1 Exercices sur les polynômes

Table des matières

1.1 Énoncés

1.1.1 Problèmes du second degré

Exercice 1.1 (Jeu)
n joueurs participent à un jeu. La règle prévoit que le joueur gagnant reçoit n€ de la part de chacun des autres joueurs. Au cours d'une partie, le gagnant a reçu 20€. Combien y a-t-il de joueurs ?

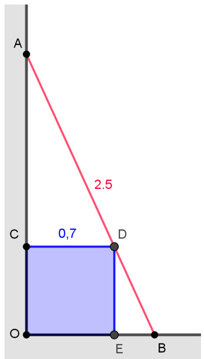
Exercice 1.2 (Poids de l'astronaute)
Le poids diminue avec l'altitude. Ainsi, si la masse d'un astronaute est $70kg$, à l'altitude x (en km) il a un poids apparent de $P = 70 \times \left(\frac{6400}{6400+x}\right)^2$.
Á quelle altitude le poids de l'astronaute sera-t-il inférieur à 5 ?

Exercice 1.3 (Rectangle dans rectangle 1)
Je viens d'acheter un terrain rectangulaire de $750m^2$ et envisage de faire construire un mur de $10cm$ d'épaisseur en bordure. Tous calculs fait, je réalise que ce mur va me faire perdre $11m^2$ de surface. Á l'aide de ces informations, retrouver les dimensions du terrain.

Exercice 1.4 (Rectangle dans rectangle 2)
On veut couper un terrain rectangulaire en deux parties de même aire en découpant une bordure de largeur x. Montrer que la largeur de cette bande doit être égale au quart de la différence entre le demi-périmètre et la diagonale du terrain.

Exercice 1.5 (Profondeur du puits)
Je laisse tomber une pierre dans un puits, et au bout de $3s$ j'entends le « plouf ». Quelle est la profondeur du puits, sachant que la vitesse du son est égale à $340m/s$? Indication : un solide en chute libre, sans vitesse initiale, a parcouru, après t secondes, une distance $x = 4,9t^2$.
Donner la formule permettant de trouver la profondeur du puits dans le cas général où on entend le « plouf » au bout de a secondes.

Exercice 1.6 (Hauteur d'une échelle)
Un meuble cubique de $0,7m$ d'arête est appuyé contre un mur. On pose une échelle de $2,5m$ de long de manière à effleurer l'échelle (voir la figure qui ne respecte pas les longueurs indiquées).
Quelle est la hauteur $h = OA$ atteinte par l'échelle ?
(indication : en notant $d = OB$ l'écartement entre le pied de l'échelle et le mur, montrer que $x = h + d$ est solution de l'équation du 2ᵉ degré $x^2 - 1,4x - 6,25 = 0$)



Exercice 1.7 (Travail en binôme)
Deux ouvriers, $M^r A$ et $M^r B$, doivent faire un certain travail. Si chacun en exécutait successivement la moitié, ils mettraient en tout $12h30$ pour l'achever. En travaillant ensemble, chacun gardant son propre rythme de travail, ils ne mettent que $6h$. Combien de temps mettrait chacun des ouvriers pour faire ce travail seul ?

1.1.2 Problèmes du troisième degré

Exercice 1.8 (Extrémums locaux d'un polynôme du 3ᵉ degré)
Pour chercher l'abscisse des extrémums locaux du polynôme du 3ᵉ degré $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, le mathématicien occitan Pierre Fermat (1601-1655) procédait ainsi :
- il considère deux nombres x et $x + \lambda$, avec $\lambda \neq 0$
- il écrit l'égalité $P(x) = P(x + \lambda)$, puis il simplifie cette égalité par λ
- il pose $\lambda = 0$ dans l'égalité simplifiée et il en tire les abscisses des extrémums cherchées

Appliquer cette méthode pour la fonction $f : x \mapsto x^3 + 6x^2 + 9x + 2$ et vérifier le résultat trouvé en traçant la courbe de f à la calculatrice.
Appliquer cette méthode d'une manière générale pour la fonction P : donner la formule qui permet de calculer les abscisses cherchées en fonction de a, b, c et d.
Commenter cette méthode (le procédé vous parait-il correct ? honnête ? s'applique t-il à d'autres fonctions ? etc.)

Exercice 1.9 (Somme de cubes)
Est-il possible que trois nombres entiers non nuls et consécutifs soient tels que le cube du plus grand soit égal à la somme des cubes des plus petits ?
Écrire une égalité qui traduit l'énoncé, puis envisager les deux méthodes suivantes.

