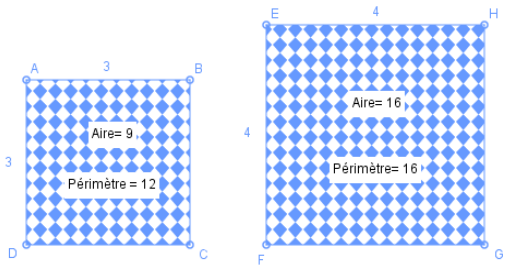
DM n°1 sur les fonctions

Traiter deux parties pour être noté sur 20 (une seule partie pour être noté sur 18)

I] Rectangles

Soient x et y la largeur et la longueur d'un rectangle (en m).
Exprimer le périmètre $\mathcal{P}$ et l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle en fonction de x et y.
On s'intéresse aux rectangles tels que $\mathcal{A}$ en m^2 égale $\mathcal{P}$ en m.
Déterminer la fonction F qui donne y à partir de x pour de tels rectangles. La figure montre une solution carrée (à droite) mais combien existe-t-il de tels rectangles dont les côtés sont des nombres entiers de m ? Faire un graphique (tracer la courbe de la fonction F) pour trouver/montrer les différentes solutions (points de la courbe à coordonnées entières).



Le périmètre $\mathcal{P}$ et l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle en fonction de x et y sont donnés par les formules : $\mathcal{P} = 2(x+y)$ et $\mathcal{A} = xy$
L'égalité entre $\mathcal{A}$ en m^2 et $\mathcal{P}$ en m s'écrit $2(x+y) = xy$ soit $y(2-x) = -2x$
x ne peut être égal à 2 car sinon on aurait $0 = -4$ ce qui ne se peut pas ;
on en déduit que $y = \dfrac{-2x}{2-x} = \dfrac{2x}{x-2}$.
La fonction F que l'on cherche – qui donne y à partir de x pour de tels rectangles – est donc définie par :

$$F(x) = \frac{2x}{x-2} = \frac{2(x-2)+4}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2} .$$

On doit avoir $x > 0$ et $F(x) > 0$ car ce sont des longueurs donc $x > 2$.
(sinon, avec $x > 0$, on aurait $x-2 < 0$ et donc $F(x) < 0$)
L'étude de F ne se fera donc que sur $]2 ; +\infty[$.
Le taux d'accroissement étant :

$$\tau = \frac{2+\dfrac{4}{x_1-2} - \left(2+\dfrac{4}{x_2-2}\right)}{x_1-x_2} = \frac{4(x_2-2)-4(x_1-2)}{(x_1-x_2)(x_1-2)(x_2-2)} = \frac{4(x_2-x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-2)(x_2-2)} = \frac{-4}{(x_1-2)(x_2-2)}$$

Comme les 2 facteurs au dénominateur sont positifs (car on prend des valeurs de $]2 ; +\infty[$), on a $\tau > 0$; la fonction F est donc strictement décroissante sur $]2 ; +\infty[$. Par ailleurs, comme $x-2 > 0$, la fonction est supérieure strictement à 2. On a représenté la courbe de F ci-dessous.
Les seuls points à coordonnées entières sont (3;6), (4;4) et (6;3).
Si $x>6$ alors $F(x)$ n'est pas entier puisqu'il est compris entre 3 et 2 (ces deux valeurs exclues).
Il n'y a donc que 2 rectangles qui répondent au problème :(3;6) et (4;4),
la solution (6;3) désigne le même rectangle que la solution (3;6).

II] Physique

L'énergie cinétique d'une particule de masse m qui évolue à une vitesse v est donnée par $E_c = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)$ où E_c est exprimée en joules, m en kilogrammes, v en mètre par seconde et c est la vitesse de la lumière ($c \approx 3\times10^8\, ms^{-1}$)

a) On étudie la fonction $E_c : v \mapsto E_c(v)$ pour répondre aux questions suivantes :

- La théorie de la relativité impose qu'aucune particule de masse non nulle ne peut atteindre et à fortiori dépasser la vitesse de la lumière. La fonction E_c est-elle cohérente avec ce principe ?
- En physique, plus la vitesse d'une particule est grande, plus son énergie cinétique est grande. L'étude des variations de la fonction E_c confirme-t-elle ce principe ?

