout par $7\times 340=2380$). Le discriminant de cette équation est $\Delta=10\times 340^2+4\times 7\times 7140=1355920$. La solution cherchée est la racine positive de cette équation ($X=\sqrt{x}$ est nécessairement un nombre positif) élevée au carré, soit le carré de

$\frac{-340\sqrt{10}+\sqrt{1355920}}{14} \approx 6,376$. On trouve $x = X^2 = \frac{627980-3400\sqrt{33898}}{49} \approx 40,654628m$
Pour la formule générale, on a $\frac{x}{340}+\sqrt{\frac{x}{4,9}} = a$ qui donne $7X^2+340\sqrt{10}X-2380a = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 10 \times 340^2 + 4 \times 7^2 \times 340 \times a = 1156000 + 66640a$. La profondeur du puits est donc égale à $\left(\frac{-340\sqrt{10}+\sqrt{1156000+66640a}}{14}^2\right)$.

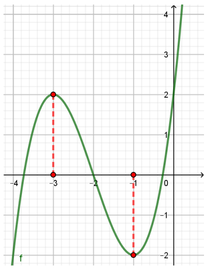
Correction de l'exercice 1.6 (Hauteur d'une échelle)
D'après le théorème de Pythagore, on a $d^2+h^2 = 2,5^2 = 6,25$. Le théorème de Thalès nous indique, quant à lui, que $\frac{OA}{OB} = \frac{CA}{CD} \iff \frac{h}{d} = \frac{h-0,7}{0,7} \iff 0,7(h+d) = dh$. Comme $(d+h)^2 = d^2+h^2+2dh$, on en déduit que $d^2+h^2 = (d+h)^2-2dh$. On en déduit que $x = d+h$ est solution de l'équation $x^2-2\times(0,7x) = 6,25 \iff x^2-1,4x-6,25 = 0$.
Les solutions de cette équation sont $x = \frac{1,4\pm\sqrt{1,4^2+4\times 6,25}}{2} = 0,7\pm\sqrt{6,74}$ mais $x = d+h$ étant nécessairement positif, on a $x = 0,7+\sqrt{6,74}$. Donc $S = d+h = 0,7+\sqrt{6,74}$ et $P = dh = 0,7(h+d) = 0,7(0,7+\sqrt{6,74})$, il ne reste plus qu'à résoudre l'équation $x^2-Sx+P = 0$, la hauteur h cherchée étant vraisemblablement la plus grande des 2 solutions (l'autre est d). Utilisons des valeurs approchées : l'équation est $x^2-3,296151x+2,307306 \approx 0$ et la plus grande de ses solutions $h \approx \frac{3,296151+\sqrt{3,296151^2-4\times 2,307306}}{2} \approx 2,287487$ (l'autre solution est $d \approx \frac{3,296151-\sqrt{3,296151^2-4\times 2,307306}}{2} \approx 1,008664$).

Correction de l'exercice 1.7 (Travail en binôme)
Appelons t_A et t_B les durées pour accomplir le travail cherchées.
Si chacun accomplit la moitié du travail, cela dure $\frac{t_A}{2}+\frac{t_B}{2} = 12,5$.
En $1h$ de temps, $M^{\text{r}}A$ exécute $\frac{1}{t_A}$ du travail total et $M^{\text{r}}B$ en exécute $\frac{1}{t_B}$.
Ensemble, ils exécutent en $1h$: $\frac{1}{t_A}+\frac{1}{t_B}$ du travail.
Or, le travail réalisé en $1h$ représente $\frac{1}{6}$ du travail total.
On en déduit l'égalité $\frac{1}{t_A}+\frac{1}{t_B} = \frac{1}{6} \iff \frac{t_A+t_B}{t_At_B} = \frac{1}{6} \iff 6(t_A+t_B) = t_At_B$.
Il faut donc résoudre le système : $\begin{cases} t_A+t_B = 2\times 12,5 \\ 6(t_A+t_B) = t_At_B \end{cases}$ soit $\begin{cases} t_A+t_B = 25 \\ t_At_B = 6\times 25 = 150 \end{cases}$
t_A et t_B sont donc les solutions conjuguées de l'équation $t^2-25t+150 = 0$.
On trouve $t_A = \frac{25+\sqrt{25}}{2} = 15$ et $t_B = \frac{25-\sqrt{25}}{2} = 10$ (ou l'inverse).

1.1.2 Problèmes du troisième degré

Correction de l'exercice 1.8 (Extrémums locaux d'un polynôme du 3e degré)
Appliquons la méthode de Fermat à $f : x \mapsto x^3+6x^2+9x+2$.
Écrivons $f(x) = f(x+\lambda)$: $x^3+6x^2+9x+2 = (x+\lambda)^3+6(x+\lambda)^2+9(x+\lambda)+2$.

Transformons cette égalité : $x^3+6x^2+9x+2 = x^3+(3\lambda+6)x^2+(3\lambda^2+12\lambda+9)x+(\lambda^3+6\lambda^2+9\lambda+2)$.
En regroupant les termes : $3\lambda x^2 + (3\lambda^2 + 12\lambda)x + (\lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda) = 0$.
En simplifiant par $\lambda \neq 0$: $3x^2 + (3\lambda + 12)x + (\lambda^2 + 6\lambda + 9) = 0$.
En posant $\lambda = 0$ on obtient : $3x^2 + 12x + 9 = 0$ qui se simplifie en $x^2 + 4x + 3 = 0$.
Les solutions de cette équation sont $x = \frac{-4\pm\sqrt{4}}{2} = -2 \pm 2$, soit -1 et -3, ce qui conduit à l'affirmation (correcte) que la fonction $f : x \mapsto x^3 + 6x^2 + 9x + 2$ admet des extrémums locaux en -1 et -3.
Une simple vérification graphique permet de s'assurer de cela.



D'une manière plus générale, la méthode de Fermat permet de montrer que la fonction

$$P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$$

admet des extrémums locaux lorsque $b^2 - 3ac \geqslant 0$.
Ces extrémums ont pour abscisses les solutions de l'équation $3ax^2 + 2bx + c = 0$, soit $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$.
NB : Cette méthode qui n'utilise pas la fonction dérivée (le concept n'existait pas à l'époque de Fermat), donne un résultat satisfaisant qui repose sur un théorème qui sera étudié en classe de terminale (le théorème de Rolle). Rapidement, ce théorème stipule que si, pour deux valeurs x et x' d'un même intervalle, une fonction prend la même valeur, alors il existe au moins une valeur dans l'intervalle $[x; x']$ pour laquelle la fonction admet un extrémum.
On peut souligner l'audace de cette méthode qui commence par supposer que $\lambda \neq 0$ (pour pouvoir simplifier par λ), puis qui achève le calcul en prenant $\lambda = 0$!
Le procédé s'applique à d'autres fonctions, il suffit d'être dans les conditions d'application du théorème de Rolle : une fonction continue (la courbe peut se tracer sans lever le crayon) sur $[x; x']$ et dérivable (la courbe n'a pas de points anguleux) sur $]x; x'[$.
Essayer la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+2}{2(x-1)} - 2$ pour $x > 1$.

Correction de l'exercice 1.9 (Somme de cubes)
En notant $n \neq 0$ le plus petit entier, on doit devrait avoir $(n + 2)^3 = (n + 1)^3 + n^3$, égalité qui se développe : $n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = 2n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ et se réduit : $n^3 - 3n^2 - 9n - 7 = 0$.
Ce choix n'est pas forcément le plus judicieux car l'expression obtenue est complexe. En choisissant de noter n le nombre du milieu, l'égalité s'écrit $(n + 1)^3 = (n - 1)^3 + n^3$, égalité qui se développe en $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 2n^3 - 3n^2 + 3n - 1$ et se réduit en $n^3 - 6n^2 - 2 = 0$ (les termes en n s'éliminent).

Méthode graphique : si on trace la courbe d'équation $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 7$, on s'aperçoit qu'elle coupe l'axe des abscisses en un seul point qui a pour abscisse un nombre qui n'est pas entier (environ égal à $5,0546$). De même, la courbe d'équation $y = x^3 - 6x^2 - 2$ ne coupe l'axe des abscisses qu'en un point d'abscisse non entière (environ égal à $6,0546$). Dans les deux cas on doit conclure à l'impossibilité de trouver de tels entiers.