1. Méthode graphique : l'argumentation repose sur la nature entière ou pas de l'abscisse des intersections d'une courbe d'un polynôme du 3ᵉ degré avec l'axe des abscisses.
2. Méthode arithmétique : la discussion s'appuie sur la nature entière de la variable choisie en étudiant comment cet entier pourrait vérifier l'égalité trouvée

Exercice 1.10 (Somme des carrés)
Déterminer un polynôme P de degré 3 tel que pour tout réel x, on ait : $P(x+1)-P(x)=x^2$.
Évaluer l'égalité précédente pour $x=1,2,3\cdots n$, puis additionner membre à membre ces n égalités. Montrer que le 1^{er} membre de la somme obtenue peut se mettre sous la forme $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et conclure.

1.1.3 Problèmes du quatrième degré

Exercice 1.11 (Somme des cubes)
Sur le modèle de l'exercice précédent, déterminer un polynôme P de degré 4 tel que pour tout réel x, on ait : $P(x+1)-P(x)=x^3$.
Évaluer l'égalité précédente pour $x=1,2,3\cdots n$, puis additionner membre à membre ces n égalités. Montrer que le 1^{er} membre de la somme obtenue peut se mettre sous la forme $(Q(n))^2$, où Q est un polynôme du second degré à déterminer, puis conclure.

Exercice 1.12 (Conjecturer)
Déterminer les résultats des calculs ci-dessous, observer ces résultats puis émettre une conjecture concernant ce type de calcul. Prouver ou infirmer ensuite la conjecture émise.

- $P(1)=1\times2\times3\times4+1$
- $P(2)=2\times3\times4\times5+1$
- $P(3)=3\times4\times5\times6+1$
- $P(4)=4\times5\times6\times7+1$

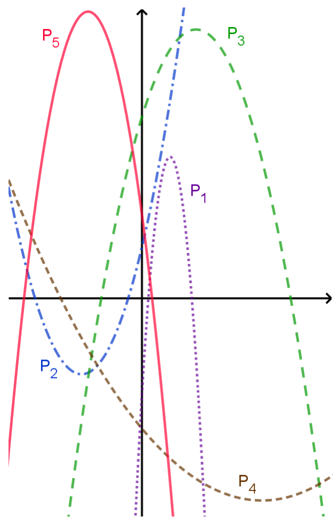
Exercice 1.13 (Équations ou expressions bi-carrées)
Une équation est dite bi-carrée lorsqu'elle a la forme $ax^4+bx^2+c=0$.

1. Discuter, selon la valeur de a l'existence et le nombre de solutions pour l'équation
$$x^4-x^2+1=a$$
2. On cherche à déterminer par le calcul, l'abscisse x des points M de la parabole d'équation $y=x^2+1$ qui sont à une distance minimale du point $A(0;4)$. Montrer, dans un 1^{er} temps, que $AM^2=x^4-5x^2+9$. Montrer alors que cette expression bi-carrée admet un minimum ; préciser sa valeur et conclure. Vérifier la valeur trouvée avec Geogebra.

Exercice 1.14 (Équations réciproques)

1. Á l'aide du changement de variable $x+\frac{1}{x}=X$, résoudre l'équation $x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=4$
2. Montrer que l'équation $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, avec $a\neq0$, se transforme en une équation du 2^{e} degré lorsqu'on effectue le changement de variable $X=x+\frac{1}{x}$ (vérifier d'abord que $x=0$ n'est pas solution). Montrer que si $x=\alpha$ est une solution de cette équation, alors $x=\frac{1}{\alpha}$ en est une autre.
3. Résoudre les équations $E_1: 10x^4-77x^3+150x^2-77x+10=0$ et $E_2: x^4-2x^3+x^2-2x+1=0$

1.1.4 Équations de paraboles

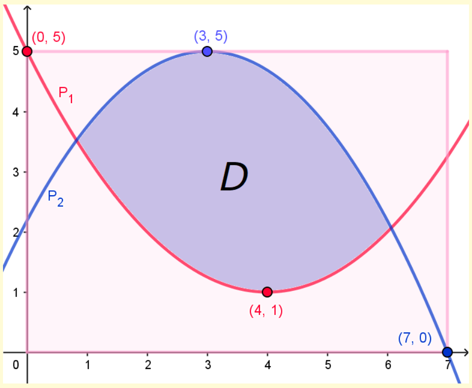


Exercice 1.15 (Identification graphique)
Les équations représentées ci-contre admettent des équations du type $y = a_i x^2 + b_i x + c_i$ où $a_i \neq 0$ pour $i \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Répondre aux questions suivantes par simple lecture graphique (sans calculs).