Pour le premier point, il suffit de montrer qu'on a toujours $v < c$:
Supposons que $v \geq c$, on a alors $v^2 \geq c^2$ car la fonction carrée est croissante pour les nombres positifs.
On en déduit que $\frac{v^2}{c^2} \geq 1$ et donc que $1-\frac{v^2}{c^2} \leq 0$.
Le cas de l'égalité ($1-\frac{v^2}{c^2}=0$ arrive lorsque $v = c$) n'est pas possible puisqu'on ne peut diviser par 0.
Si l'inégalité est stricte ($1-\frac{v^2}{c^2}<0$ arrive lorsque $v > c$) alors on ne peut déterminer la racine carrée.
Dans ces deux cas, il ne serait pas possible de calculer E_c avec la formule, ce qui est contradictoire. L'hypothèse est donc à rejeter : on doit avoir $v < c$.

Pour le second point, il suffit de montrer que la fonction E_c est croissante.
Montrons cela directement. En prenant $v_1 < v_2$, montrons qu'alors $E_c(v_1) < E_c(v_2)$:

$v_1 < v_2 \Leftrightarrow v_1^2 < v_2^2$ (fonction carrée croissante sur $\mathbb{R}$)

$v_1 < v_2 \Leftrightarrow v_1^2 < v_2^2 \Leftrightarrow \frac{1}{v_1^2} > \frac{1}{v_2^2}$ (fonction inverse croissante sur $\mathbb{R}^+$*)

$v_1 < v_2 \Leftrightarrow v_1^2 < v_2^2 \Leftrightarrow 1-\frac{v_1^2}{c^2} > 1-\frac{v_2^2}{c^2}$ (fonction affine $x \mapsto 1-\frac{x}{c^2}$ décroissante sur $\mathbb{R}$)

$v_1 < v_2 < c \Leftrightarrow v_1^2 < v_2^2 < c^2 \Leftrightarrow 1-\frac{v_1^2}{c^2} > 1-\frac{v_2^2}{c^2} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}} > \sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}$ (fonction racine carrée croissante sur $\mathbb{R}^+$)

$v_1 < v_2 \Leftrightarrow \sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}} > \sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} < \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}$ (fonction inverse décroissante sur $\mathbb{R}^+$*)

$v_1 < v_2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} < \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} \Leftrightarrow mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}-1\right) < mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}-1\right) \Leftrightarrow E_c(v_1) < E_c(v_2)$

(fonction affine $x \mapsto mc^2(x-1)$ croissante sur $\mathbb{R}$)