Méthode arithmétique : prenons l'égalité $n^3 - 6n^2 - 2 = 0$ dans lequel n est un entier. Cet entier n'est pas nul car $n = 0$ ne vérifie pas l'équation. En divisant par $n^2 \neq 0$, on trouve qu'il doit vérifier l'égalité $n = 6 - \frac{2}{n^2}$. Comme $n = 1$ ne vérifie pas l'équation, il faudrait que $n > 1$ (ou $n < -1$) or $\frac{2}{n^2} < 1 \iff n^2 > 2 \implies n \geqslant 2$ ou $n \leqslant -2$. Dès que $n > 1$ (en supposant que $n > 0$), le terme retranché à 6 est compris entre 0 et 1. Le nombre n cherché ne peut donc être entier.
On peut aussi remarquer que $n^3 - 6n^2 - 2 = 0 \iff n^2(n - 6) = 2$. On remarque que $n - 6$ doit être positif, donc $n > 6$. Mais pour qu'un produit de deux entiers dont l'un est positif soit égal à 2, il faut

qu'ils soient égaux à 1 et 2 ou le contraire ce qui ne se peut pas.
Avec l'équation $n^3-3n^2-9n-7=0 \Longleftrightarrow n(n^2-3n-9)=7$, comme 7 est premier, il ne peut s'obtenir que par les produits 1×7, $-1\times(-7)$, $-7\times(-1)$ ou 7×1.
Dans chacun de ces cas, on vérifie que cela ne se peut pas :

- Si $n=1$ alors $n^2-3n-9=1-3-9=-11\neq 7$
- Si $n=-1$ alors $n^2-3n-9=1+3-9=-5\neq -7$
- Si $n=7$ alors $n^2-3n-9=49-21-9=19\neq 1$
- Si $n=-7$ alors $n^2-3n-9=49+21-9=61\neq -1$

Correction de l'exercice 1.10 (Somme des carrés)
Si, pour tout réel $x\in\mathbb{R}$, on a $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, alors
$P(x+1)-P(x)=\big(a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d\big)-\big(ax^3+bx^2+cx+d\big)$.
Développons et réduisons le 2^e membre de cette égalité :
$P(x+1)-P(x)=(a-a)x^3+(3a+b-b)x^2+(3a+2b+c-c)x+(a+b+c+d-d)=3ax^2+(3a+2b)x+(a+b+c)$.
D'où, si ce polynôme doit être égal à x^2, par identification, on doit avoir :
$3a=1$, $3a+2b=0$ et $a+b+c=0$, soit $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{-3a}{2}=\frac{-1}{2}$ et $c=-b-a=\frac{1}{6}$.
Comme aucune contrainte n'est posée pour d, on n'a qu'à prendre $d=0$.
On obtient donc l'expression générale du polynôme : $P(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}$.

- Pour $x=1$, on a $P(2)-P(1)=1^2$
- Pour $x=2$, on a $P(3)-P(2)=2^2$
- Pour $x=3$, on a $P(4)-P(3)=3^2$
- ....
- Pour $x=n$, on a $P(n+1)-P(n)=n^2$

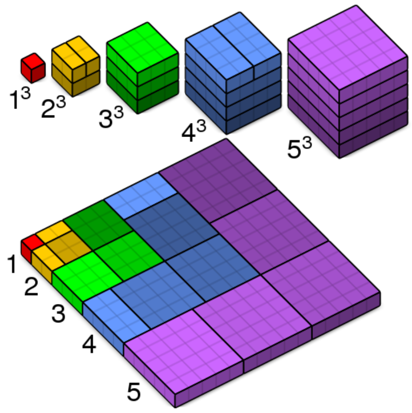
En additionnant membre à membre ces égalités, on obtient

- dans le membre de gauche $P(n+1)-P(1)$.
  Or, $P(n+1)-P(1)=\frac{(n+1)^3}{3}-\frac{(n+1)^2}{2}+\frac{(n+1)}{6}-(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6})$,
  soit $\frac{2(n+1)^3-3(n+1)^2+(n+1)}{6}-(\frac{2-3+1}{6})=\frac{(n+1)\big(2(n+1)^2-3(n+1)+1\big)}{6}=\frac{(n+1)\big(2n^2+n\big)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- dans le membre de droite $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

Conclusion : $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
NB : une autre démonstration de cette identité est donnée dans le cours, à la fin du chapitre 3.

1.1.3 Problèmes du quatrième degré

Correction de l'exercice 1.11 (Somme des cubes)
Si, pour tout réel $x\in\mathbb{R}$, on a $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, alors $P(x+1)-P(x)=\big(a(x+1)^4+b(x+1)^3+c(x+1$
$\big(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\big)$. Développons et réduisons le 2^e membre de cette égalité :
$\big(a(x+1)^4+b(x+1)^3+c(x+1)^2+d(x+1)+e\big)-\big(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\big)=(4a+b-b)x^3+(6a+3b+c-c)x^2+(4a+3b+2c+d-d)x+(a+b+c+d+e-e)=4ax^3+(6a+3b)x^2+(4a+3b+2c)x+(a+b+c+d)$.
D'où, si ce polynôme doit être égal à x^3, par identification, on doit avoir : $4a=1$, $6a+3b=0$, $64a+3b+2c=0$ et $a+b+c+d=0$, soit $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{-1}{2}$, $c=\frac{1}{4}$ et $d=0$. Comme aucune contrainte n'est posée pour e, on n'a qu'à prendre $e=0$. On obtient donc l'expression générale du polynôme :
$P(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{4}=\frac{x^2(x^2-2x+1)}{4}=\left(\frac{x(x-1)}{2}\right)^2$.



- Pour $x = 1$, on a $P(2) - P(1) = 1^3$
- Pour $x = 2$, on a $P(3) - P(2) = 2^3$
- Pour $x = 3$, on a $P(4) - P(3) = 3^3$
- ....
- Pour $x = n$, on a $P(n+1) - P(n) = n^3$

En additionnant membre à membre ces égalités, on obtient
- dans le membre de gauche $P(n+1) - P(1)$.
  Or, $P(n+1) - P(1) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, car $P(1) = 0$.
- dans le membre de droite $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

Conclusion : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
Remarque : on reconnait dans l'expression de $Q(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ la somme des n premiers entiers, ce qui prouve que la somme des n premiers cubes est égale au carré de la somme de ces n entiers. Le belle illustration graphique ci-contre est extraite de Wikipédia [1] et montre comment on peut découper les n cubes pour en faire un carré.
NB : l'ébauche d'une autre démonstration de cette identité est donnée dans le cours (exemple 50 dans le chapitre 3).

Correction de l'exercice 1.12 (Conjecturer)
On trouve
- $P(1) = 1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25 = 5^2$
- $P(2) = 2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 121 = 11^2$
- $P(3) = 3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 361 = 19^2$
- $P(4) = 4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1 = 841 = 29^2$

$\boxed{\text{Conjecture n°1}}$: les nombres $P(n) = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ sont des carrés pour tout n.
Pour prouver cette conjecture, commençons par développer : $P(n) = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1$.
Au vu de ce développement, si ce polynôme du 4ᵉ degré est un carré, ce doit être le carré de $n^2 + bn + 1$ (d'une façon évidente les coefficient a et c du trinôme doivent être égaux à 1).
Développons donc maintenant : $(n^2 + bn + 1)^2 = n^4 + 2bn^3 + (b^2 + 2)n^2 + 2bn + 1$.
Par identification, on doit avoir $2b = 6$ et $b^2 + 2 = 11$.
La 1ʳᵉ de ces égalités donne $b = 3$ et cette valeur vérifie bien la 2ᵉ égalité, d'où $P(n) = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$.

$\boxed{\text{Conjecture n°2}}$: les nombres $P(n)$ sont des carrés de nombres premiers.
Cette conjecture se vérifie pour $n = 1, 2, 3, 4$ et on peut pousser jusqu'à calculer $P(5) = 41^2$.
En effet, $5, 11, 19, 29, 41$ sont des nombres premiers.
Le calcul de $P(6) = 55^2$ cependant nous montre que cette conjecture est fausse en général car $55 = 5 \times 11$ n'est pas premier.