1. Ranger dans l'ordre croissant, les nombres c_i, puis les nombres $q_i = \frac{-b_i}{a_i}$, et enfin les nombres a_i.
2. Quels sont les signes des nombres b_i ?

Exercice 1.16 (Calcul d'aire)
Nous voulons déterminer une valeur approchée de l'aire du domaine D grisé sur la figure ci-contre par la méthode de Monte-Carlo. Pour cela, il faut déterminer le système d'inéquations que doit vérifier un point $M(x; y)$ de ce domaine.

1. Sachant que les deux courbes qui limitent D sont des paraboles, à l'aide des informations portées dans la figure (pour chaque parabole, les coordonnées de l'optimum et d'une intersection avec un des axes), déterminer les équations des courbes P_1 et P_2.
2. En déduire le système S d'inéquations vérifié par un point quelconque $M(x; y)$ de D.
3. Écrire le programme « domaine » décrit ci-dessous, l'exécuter $n = 10\,000$ fois et conclure.



Le programme « domaine » tire aléatoirement des nombres $0 \leqslant x < 7$ et $0 \leqslant x < 5$ puis examine si ces nombres vérifient le système S, auquel cas il en conclut que ce sont les coordonnées d'un point M de D. Cette procédure est recommencée un très grand nombre n de fois, en comptabilisant à chaque fois les points qui sont dans D. Par comparaison avec le nombre total de points tirés, on peut ainsi estimer la part de l'aire du rectangle de côtés 7 et 5 qui est occupé par D. Le programme affiche donc, en sortie, l'estimation trouvée de l'aire de D.

Exercice 1.17 (Paraboles)

1. Existe t-il une unique parabole de sommet $S(\frac{-1}{2}; \frac{-9}{4})$ qui passe par le point $M(-1; -2)$?
   Si oui, donner son équation.
2. a, b, $c \neq a$ et $d \neq b$ étant quatre nombres quelconques, existe t-il une unique parabole de sommet $S(a; b)$ qui passe par le point $M(c; d)$?
   Si oui, donner son équation en fonctions de a, b, c et d.
   Retrouver à l'aide de la formule, la réponse à la question 1.

1.1.5 Identités remarquables

EXERCICE 1.18 (DIFFÉRENCES OU SOMMES DE PUISSANCES)
On a vu dans le cours l'identité $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$ qui est valable pour tout entier n et tout nombre réel a.

1. Déduire de l'identité précédente une factorisation de $a^3 - b^3$
2. En déduire une factorisation de $a^3 + b^3$
3. Montrer que $a^4 + b^4$ peut s'écrire comme le produit des deux facteurs du second degré $a^2 + abc + b^2$ et $a^2 + abd + b^2$ où c et d sont des réels à déterminer
4. Factoriser les polynômes $P(x) = 4x^4 + 1$ et $Q(x) = (x - \sqrt{2})^4 + (x + \sqrt{2})^4$

1.1.6 Divisions euclidiennes

PROPRIÉTÉ 1.1 (UNICITÉ DU RESTE) Soient deux polynômes P et P', avec $P' \neq 0$.
Il existe un unique polynôme Q et un unique polynôme R tels que
$P(x) = P'(x)Q(x) + R(x)$ avec $deg(R) < deg(P')$

- Dans la division euclidienne de P (dividende) par P' (diviseur), Q est le quotient et R le reste
- Quand le reste R est le polynôme nul (on dit que P' divise P), $P(x)$ se factorise en $P'(x)Q(x)$
- La division s'effectue en la posant, en commençant par le monôme de plus haut degré de P

EXERCICE 1.19 (FACTORISATIONS DIVERSES)