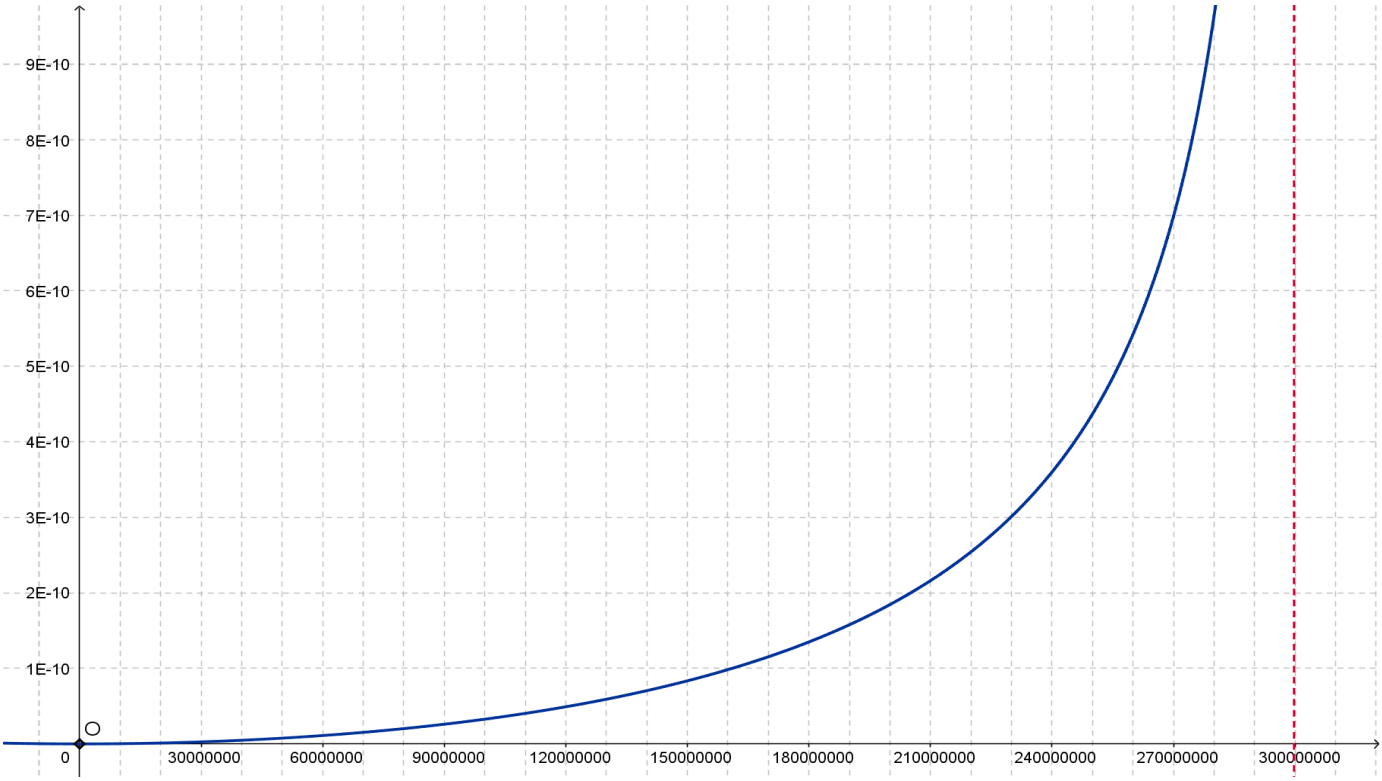
b) On suppose dans cette question que la particule étudiée est une particule α c'est-à-dire le noyau d'un atome d'Hélium, dont la masse m est voisine de $6\times10^{-27}\, kg$. Donner alors l'expression de l'énergie cinétique de la particule en fonction de sa vitesse. Tracer sa courbe représentative dans un repère où, en abscisses, 1 *cm* représente $3\times10^7\, ms^{-1}$, et en ordonnée, 1 *cm* représente $10^{-10}\, J$.

L'expression de l'énergie cinétique de la particule α est :

$$E_c(v_\alpha) = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_\alpha^2}{c^2}}}-1\right) = 6\times10^{-27}\times(3\times10^8)^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_\alpha^2}{(3\times10^8)^2}}}-1\right) = 54\times10^{-27+16}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_\alpha^2}{9\times10^{16}}}}-1\right),$$

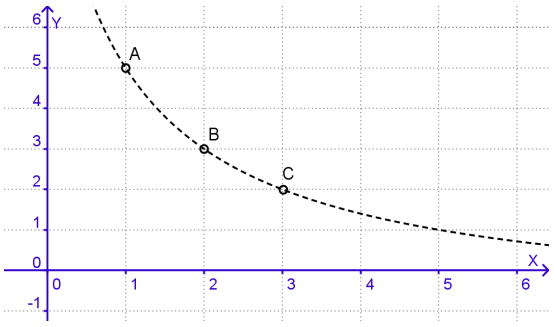
soit $E_c(v_\alpha) = 5{,}4\times10^{-10}\left(\frac{3\times10^8}{\sqrt{9\times10^{16}-v_\alpha^2}}-1\right) = \frac{1{,}62\times10^{-1}}{\sqrt{9\times10^{16}-v_\alpha^2}} - 5{,}4\times10^{-10}$

Traçons la courbe de cette fonction pour $0 < v_\alpha < c$ (*l'échelle fournie par l'énoncé ne rend pas la croissance de la fonction visible d'où la modification apportée ici*) :



J'ai représenté la droite d'équation v=300 000 000 m/s (c'est la vitesse de la lumière approximativement) qui représente la limite que ne dépasse pas la vitesse d'une particule ($v < c$).