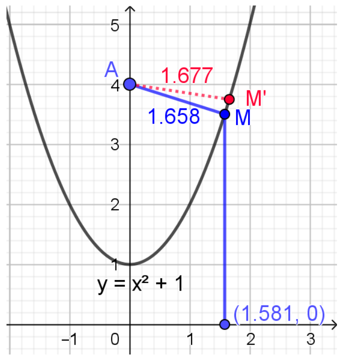
Correction de l'exercice 1.13 (Équations ou expressions bi-carrées)
1- L'équation du 4ᵉ degré $x^4 - x^2 + 1 = a$ peut être ramenée au second degré en notant $x^2 = X$. On obtient $X^2 - X + 1 = a \iff X^2 - X + 1 - a = 0$ qui a pour discriminant $\Delta = 1 - 4(1 - a)$.
- si $\Delta > 0 \iff 1 > 4(1-a) \iff a > \frac{3}{4}$, alors il y a 2 valeurs de X qui conviennent $X_1 = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $X_2 = \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2}$. La 1ʳᵉ est toujours positive et conduit aux deux solutions $x_1 = \sqrt{X_1}$ et $x_2 = -\sqrt{X_1}$. Pour la 2ᵉ, il n'y aura de solutions en x qu'à la condition que $1 - \sqrt{\Delta} \geqslant 0 \iff 1 \geqslant \sqrt{\Delta}$. En élevant cette inégalité au carré, $1 \geqslant \Delta \iff 1 \geqslant 1 - 4(1-a) \iff 0 \geqslant -4(1-a) \iff a \leqslant 1$. Lorsque $a \leqslant 1$, il y aura donc deux solutions supplémentaires $x_3 = \sqrt{X_2}$ et $x_4 = -\sqrt{X_2}$.

1. https://fr.wikipedia.org/wiki/Somme_des_n_premiers_cubes

- si $\Delta = 0 \iff a = \frac{3}{4}$, il n'y a qu'une solution en X qui est $X = \frac{1}{2}$ et donc 2 solutions en x qui sont $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.
- si $\Delta < 0 \iff a < \frac{3}{4}$, il n'y a pas de solution en X et pas davantage en x.

Conclusion : l'équation $x^4 - x^2 + 1 = a$ admet 4 solutions si $\frac{3}{4} < a \leqslant 1$, 2 si $a = \frac{3}{4}$ ou si $a > 1$ et aucune si $a < \frac{3}{4}$.

2- On peut appliquer la formule $AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2$ ou bien retrouver ce résultat : en notant N le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées. On a $N(0; x^2+1)$, $M(x; x^2+1)$ et $A(0;4)$, et en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AMN rectangle en N : $MN^2 + NA^2 = AM^2 \iff x^2 + \big(4 - (x^2+1)\big)^2 = AM^2 \iff AM^2 = x^2 + 9 - 6x^2 + x^4 = x^4 - 5x^2 + 9$.
En posant $x^2 = X$, cela s'écrit $AM^2 = X^2 - 5X + 9$. Le minimum de cette expression est obtenu pour $X = \frac{5}{2}$, soit pour $x = \pm\frac{\sqrt{10}}{2} \approx \pm 1,581139$.
Vérifions sur Geogebra : pour toutes les autres positions sur la courbe (sauf celle qui est symétrique de M par rapport à (Oy)), la distance AM (notée AM' sur la figure) est supérieure à la distance obtenue quand M a pour abscisse $\frac{\sqrt{10}}{2} \approx \pm 1,581$.



Correction de l'exercice 1.14 (Équations réciproques)

1- Avec le changement de variable $X = x + \frac{1}{x}$, ce qui implique que $X^2 = (x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2\frac{x}{x} + \frac{1}{x^2} \iff X^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$, l'équation devient $X^2 + X - 6 = 0$.
On trouve alors $X = \frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}$, soit $X = 2$ ou $X = -3$.
Si $X = 2$, l'équation en x à résoudre est $x + \frac{1}{x} = 2 \implies x^2 + 1 = 2x \iff x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0$ et elle n'a qu'une seule solution $x = 1$.
Si $X = -3$, l'équation est $x + \frac{1}{x} = -3 \implies x^2 + 3x + 1 = 0$ qui a pour solutions $x = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.
Conclusion : l'équation de départ a trois solutions $x = 1$, $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

2- L'équation $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ n'admet pas $x = 0$ comme solution car $a \neq 0$. Divisons-la par $x^2 \neq 0$ on obtient $a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x + \frac{1}{x}) + c = 0$. Avec le changement de variable $X = x + \frac{1}{x}$ qui implique que $x^2 + \frac{1}{x^2} = X^2 - 2$, on obtient $a(X^2 - 2) + bX + c = 0 \iff aX^2 + bX + c - 2a = 0$.
Si α est une solution de cette équation, il vérifie $a(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}) + b(\alpha + \frac{1}{\alpha}) + c = 0$. Mais, si on note $\beta = \frac{1}{\alpha}$, alors $\alpha = \frac{1}{\beta}$ et on obtient, en remplaçant α par $\frac{1}{\beta}$ dans l'équation $a(\frac{1}{\beta^2} + \beta^2) + b(\frac{1}{\beta} + \beta) + c = 0$, ce qui montre que β vérifie aussi la même équation. Dans l'exemple précédent, on avait trouvé juste une solution car 1 est son propre inverse. Voyons les équations suivantes.

3- L'équation $E_1 : 10x^4 - 77x^3 + 150x^2 - 77x + 10 = 0$ se transforme, avec le changement de variable $X = x + \frac{1}{x}$, en $10X^2 - 77X + 130 = 0$. Cette équation a pour solutions $X = \frac{77\pm\sqrt{729}}{20} = \frac{77\pm 27}{20}$, soit $5,2$ et $2,5$. On obtient alors les solutions en résolvant les équations :

- $x + \frac{1}{x} = 5,2 \iff x^2 - 5,2x + 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 23,04 > 0$. Il y a donc 2 solutions : $x = \frac{5,2+\sqrt{23,04}}{2} = 5$ et $x = \frac{5,2-\sqrt{23,04}}{2} = 0,2$ (l'inverse de 5).
- $x + \frac{1}{x} = 2,5 \iff x^2 - 2,5x + 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 2,25 > 0$. Il y a donc 2 autres solutions : $x = \frac{2,5+\sqrt{2,25}}{2} = 2$ et $x = \frac{2,5-\sqrt{2,25}}{2} = 0,5$ (l'inverse de 2).

Les solutions de E_1 sont au nombre de 4 ; elles appartiennent à $\{0,2; 0,5; 2; 5\}$.

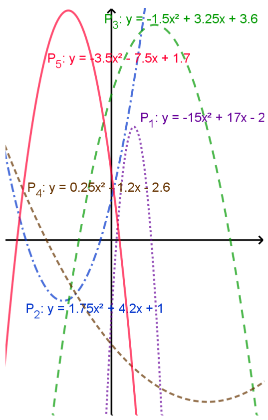
L'équation $E_2 : x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$ se transforme, avec le changement de variable $X = x + \frac{1}{x}$, en $X^2 - 2X - 1 = 0$. Cette équation a pour solutions $X = \frac{2\pm\sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. On obtient alors les solutions en résolvant les équations :

- $x + \frac{1}{x} = 1 + \sqrt{2} \iff x^2 - (1+\sqrt{2})x + 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = (1+\sqrt{2})^2 - 4 > 0$. Il y a donc 2 solutions, inverses l'une de l'autre d'après ce qui précède : $x = \frac{1+\sqrt{2}\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, soit environ $1,883204$ et $0,53101$.
- $x + \frac{1}{x} = 1 - \sqrt{2} \iff x^2 - (1-\sqrt{2})x + 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = (1-\sqrt{2})^2 - 4 < 0$. Il n'y a donc pas de solutions réelles pour cette valeur de X.

Les solutions de E_2 sont au nombre de 2 ; elles sont égales à $x = \frac{1+\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

1.1.4 Équations de paraboles

Correction de l'exercice 1.15 (Identification graphique)
Les nombres c_i, rangés dans l'ordre croissant, sont c_4, c_1, c_2, c_5 et c_3 (ces nombres sont des « ordonnées à l'origine » et se lisent directement).
Les nombres $q_i = \frac{-b_i}{a_i}$ sont les doubles des abscisses des extrémums (égaux à $\frac{-b_i}{2a_i}$, soit $\frac{q_i}{2}$), et sont donc rangés comme ceux-ci. Dans l'ordre croissant, on a q_2, q_5, q_1, q_3 et q_4.
Les nombres a_i, en valeur absolue, vont dans le même sens que l'aplatissement de la courbe : plus celle-ci est resserrée et plus le coefficient a est élevé. On a donc, dans l'ordre croissant : a_1, a_5, a_3 (pour les trois négatifs), a_4 et a_2 (pour les deux positifs).