1. Vérifier que le polynôme $p(x) = x^3 + x^2 - 12$ a pour racine évidente 2. On peut en déduire la factorisation $p(x) = (x-2) \times q(x)$ où $q(x)$ est le quotient de $x^3 + x^2 - 12$ par $x - 2$. Effectuer cette division euclidienne en posant la division comme avec des entiers. En déduire la factorisation ultime de $p(x)$.
2. Effectuer la division euclidienne de $P(x) = 2x^6 - 11x^5 + 18x^4 - 14x^3 + 10x^2 - 9x + 6$ par $P'(x) = 2x^2 - 3x + 2$. En déduire une factorisation de $P(x)$.
3. Effectuer de même la division euclidienne de $f(x) = x^5 + 6x^2 - 5x + 5$ par $g(x) = x^2 - x + 1$. En déduire une factorisation de $f(x)$.
4. Effectuer de même la division euclidienne de $h(x) = x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 3x - 1$ par $i(x) = (x-1)$, puis par $j(x) = (x-1)^2$ et enfin par $k(x) = (x-1)^3$.
   En déduire une factorisation de $h(x)$, puis la factorisation ultime de $h(x)$ (indication : utiliser une identité remarquable).

EXERCICE 1.20 (FACTORISATION PAR $(x - a)$)

1. Effectuer la division euclidienne de $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 6x - 5$ par $x - 1$.
2. Effectuer, de même, la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 2$.
3. Soient P un polynôme et a un réel. Montrer que le reste de la division euclidienne de P par $(x - a)$ est égal à $P(a)$ (indication : raisonner sur le degré du reste).
4. Un nombre α étant donné, déduire de la question précédente une méthode pour déterminer les autres valeurs de x, quand elles existent, telles que $P(x) = P(\alpha)$.
   Application numérique : prendre $\alpha = 2$.
5. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 5$. Calculer $f(2)$ puis montrer qu'il existe deux autres valeurs de x telles que $f(x) = f(2)$ dont une positive.

1.1.7 Factorisations ultimes

Exercice 1.21 (Extrait du cours)
On démontre que les seuls polynômes à coefficients réels qui ne sont pas factorisables sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 non factorisables ($\Delta < 0$).
➥ Le polynôme $x^4 + 4$ ne parait pas factorisable car il n'a pas de racine ($\forall x \in \mathbb{R}, x^4 + 4 > 0$). Pour le factoriser, on peut utiliser l'identité de Sophie Germain :

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$$

➥Sauriez-vous trouver la factorisation ultime de $x^7 - 3x^6 + 3x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1$?

Exercice 1.22 (Recherche des racines évidentes)
Nous voulons mettre à profit cette remarque du cours *si un polynôme à coefficients entiers a une racine entière, ce ne peut être qu'un diviseur du terme constant*, pour écrire un programme qui recherche systématiquement toutes les racines entières d'un polynôme P de degré quelconque et qui affiche la factorisation qui en résulte. Dans le cas d'un polynôme résiduel du 2e degré, si le discriminant est négatif, le programme pourra annoncer que la factorisation est ultime.

1. Écrire le programme
2. Tester ce programme sur les quelques polynômes suivants :
   - $P_1(x) = 3x^3 + x^2 - 12x - 4$
   - $P_2(x) = 6x^3 + 3x^2 - 27x + 12$
   - $P_3(x) = -5x^3 + 45x^2 - 130x + 120$
   - $P_4(x) = x^4 - 6x^3 - 7x^2 + 48x - 36$
   - $P_5(x) = 2x^4 - 13x^3 - 7x^2 + x - 7$
   - $P_6(x) = x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 28x - 16$
   - $P_7(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18$
   - $P_8(x) = x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 4x + 1$
   - $P_9(x) = x^6 + 3x^5 + 2x^4 - x^2 - 3x - 2$
   - $P_{10}(x) = x^7 - 3x^6 + 3x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ (celui de l'exercice précédent).

1.1.8 le coin du chercheur

Exercice 1.23
Soit E_n l'ensemble des polynômes de degré 2 à coefficients entiers, inférieurs ou égaux en valeur absolue à un entier n. Le polynôme $x^2 - 3x + 1$ par exemple appartient à E_3, et aussi à E_4, E_5,. . ., mais pas à E_2 ni à E_1.
➩ Quelle est la proportion $F(1, n)$ des polynômes de E_n qui n'ont pas de racine ?
Répondre à cette question pour les premières valeurs de n en vous aidant d'un programme.
En utilisant ce même programme, répondre aux questions suivantes :
➩ Quelle est la proportion $F(2, n)$ des polynômes de E_n qui ont des racines rationnelles (sans tenir compte de la multiplicité) ? Quelle est la proportion $F(3, n)$ des polynômes de E_n qui ont des racines irrationnelles positives ? À partir de quelle valeur de n, parmi les équations de E_n ayant 2 racines positives, y a t-il davantage de racines irrationnelles que rationnelles ?