III] Hyperboles



Dans cette partie, on estime qu'il existe toujours une hyperbole Π — une courbe d'équation $y=\frac{a}{x+b}+c$ — qui passe par trois points non alignés *A, B* et *C* donnés. Le but de cette question est de déterminer les coefficients *a, b* et *c* de cette hyperbole, dans un cas particulier tout d'abord, puis dans le cas général.

a) Prenons $A(1;5)$, $B(2;3)$ et $C(3;2)$. Écrire le système de trois équations en *a, b* et *c* qui traduit l'appartenance des points *A, B* et *C* à l'hyperbole Π. Transformer ces égalités en mettant chacune au même dénominateur et, ensuite, appliquer le produit en croix pour ne plus avoir de dénominateur.

Résoudre ce système d'équations par la méthode des substitutions :

Garder L_1 inchangée (la ligne 1 traduisant l'appartenance du point A à Π) pour le calcul de a. Substituer le a des autres équations par l'expression trouvée dans L_1. Garder L_2 inchangée (la nouvelle ligne 2) pour le calcul de b. Substituer le b de la dernière équation par l'expression trouvée dans L_2. Déterminer c, puis b et enfin a.

En déduire l'équation de l'hyperbole Π.

Vérifier votre équation en remplaçant *x* par 1, 2 et 3 (on doit trouver 5, 3 et 2).

Appliquer votre équation pour déterminer l'ordonnée du point de Π d'abscisse 6.

Comme on doit avoir $\frac{a}{x+b}+c=y$ pour tous les points de coordonnées $(x\,;y)$ de Π, cela donne

pour *A* : $\frac{a}{1+b}+c=5$, soit $a=(1+b)(5-c)$;

pour *B* : $\frac{a}{2+b}+c=3$, soit $a+(2+b)(c-3)=0$;

pour *C* : $\frac{a}{3+b}+c=2$, soit $a+(3+b)(c-2)=0$.

On a donc le système suivant à résoudre, dans lequel on a remplacé *a* par la valeur donnée par la ligne 1 :

$$\begin{cases} a = (1+b)(5-c) & (L_1) \\ (1+b)(5-c) + (2+b)(c-3) = 0 & (L_2) \\ (1+b)(5-c) + (3+b)(c-2) = 0 & (L_3) \end{cases}$$

Développons et réduisons les deux dernières lignes de ce système.

On trouve alors :

$$\begin{cases} a & = & (1+b)(5-c) & (L_1) \\ 2b & + & c & = & 1 & (L_2) \\ 3b & + & 2c & = & 1 & (L_3) \end{cases}$$

Gardons L_1 et L_2 et transformons L_3 pour faire disparaître c en effectuant la transformation $L_3 - 2L_2 \to L_3$

$$\begin{cases} a & = & (1+b)(5-c) & (L_1) \\ 2b & + & c & = & 1 & (L_2) \\ -b & & & = & -1 & (L_3) \end{cases}$$

L_3 permet alors de déterminer b, de là on déterminera c avec L_2 et a avec L_1.

$$\begin{cases} a & = & (1+1)(5-(-1))=12 & (L_1) \\ c & = & 1-2\times 1=-1 & (L_2) \\ b & = & 1 & (L_3) \end{cases}$$

L'équation de l'hyperbole Π est $y=\frac{12}{x+1}-1$.

Vérifions : $\frac{12}{1+1}-1=6-1=5$; $\frac{12}{1+2}-1=4-1=3$; $\frac{12}{1+3}-1=3-1=2$.