Le signes d'un nombre b_i est celui du signe de l'abscisse de l'extrémum si $a < 0$ ($\frac{-b_i}{2a_i}$ est du signe de b_i quand $-a_i > 0$, soit quand $a_i < 0$), du signe opposé si $a > 0$. Pour les trois a_i négatifs, on a $b_1 > 0$, $b_5 < 0$, $b_3 > 0$ (le signe est ici le même que celui de l'abscisse de l'extrémum) ; pour les deux a_i positifs, on a $b_4 < 0$, $b_2 > 0$ (le signe est ici opposé au signe de l'abscisse de l'extrémum).
Pour vérification, la figure ci-dessus donne les équations de ces paraboles.

Correction de l'exercice 1.16 (Calcul d'aire)
1- Déterminons l'équation de P_1 :
On sait que :

$$\begin{cases} c_1 = 5 \text{ (ordonnée à l'origine)} \\ \frac{-b_1}{2a_1} = 4 \text{ (abscisse du minimum)} \\ 16a_1 + 4b_1 + c_1 = 1 \text{ (ordonnée du minimum)} \end{cases}$$

En remplaçant c_1 par 5 et b_1 par $-8a_1$, on obtient :

$$\begin{cases} c_1 = 5 \\ b_1 = -8a_1 \\ 16a_1 + 4(-8a_1) + 5 = 1 \iff -16a_1 = -4 \iff a_1 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Finalement, $\boxed{\text{l'équation de } P_1 \text{ est } y = \frac{x^2}{4} - 2x + 5}$
Déterminons l'équation de P_2 :
On sait que :

$$\begin{cases} 49a_2 + 7b_2 + c_2 = 0 \text{ (image de la racine 7)} \\ \frac{-b_2}{2a_2} = 3 \iff b_2 = -6a_2 \text{ (abscisse du maximum)} \\ 9a_2 + 3b_2 + c_2 = 5 \text{ (ordonnée du maximum)} \end{cases}$$

En remplaçant b_2 par $-6a_2$, on obtient :

$$\begin{cases} 49a_2 + 7(-6a_2) + c_2 = 0 \iff 7a_2 + c_2 = 0 \\ b_2 = -6a_2 \\ 9a_2 + 3(-6a_2) + c_2 = 5 \iff -9a_2 + c_2 = 5 \end{cases}$$

En soustrayant la 3e de la 1re, j'obtiens $7a_2 + c_2 - (-9a_2 + c_2) = -5 \iff 16a_2 = -5 \iff a_2 = \frac{-5}{16}$.
En reportant cette valeur, je trouve $b_2 = -6a_2 = \frac{30}{16}$ et $c_2 = -7a_2 = \frac{35}{16}$.

$\boxed{\text{L'équation de } P_2 \text{ est donc } y = \frac{-5x^2+30x+35}{16}}$

Autre méthode :
Il est plus simple, lorsqu'on connait les coordonnées de l'extrémum, d'utiliser la forme canonique $y = a(x-\alpha)^2+\beta$ où (α,β) sont les coordonnées de l'extrémum.
Pour l'équation de P_1, on peut écrire $y = a(x-4)^2+1$.
Le coefficient a est déterminé par l'autre condition : $5 = a(0-4)^2+1 = 16a+1 \iff a = \frac{5-1}{16} = \frac{1}{4}$.
De même, pour l'équation de P_2, on peut écrire $y = a(x-3)^2+5$.
Le coefficient a est déterminé par l'autre condition : $0 = a(7-3)^2+5 = 16a+5 \iff a = \frac{-5}{16}$.

2- Comme, pour être dans D, il faut être au-dessus de P_1 et au-dessous de P_2, le système S d'inéquations que doit vérifier un point de D est :

$$\begin{cases} y \geqslant \frac{x^2}{4} - 2x + 5 \\ y \leqslant \frac{-5x^2+30x+35}{16} \end{cases}$$

3- Le programme décrit dans l'énoncé est écrit ci-dessous en Python. Pour générer un nombre de $[0;7[$, il suffit de multiplier par 7 le nombre aléatoire proposé par la fonction `random` qui est disponible dans tous les langages de programmation et qui génère un nombre réel aléatoire de $[0;1[$ comme $0,48592855472012$ par exemple.

```
from random import random

N=int(input("Combien d'essais? "))
Total=0
for I in range(N):
    x=random()*7
    y=random()*5
    if x**2/4-2*x+5<=y and (-5*x**2+30*x+35)/16>=y :
        Total=Total+1
print("Fréquence des points de D= {} ".format(Total/N))
print("Estimation de l'aire de D= {} ".format(Total/N*35))
```

```
Combien d'essais? 10000                  Combien d'essais? 1000000
Fréquence des points de D= 0.3846        Fréquence des points de D= 0.386116
Estimation de l'aire de D= 13.461        Estimation de l'aire de D= 13.51406
```

Le résultat pour un échantillon de $n = 10000$ tirages me donne $aire \approx 13,461$.
Avec un échantillon 100 fois plus grand, je trouve $aire \approx 13,514$.
Cette méthode fournit une estimation aussi précise qu'on le souhaite, il suffit d'augmenter le nombre de tirages.

Correction de l'exercice 1.17 (Une formule)

1. Le sommet de la parabole d'équation $y = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$, si elle existe, a pour coordonnées $(x = \frac{-b}{2a}; y = \frac{-b^2+4ac}{4a})$ (voir le cours).
On peut donc directement affirmer que $\frac{-1}{2} = \frac{-b}{2a} \iff a = b$ et $\frac{-9}{4} = \frac{-b^2+4ac}{4a} \iff 36a = 4b^2 - 16ac$.
En remplaçant a par b dans cette dernière $36b = 4b^2 - 16bc \iff c = \frac{4b^2-36b}{16b} = \frac{b-9}{4}$.
L'équation de la parabole cherchée est donc de la forme $y = bx^2+bx+\frac{b-9}{4}$.
Comme la parabole doit passer par le point de coordonnées $(-1;-2)$, le coefficient b vérifie
$b\times(-1)^2 + b\times(-1) + \frac{b-9}{4} = -2 \iff \frac{b-9}{4} = -2 \iff b = -8+9 = 1$.
Finalement, la parabole existe et a pour équation $\boxed{y = x^2+x-2}$

2. Généralisons le raisonnement précédent :
Le sommet de la parabole d'équation $y = Ax^2+Bx+C$ avec $A \neq 0$, si elle existe, a pour coordonnées $(x = \frac{-B}{2A}; y = \frac{-B^2+4AC}{4A})$ (j'ai changé les lettres pour éviter les confusions).
On peut donc affirmer que $a = \frac{-B}{2A} \iff B = -2aA$ et $b = \frac{-B^2+4AC}{4A} \iff 4Ab = -B^2+4AC$.
En remplaçant B par $-2aA$ dans cette dernière $4Ab = -(-2aA)^2+4AC \iff 4Ab = -4a^2A^2+4AC$.

Comme on doit avoir $A \neq 0$, on simplifie par $4A$, il vient $b = -a^2A + C \iff C = b + a^2A$.
L'équation de la parabole cherchée est donc de la forme :
$y = Ax^2 - 2aAx + b + a^2A = A(x^2 - 2ax + a^2) + b = A(x-a)^2 + b$ (c'est la forme canonique).
Comme la parabole doit passer par le point de coordonnées $(c; d)$, le coefficient A vérifie :
$d = A(c-a)^2 + b \iff A = \frac{d-b}{(c-a)^2}$.
Finalement, la parabole existe et a pour équation $\boxed{y = \frac{d-b}{(c-a)^2}(x-a)^2 + b}$
La forme développée de l'expression est moins sympathique : $y = \frac{d-b}{(c-a)^2}x^2 - 2a\frac{d-b}{(c-a)^2}x + b + a^2\frac{d-b}{(c-a)^2}$

Vérifions l'expression du 1 avec $a = \frac{-1}{2}$, $b = \frac{-9}{4}$, $c = -1$ et $d = -2$.
La formule donne $y = \frac{-2-\frac{-9}{4}}{(-1-\frac{-1}{2})^2}(x - \frac{-1}{2})^2 + \frac{-9}{4} \iff y = \frac{\frac{-8+9}{4}}{(\frac{-2+1}{2})^2}(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$
Finalement on obtient $y = \frac{\frac{1}{4}}{(\frac{-1}{2})^2}(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} \iff y = (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = x^2 + x - 2$. Ce qui est correct.

1.1.5 Identités remarquables

Correction de l'exercice 1.18 (Différences ou sommes de puissances)
1- Écrivons l'identité pour $n = 3$: $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$ ce qui s'écrit aussi $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
2- En remplaçant b par $-b$ dans l'identité précédente, on obtient $a^3 - (-b)^3 = (a - (-b))(a^2 + a(-b) + (-b)^2)$, soit $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
3- Pour que $a^4 + b^4$ s'écrive de la façon indiquée, soit $(a^2 + abc + b^2)(a^2 + abd + b^2)$, il doit y avoir coïncidence entre les termes du développement. Or $(a^2 + abc + b^2)(a^2 + abd + b^2) = a^4 + (c+d)a^3b + (cd+2)a^2b^2 + (c+d)ab^3 + b^4$. On doit donc avoir $c + d = 0$ et $cd + 2 = 0$, ce qui revient à $c = -d$ et $(-d)d + 2 = 0 \iff d^2 = 2$. On en déduit que $a^4 + b^4 = (a^2 + \sqrt{2}ab + b^2)(a^2 - \sqrt{2}ab + b^2)$.
On aurait pu voir dans cette identité un cas particulier de celle de Sophie Germain (voir plus loin) :

$$a^4 + b^4 = \left(a^2 + b^2\right)^2 - 2a^2b^2 = \left(a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab\right)\left(a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab\right)$$

4- Factorisons $P(x) = 4x^4 + 1 = (\sqrt{2}x)^4 + 1$ en utilisant cette identité dans laquelle $a = \sqrt{2}x$ et $b = 1$:
$(\sqrt{2}x)^4 + 1^4 = \left((\sqrt{2}x)^2 + 1^2 - \sqrt{2}(\sqrt{2}x)\right)\left((\sqrt{2}x)^2 + 1^2 + \sqrt{2}(\sqrt{2}x)\right) = (2x^2 + 1 - 2x)(2x^2 + 1 + 2x)$.
Les deux facteurs du 2^{e} degré ont des discriminant négatifs, la factorisation est donc ultime : $P(x) = 4x^4 + 1 = (2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1)$.
Factorisons $Q(x) = (x - \sqrt{2})^4 + (x + \sqrt{2})^4$en utilisant cette identité dans laquelle $a = x - \sqrt{2}$ et $b = x + \sqrt{2}$:
$Q(x) = \left((x-\sqrt{2})^2 + (x+\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\right)\left((x-\sqrt{2})^2 + (x+\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\right) = \left(2x^2 + 4 - \sqrt{2}(x^2-2)\right)\left(2x^2 + 4 + \sqrt{2}(x^2-2)\right) = \left((2-\sqrt{2})x^2 + 4 + 2\sqrt{2}\right)\left((2+\sqrt{2})x^2 + 4 - 2\sqrt{2}\right)$.
Les deux facteurs ne se factorisent pas car ils sont de la forme ax^2+b avec a et b positifs. La factorisation est donc ultime : $Q(x) = (x-\sqrt{2})^4 + (x+\sqrt{2})^4 = \left((2-\sqrt{2})x^2 + 4 + 2\sqrt{2}\right)\left((2+\sqrt{2})x^2 + 4 - 2\sqrt{2}\right)$.

1.1.6 Divisions euclidiennes

Correction de l'exercice 1.19 (Factorisations diverses)
1- Comme $p(2) = 2^3 + 2^2 - 12 = 8 + 4 - 12 = 0$, 2 est une racine évidente de p. Pour déterminer la factorisation $p(x) = (x-2) \times q(x)$, on pourrait procéder par identification. Mais ici on demande d'effectuer une division euclidienne de $x^3 + x^2 - 12$ par $x - 2$ en posant la division comme avec des

entiers.

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & & -12 & x \quad -2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +2x^2 & & & x^2 \; +3x \; +6 \\ \cline{1-2}
 & 3x^2 & & & \\
 & -3x^2 & +6x & & \\ \cline{2-3}
 & & 6x & -12 & \\
 & & -6x & +12 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Le reste étant nul, on en déduit la factorisation $p(x) = (x^2 + 3x + 6)(x - 2)$.
Comme le trinôme $q(x) = x^2 + 3x + 6$ a un discriminant $\Delta = 9 - 24 = -15 < 0$, il ne se factorise pas.
La factorisation trouvée est donc la factorisation ultime.
2- Divisons $2x^6 - 11x^5 + 18x^4 - 14x^3 + 10x^2 - 9x + 6$ par $2x^2 - 3x + 2$.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
2x^6 & -11x^5 & +18x^4 & -14x^3 & +10x^2 & -9x & +6 & 2x^2 \quad -3x \quad +2 \\ \cline{8-8}
-2x^6 & +3x^5 & -2x^4 & & & & & x^4 \; -4x^3 \; +2x^2 \; +3 \\ \cline{1-3}
 & -8x^5 & +16x^4 & -14x^3 & & & & \\
 & 8x^5 & -12x^4 & +8x^3 & & & & \\ \cline{2-4}
 & & 4x^4 & -6x^3 & +10x^2 & & & \\
 & & -4x^4 & 6x^3 & -4x^2 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & & 6x^2 & -9x & +6 & \\
 & & & & -6x^2 & +9x & -6 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Comme le reste est nul, on en déduit la factorisation $P(x) = (2x^2 - 3x + 2)(x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3)$.
3- Divisons $x^5 + 6x^2 - 5x + 5$ par $x^2 - x + 1$.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & & +6x^2 & -5x & +5 & x^2 \quad -x \; +1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & +x^4 & -x^3 & & & & x^3 \; +x^2 \; +5 \\ \cline{1-3}
 & x^4 & -x^3 & +6x^2 & & & \\
 & -x^4 & +x^3 & -x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & & 5x^2 & -5x & +5 & \\
 & & & -5x^2 & +5x & -5 & \\ \cline{4-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Comme le reste est nul, on en déduit la factorisation $f(x) = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 + 5)$.
4- Divisons $x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 3x - 1$ par $x - 1$

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^6 & -3x^5 & +3x^4 & & -3x^2 & +3x & -1 & x \quad -1 \\ \cline{8-8}
-x^6 & +x^5 & & & & & & x^5 \; -2x^4 \; +x^3 \; +x^2 \; -2x \; +1 \\ \cline{1-2}
 & -2x^5 & +3x^4 & & & & & \\
 & 2x^5 & -2x^4 & & & & & \\ \cline{2-3}
 & & x^4 & & & & & \\
 & & -x^4 & +x^3 & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & x^3 & -3x^2 & & & \\
 & & & -x^3 & +x^2 & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & -2x^2 & +3x & & \\
 & & & & +2x^2 & -2x & & \\ \cline{5-6}
 & & & & & x & -1 & \\
 & & & & & -x & +1 & \\ \cline{6-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Comme le reste est nul, on en déduit la factorisation $h(x) = (x-1)(x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1)$.
Pour diviser $h(x)$ par $(x-1)^2$, on va simplement diviser $(x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1)$ par $x - 1$.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & -2x^4 & +x^3 & +x^2 & -2x & +1 & x \quad -1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & +x^4 & & & & & x^4 \; -x^3 \; +x \; -1 \\ \cline{1-2}
 & -x^4 & +x^3 & & & & \\
 & x^4 & -x^3 & & & & \\ \cline{2-3}
 & & & x^2 & -2x & & \\
 & & & -x^2 & +x & & \\ \cline{4-5}
 & & & & -x & +1 & \\
 & & & & x & -1 & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Comme le reste est nul, on en déduit la factorisation $h(x) = (x-1)^2(x^4 - x^3 + x - 1)$.
Pour diviser $h(x)$ par $(x-1)^3$, on va simplement diviser $(x^4 - x^3 + x - 1)$ par $x - 1$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^4 & -x^3 & +x & -1 & x \; -1 \\ \cline{5-5}
-x^4 & +x^3 & & & x^3 \; +1 \\ \cline{1-2}
 & & x & -1 & \\
 & & -x & +1 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Comme le reste est nul, on en déduit la factorisation $h(x) = (x-1)^3(x^3 + 1)$.
Pour la factorisation ultime de $h(x)$ il suffit d'utiliser l'identité $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$. En remplaçant a et b par x et 1, cela donne $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$. Comme le trinôme $x^2 - x + 1$ a un discriminant $\Delta = -3 < 0$, il ne se factorise pas. La factorisation ultime cherchée est donc $h(x) = (x-1)^3(x+1)(x^2 - x + 1)$.

Correction de l'exercice 1.20 (Factorisation par $(x-a)$)
1- Effectuons la division euclidienne de $3x^3 - 4x^2 + 6x - 5$ par $x - 1$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -4x^2 & +6x & -5 & x \; -1 \\ \cline{5-5}
-3x^3 & +3x^2 & & & 3x^2 \; -x \; +5 \\ \cline{1-2}
 & -x^2 & +6x & & \\
 & x^2 & -x & & \\ \cline{2-3}
 & & 5x & -5 & \\
 & & -5x & +5 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Le reste étant nul, on en déduit la factorisation $P(x) = (x-1)(3x^2 - x + 5)$. On pouvait prévoir que la factorisation allait aboutir car 1 est une racine évidente de P (car $3 - 4 + 6 - 5 = 0$).
2- Effectuons la division euclidienne de $3x^3 - 4x^2 + 6x - 5$ par $x - 2$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -4x^2 & +6x & -5 & x \quad -2 \\ \cline{5-5}
-3x^3 & +6x^2 & & & 3x^2 \; +2x \; +10 \\ \cline{1-2}
 & 2x^2 & +6x & & \\
 & -2x^2 & +4x & & \\ \cline{2-3}
 & & 10x & -5 & \\
 & & -10x & +20 & \\ \cline{3-4}
 & & & 15 &
\end{array}$$

Le reste n'est pas nul, on ne peut pas en déduit une factorisation de P, mais on peut écrire $P(x) = (x-2)(3x^2+2x+10)+15$. On peut remarquer que le reste obtenu est égal à $P(2)$ car, en utilisant la forme développée, $P(2) = 3\times 8 - 4\times 4 + 6\times 2 - 5 = 24-16+12-5 = 15$. NB : c'est encore plus évident en utilisant la forme $(x-2)\times Q(x)+R(x)$ car, quand $x=2$, $(x-2)\times Q(x) = 0$ alors que $R(x) = 15$.
3- D'une façon générale, la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)$ s'écrit $P(x) = (x-a)\times Q(x)+R(x)$ avec $deg(R) < deg(x-a)$, c'est-à-dire $deg(R) < 1$. On en déduit que $R(x)$ est constant (un monôme de degré 0), notons le provisoirement k. Comme on a $P(x) = (x-a)\times Q(x)+k$ pour tout x, pour $x=a$ on obtient $P(a) = (a-a)\times Q(a)+k = 0+k = k$. On a donc bien $P(x) = (x-a)\times Q(x)+P(a)$, égalité qui s'écrit aussi $P(x)-P(a) = (x-a)\times Q(x)$.
4- On a vu que $P(x)-P(2) = (x-2)\times Q(x)$. On en déduit que $P(x) = P(2) \iff (x-2)\times Q(x) = 0$. Les racines de Q répondent à la question posée. Dans le cas de notre polynôme P, on a $Q(x) = 3x^2+2x+10$. Ce polynôme n'a pas de racines car le discriminant $\Delta = 4-120 = -116$ est négatif. Il n'y a pas d'autres valeurs de x telles que $P(x) = P(2)$.
5- Effectuons la division euclidienne de $f(x) = x^3-x^2-3x+5$ par $x-2$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -x^2 & -3x & 5 & x \quad -2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +2x^2 & & & x^2 \quad +x \quad -1 \\ \cline{1-2}
 & x^2 & -3x & & \\
 & -x^2 & +2x & & \\ \cline{2-3}
 & & -x & +5 & \\
 & & x & -2 & \\ \cline{3-4}
 & & & 3 &
\end{array}
$$

On peut écrire $f(x) = (x-2)(x^2+x-1)+3$ où $f(2) = 3$. On en déduit que $f(x) = f(2) \iff (x-2)(x^2+x-1) = 0$. Le polynôme x^2+x-1 a 2 racines car le discriminant $\Delta = 1+4 = 5$ est positif. Il y a donc 2 autres valeurs de x telles que $f(x) = f(2)$, ce sont $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. La racine positive cherchée est $x_1 \approx 0{,}618$, l'autre est l'opposé du « nombre d'or » $\varphi = -x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$.

1.1.7 Factorisations ultimes

Correction de l'exercice 1.21 (Extrait du cours)
Une remarque au préalable : $x^4+4 = x^4+4x^2+4-4x^2 = (x^2+2)^2-4x^2 = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$ n'est que le cas particulier $y=1$ de l'identité de Sophie Germain :

$$x^4+4y^4 = (x^2+2y^2)^2-4x^2y^2 = (x^2+2y^2-2xy)(x^2+2y^2+2xy) = ((x+y)^2+y^2)((x-y)^2+y^2)$$

Pour la factorisation ultime de $P(x) = x^7-3x^6+3x^5-x^4+x^3-3x^2+3x-1$, on commence par remarquer que $x=1$ est une racine évidente (la somme des coefficients vaut 1). On en déduit que $P(x) = (x-1)(x^6+ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+1)$ où a, b, c, d et e sont des coefficients entiers à déterminer (j'ai immédiatement, pour simplifier, déterminé les coefficients des monômes de degrés 0 et 6). Résolvons un système pour identifier les coefficients (on aurait pu effectuer une division euclidienne) :

$$\begin{cases} a-1=-3 \\ b-a=3 \\ c-b=-1 \\ d-c=1 \\ e-d=-3 \\ 1-e=3 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-2 \\ b=a+3=1 \\ c=b-1=0 \\ d=c+1=1 \\ e=d-3=-2 \end{cases}$$

La dernière égalité permet de vérifier les résultats : $e = 1-3 = -2$. On obtient la factorisation $P(x) = (x-1)(x^6-2x^5+x^4+x^2-2x+1)$. Le second facteur admet encore 1 comme racine, d'où

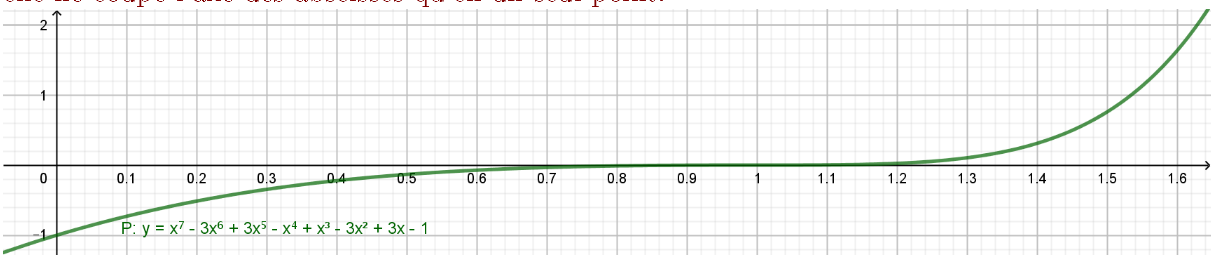
$P(x) = (x-1)^2(x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 1)$ où a, b, c et d sont des coefficients entiers à déterminer. Pour identifier ces nouveaux coefficients, résolvons le nouveau système :

$$\begin{cases} a-1=-2 \\ b-a=1 \\ c-b=0 \\ d-c=1 \\ -1-d=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-1 \\ b=a+1=0 \\ c=b=0 \\ d=c+1=1 \end{cases}$$

La dernière égalité permet de vérifier les résultats : $d = 2 - 1 = 1$. On obtient la factorisation $P(x) = (x-1)^2(x^5 - x^4 + x - 1)$. Le second facteur admet encore 1 comme racine mais la factorisation de ce facteur est immédiate : $(x^5 - x^4 + x - 1) = (x^4(x-1) + x - 1) = (x-1)(x^4+1)$.
Cette fois, on se trouve avec le facteur (x^4+1) qui n'a pas 1 comme racine : $P(x) = (x-1)^3(x^4+1)$. Utilisons l'astuce de l'identité de Sophie Germain : $(x^4+1) = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$.
Les coefficients de cette factorisation ultime ne sont donc pas tous entiers, mais on obtient finalement

$$P(x) = (x-1)^3(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

Il y a un facteur du premier degré et 2 facteurs du second degré non factorisables ($\Delta = -2 < 0$). L'équation du 7^e degré $P(x) = 0$ a donc une seule solution réelle de multiplicité 3 : 1 (et 4 solutions complexes) ; le polynôme P n'admet qu'une seule racine réelle. On peut vérifier cela en traçant la courbe de la fonction $x \mapsto P(x)$: même si ce n'est pas évident du fait de l'écrasement de la courbe, elle ne coupe l'axe des abscisses qu'en un seul point.



Correction de l'exercice 1.22 (Recherche des racines évidentes)
Le programme détermine les diviseurs de la valeur absolue du coefficient constant et les place, avec leurs opposés, dans une liste. Ensuite, le polynôme est évalué pour chacune des valeurs de la liste : lorsque l'image calculée est nulle — cela signifie que la valeur est une racine — les coefficients du polynômes sont recalculés. En effet, si α est une racine de P alors $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$ et les coefficients de Q se calculent facilement en identifiant les coefficients du développement de $(x-\alpha)Q(x)$ avec ceux de P. Cela explique la fonction `recalcule(x,a)` qui réalise cela.
Montrons ce point pour le degré 3, la formule obtenue étant valable pour un degré n quelconque.
Si $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ et si α est une racine de P, alors $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$ avec $Q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ (le degré de Q est inférieur de 1 au degré de P). Développons $(x-\alpha)Q(x)$:
$x(b_2x^2 + b_1x + b_0) - \alpha(b_2x^2 + b_1x + b_0) = b_2x^3 + (b_1 - \alpha b_2)x^2 + (b_0 - \alpha b_1)x - \alpha b_0$
L'identification des termes de même degré conduit au système suivant :

$$\begin{cases} b_2 = a_3 \\ b_1 - \alpha b_2 = a_2 \\ b_0 - \alpha b_1 = a_1 \\ -\alpha b_0 = a_0 \end{cases} \iff \begin{cases} b_2 = a_3 = \frac{b_1 - a_2}{\alpha} \\ b_1 = \frac{b_0 - a_1}{\alpha} \\ b_0 = \frac{-a_0}{\alpha} \end{cases}$$

En partant de $b_0 = \frac{-a_0}{\alpha}$ (division qui aboutit toujours sur un entier puisque α est un diviseur de a_0), on calcule ainsi facilement b_1, puis b_2. La fonction `polynome()`, quant à elle, évalue le polynôme

pour une valeur de la variable. Le plus compliqué est, finalement, de faire afficher correctement le polynôme résiduel, car les conventions d'écritures imposent d'afficher, par exemple, `(-2x+1)` ou `x-1`, et non `(-2x^1+1)`ou `1x+-1`... Ceci est sans doute un détail et peut très bien ne pas être envisagé (on peut se contenter d'un affichage moins formaté comme $[1,-2][1,2][3,1]$ à la place du plus conventionnel $(x-2)(x+2)(3x+1)$).
Voilà donc, page suivante, une proposition de programme qui fonctionne mais qui peut ne pas répondre tout-à-fait à toutes les situations possibles. Je ne l'ai testé que sur les exemples proposés. La colonne de droite du tableau qui suit présente les factorisation qu'il trouve.

P_1	$3x^3+x^2-12x-4$	$(x-2)(x+2)(3x+1)$	ultime
P_2	$6x^3+3x^2-27x+12$	$6x^3+3x^2-27x+12$	
P_3	$-5x^3+45x^2-130x+120$	$-5(x-2)(x-3)(x-4)$	ultime
P_4	$x^4-6x^3-7x^2+48x-36$	$(x-1)(x-2)(x+3)(x-6)$	ultime
P_5	$2x^4-13x^3-7x^2+x-7$	$(x+1)(x-7)(2x^2-x+1)$	ultime
P_6	$x^4-4x^3-6x^2+28x-16$	$(x-2)(x-4)(x^2+2x-2)$	
P_7	$x^4-7x^3+13x^2+3x-18$	$(x+1)(x-2)(x-3)(x-3)$	ultime
P_8	$x^5+4x^4+7x^3+7x^2+4x+1$	$(x+1)(x+1)(x+1)(x^2+x+1)$	ultime
P_9	$x^6+3x^5+2x^4-x^2-3x-2$	$(x-1)(x+1)(x+1)(x+2)(x^2+1)$	ultime
P_{10}	$x^7-3x^6+3x^5-x^4+x^3-3x^2+3x-1$	$(x-1)(x-1)(x-1)(x^4+1)$	

Commentaires : Le programme affiche les bons résultats, sauf quand il ne trouve pas de racines évidentes auquel cas il ne le signale pas (ce qui peut être un défaut). Le polynôme P_2 par exemple se factorise en $3(2x-1)(x^2+x-4)$ mais il ne trouve pas la racine $\frac{1}{2}$. Un autre défaut qui pourrait facilement être corrigé : lorsqu'une racine est multiple, il n'affiche pas la multiplicité. Par exemple pour P_{10} il devrait afficher $(x-1)^3(x^4+1)$ puisque 1 y est une racine triple (de même pour les polynômes P_7, P_8 et P_9 qui ont chacun une racine multiple). Signalons enfin que certains logiciels savent factoriser. Geogebra, par exemple, a un volet « calcul formel » qui effectue cela très bien : quand on tape `Factoriser( 6x^3+3x^2-27x+12)`, on obtient le résultat `3(2x-1)(x^2+x-4)` sans problème.

```
def polynome(x,a):
    valeur=0
    for e in range(len(a)): valeur+=a[e]*x**e
    return valeur

def recalcule(x,a):
    b=[-a[0]/x]
    for i in range(1,len(a)-1): b.append((b[i-1]-a[i])/x)
    return b

def ecriture(a):
    pol="("
    for e in range(len(a)-1,-1,-1):
        if                          a[e]!=0:
            if                          e==0:
                if   len(a)-1==0 or a[e]<0:pol+=str(int(a[e]))
                elif                a[e]>0:pol+="+"+str(int(a[e]))
            elif                        e==1:
                if             abs(a[e])==1:
                    if              a[e]==1:pol+="+x"
                    else                   :pol+="-x"
                elif len(a)-1==1 or a[e]<0:pol+=str(int(a[e]))+"x"
                else                       :pol+="+"+str(int(a[e]))+"x"
            else                           :
                if             abs(a[e])==1:
                    if              a[e]==1:pol+="x^"+str(e)
                    else                   :pol+="-x^"+str(e)
                elif e==len(a)-1 or a[e]<0:pol+=str(int(a[e]))+"x^"+str(e)
                else                       :pol+="+"+str(int(a[e]))+"x^"+str(e)
    return pol+")"
```

```
n=int(input("quel est le degré du polynôme "))
factorisation,ultime="",False
coeff,liste_diviseurs=[],[]
for i in range(n+1):
    coeff.append(int(input("coefficient de x^{} (0 si absent)".format(i))))
for i in range(1,abs(coeff[0])+1):
    if abs(coeff[0])%i==0:
        liste_diviseurs.append(i)
        liste_diviseurs.append(-i)
for i in liste_diviseurs:
    while polynome(i,coeff)==0:
        coeff=recalcule(i,coeff)
        if i>0:factorisation+="(x-{})".format(i)
        else  :factorisation+="(x+{})".format(-i)
if len(coeff)==1:
    if   coeff[0]==-1:factorisation="-"+factorisation
    elif coeff[0]!=1:factorisation=str(int(coeff[0]))+factorisation
else          :factorisation+=ecriture(coeff)
print("La factorisation trouvée du polynôme :{} ".format(factorisation))
if len(coeff)==3:
    delta=coeff[1]**2-4*coeff[2]*coeff[0]
    if delta<0: ultime=True
elif len(coeff)<=2: ultime=True
if ultime==True: print("La factorisation trouvée est ultime ")
```

1.1.8 le coin du chercheur

Correction de l'exercice 1.23

Une remarque préliminaire : d'une façon évidente, les équations $x^2 - 3x + 1 = 0$ et $-x^2 + 3x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions. Pour éviter de compter deux fois les polynômes qui ont les mêmes racines, je peux me limiter aux équations dont le coefficient a est positif. Mais comme $x^2 - 3x + 1 = 0$ et $2x^2 - 6x + 2 = 0$ ont aussi les mêmes solutions, je peux encore limiter mon étude aux trinômes dont les coefficients sont premiers entre eux (n'ont pas de diviseur en commun autre que 1). De cette façon, j'examine une liste plus restreinte dont chaque élément a des racines particulières.
Avant de programmer cette recherche, je me reporte à la partie du cours « étude du signe des racines » qui donne un algorithme pour détecter les racines de même signe. Pour détecter les racines rationnelles,

j'utiliserai juste un test qui compare $\sqrt{\Delta}$ et sa partie entière : s'il y a égalité, j'en déduirai que les racines sont rationnelles. Je tiens donc là l'essentiel du contenu mathématique, il ne me reste plus qu'à ajouter le traitement informatique : je vais tester toutes les valeurs possibles et construire des listes contenant les coefficients des trinômes appartenant aux 7 catégories à différencier :

- $F0$: trinômes sans racine
- $F1i$: trinômes avec racines irrationnelles et de signes contraires
- $F1r$: trinômes avec racines rationnelles et de signes contraires
- $F2ip$: trinômes avec racines irrationnelles et de signes positifs
- $F2rp$: trinômes avec racines rationnelles et de signes positifs
- $F2in$: trinômes avec racines irrationnelles et de signes négatifs
- $F2rn$: trinômes avec racines rationnelles et de signes négatifs

Les dénombrements de ces différentes catégories seront simplement affichés dans la console pour une valeur de n donnée. Je reprends ensuite ces nombres dans une feuille de tableur (Calc d'OO) pour les stocker, effectuer les traitements statistiques éventuels et aussi pour présenter les résultats de cette étude. Voici donc le programme utilisé : il est écrit en Python pour un ordinateur (sur une calculatrice Numworks le principe resterait le même).

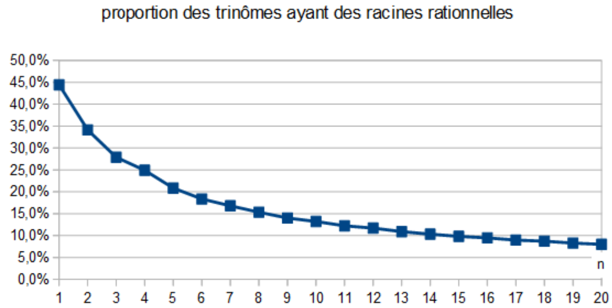
```
from math import sqrt
def diviseur(a,b,c):
      for i in range(2,n+1):
            if a%i==0 and b%i==0 and c%i==0:return i
      return 1

n=int(input("n="))
La=[]#liste des valeurs possibles pour a (a>0)
Lbc=[0]#liste des valeurs possibles pour b et c
F0,F1i,F1r,F2ip,F2rp,F2in,F2rn=[],[],[],[],[],[],[]
for i in range(n):
      La.append(i+1)
      Lbc.append(i+1)
      Lbc.append(-(i+1))
for a in La:
      for b in Lbc:
            for c in Lbc:
                  if diviseur(a,b,c)==1:
                        d=b**2-4*a*c
                        if d<0:F0.append((a,b,c)) #pas de racine
                        else:
                              rat=False
                              if int(sqrt(d))==sqrt(d):rat=True #racines rationnelles
                              if a*c<0: #racines de signes contraires
                                    if rat==True:F1r.append((a,b,c))
                                    else:F1i.append((a,b,c))
                              else:#racines de même signe
                                    if a*b<0:#racines positives
                                          if rat==True:F2rp.append((a,b,c))
                                          else:F2ip.append((a,b,c))
                                    else:#racines négatives
                                          if rat==True:F2rn.append((a,b,c))
                                          else:F2in.append((a,b,c))
print("résultats:",len(F0),len(F1i),len(F1r),len(F2ip),len(F2rp),len(F2in),len(F2rn))
```

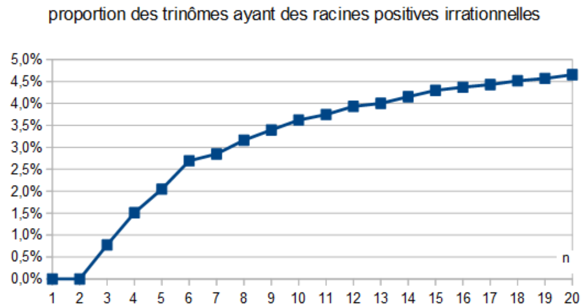
Passons maintenant aux résultats.

➩ La proportion $F(1,n)$ des polynômes de E_n qui n'ont pas de racine semble se stabiliser rapidement sur une valeur de $37,7\%$, soit plus d'un tiers. Les premiers de ces trinômes sans racine sont : x^2+1, x^2+x+1 et x^2-x+1 (pour les 3 de E_1), x^2+2, x^2+x+2, x^2-x+2, x^2+2x+2, x^2-2x+2, $2x^2+1$, $2x^2+x+1$, $2x^2+x+2$, $2x^2-x+1$, $2x^2-x+2$, $2x^2+2x+1$ et $2x^2-2x+1$ (pour les 12 de E_2 qui ne sont pas dans E_1), etc.

➩ La proportion $F(2,n)$ des polynômes de E_n qui ont des racines rationnelles décroit régulièrement (courbe de gauche) de 45% environ pour $n=1$ à 8% environ pour $n=20$. Comme les trinômes n'ayant pas de racine sont en proportion stable, cette baisse est compensée par l'augmentation des trinômes ayant des racines irrationnelles, ce qui n'est pas étonnant compte tenu de la prépondérance des nombres irrationnels. Un examen plus détaillé de la répartition montre que les trinômes ayant des racines rationnelles se répartissent à peu près équitablement entre ceux qui ont des racines de mêmes signes et ceux qui ont des racines de signes contraires. Les premiers de ces trinômes ayant des racines rationnelles sont : x^2-1, x^2-x, x^2+x et x^2 (pour les 4 de E_1), x^2+x-2, x^2-x-2, $2x^2+x-1$, $2x^2+x-1$, x^2-2x, x^2-2x+1, $2x^2-x$, x^2+2x, x^2+2x+1, $2x^2+x$ (pour les 10 de E_2 qui ne sont pas dans E_1), etc.

➩ La proportion $F(3,n)$ des polynômes de E_n qui ont des racines irrationnelles positives croit régulièrement (courbe de droite) de 0 à près de 5% pour $n=20$. Il faut noter l'égalité parfaite entre les trinômes ayant des racines irrationnelles positives et négatives. Ceci est du au fait que les numérateurs des racines $-b+\sqrt{\Delta}$ et $-b-\sqrt{\Delta}$ ne font que changer de signe quand on remplace b par $-b$: $-(-b)+\sqrt{\Delta}=-(b-\sqrt{\Delta})$ et $-(-b)-\sqrt{\Delta}=-(b+\sqrt{\Delta})$. Le même phénomène a lieu avec les racines rationnelles, excepté pour les équations de type $x^n=0$ qui ne sont présente qu'en un exemplaire que mon programme a placé dans les racines négatives, ce qui n'est pas fondamentalement gênant. Les premiers de ces trinômes ayant des racines positives et irrationnelles sont : x^2-3x+1 (pour le premier qui apparait, dans E_3), x^2-4x+1, x^2-4x+2, $2x^2-4x+1$ (pour les 3 de E_4 qui ne sont pas dans E_3), x^2-5x+1, x^2-5x+2, x^2-5x+3, x^2-5x+5, $2x^2-4x+1$, $2x^2-5x+1$, $3x^2-5x+1$, $5x^2-5x+1$ (pour les 8 de E_5 qui ne sont pas dans E_4), etc.





➩ C'est à partir de $n=10$ que, parmi les équations de E_n ayant 2 racines positives, il y a davantage de racines irrationnelles que rationnelles. Pour $n=9$, en effet, il y a 94 trinomes ayant des racines positives irrationnelles contre 101 rationnelles alors que pour $n=10$, en effet, il y a 131 trinomes ayant des racines positives irrationnelles contre 120 rationnelles.

Les résultats détaillés jusqu'à $n=20$:

n	pas de solution	deux de signes contraires		deux de même signe				total	rationnelles	irrationnelles
				positives		négatives				
		irrationnelles	rationnelles	irrationnelles	rationnelles	irrationnelles	rationnelles			
1	3	2	1	0	1	0	2	9	4	2
2	15	12	5	0	4	0	5	41	14	12
3	49	42	15	1	10	1	11	129	36	44
4	99	92	29	4	18	4	19	265	66	100
5	203	200	49	11	31	11	32	537	112	222
6	309	314	71	22	39	22	40	817	150	358
7	519	542	107	39	61	39	62	1369	230	620
8	731	780	141	61	77	61	78	1929	296	902
9	1049	1144	185	94	101	94	102	2769	388	1332
10	1369	1508	237	131	120	131	121	3617	478	1770
11	1899	2128	297	188	158	188	159	5017	614	2504
12	2323	2626	359	242	180	242	181	6153	720	3110
13	3071	3514	431	325	227	325	228	8121	886	4164
14	3713	4282	503	408	255	408	256	9825	1014	5098
15	4565	5304	601	520	293	520	294	12097	1188	6344
16	5421	6330	695	628	333	628	334	14369	1362	7586
17	6701	7894	795	787	398	787	399	17761	1592	9468
18	7663	9058	903	918	434	918	435	20329	1772	10894
19	9265	11030	1019	1123	508	1123	509	24577	2036	13276
20	10549	12608	1137	1303	550	1303	551	28001	2238	15214
Total	59516	69410	7580	6805	3798	6805	3818	157732	15196	83020
Fréquence	38%	44%	5%	4%	2%	4%	2%	100%	10%	53%
		49%		13%						
	F(1,n)			F(3,n)					F(2,n)	