Appliquons notre équation pour déterminer l'ordonnée du point D de Π d'abscisse 6 :

$$\frac{12}{1+6}-1=\frac{5}{7}$$

Le point D de Π d'abscisse 6 a pour coordonnées (6 ; $\frac{5}{7}$).

b) Prenons la situation générale où l'on a $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$. Écrire le système et résoudre comme précédemment pour trouver la forme générale des coefficients a, b et c en fonctions des nombres x_A, x_B, x_C, y_A, y_B et y_C. Vérifier vos formules pour retrouver les coefficients dans le cas du a).

Comme on doit avoir $\frac{a}{x+b}+c=y$ pour tous les points de Π, cela donne pour A : $\frac{a}{x_A+b}+c=y_A$, soit $a=(x_A+b)(y_A-c)$; même chose pour B : $a=(x_B+b)(y_B-c)$ et pour C : $a=(x_C+b)(y_C-c)$. Ces deux dernières égalités peuvent être écrites $a+(x_B+b)(-y_B+c)=0$ et $a+(x_C+b)(-y_C+c)=0$.

On a donc le système suivant à résoudre, dans lequel on a remplacé a par la valeur donnée par la ligne 1 :

$$\begin{cases} a & = & (x_A+b)(y_A-c) & (L_1) \\ (x_A+b)(y_A-c) & + & (x_B+b)(-y_B+c) & = & 0 & (L_2) \\ (x_A+b)(y_A-c) & + & (x_C+b)(-y_C+c) & = & 0 & (L_3) \end{cases}$$

Développons et réduisons les deux dernières lignes de ce système. On trouve alors :

$$\begin{cases} a & = & (x_A+b)(y_A-c) & (L_1) \\ b(y_A-y_B) & + & c(x_B-x_A) & = & x_By_B-x_Ay_A & (L_2) \\ b(y_A-y_C) & + & c(x_C-x_A) & = & x_Cy_C-x_Ay_A & (L_3) \end{cases}$$

Gardons L_1 et L_2 et transformons L_3 pour faire disparaître c : on remplace cette ligne par la combinaison $L_2\times(x_C-x_A)-L_3\times(x_B-x_A)$

$$\begin{cases} a & = & (x_A+b)(y_A-c) & (L_1) \\ b(y_A-y_B)+c(x_B-x_A) & = & x_By_B-x_Ay_A & (L_2) \\ b((y_A-y_B)(x_C-x_A)-(y_A-y_C)(x_B-x_A)) & = & (x_By_B-x_Ay_A)(x_C-x_A)-(x_Cy_C-x_Ay_A)(x_B-x_A) & (L_3) \end{cases}$$

L_3 permet alors de déterminer b, de là on déterminera c avec L_2 et a avec L_1.

$$b=\frac{(x_By_B-x_Ay_A)(x_C-x_A)-(x_Cy_C-x_Ay_A)(x_B-x_A)}{(y_A-y_B)(x_C-x_A)-(y_A-y_C)(x_B-x_A)}.$$

Peut-on simplifier cette expression un peu indigeste ? Essayons de développer le numérateur :

$$b=\frac{(x_Bx_Cy_B-x_Ax_Cy_A)-(x_Ax_By_B-x_Ax_Ay_A)-(x_Bx_Cy_C-x_Ax_By_A)+(x_Ax_Cy_C-x_Ax_Ay_A)}{(y_A-y_B)(x_C-x_A)-(y_A-y_C)(x_B-x_A)},$$

$$b=\frac{x_Bx_Cy_B-x_Ax_Cy_A-x_Ax_By_B+x_Ax_Ay_A-x_Bx_Cy_C+x_Ax_By_A+x_Ax_Cy_C-x_Ax_Ay_A}{(y_A-y_B)(x_C-x_A)-(y_A-y_C)(x_B-x_A)},$$

$$b=\frac{x_Bx_Cy_B-x_Ax_Cy_A-x_Ax_By_B-x_Bx_Cy_C+x_Ax_By_A+x_Ax_Cy_C}{(y_A-y_B)(x_C-x_A)-(y_A-y_C)(x_B-x_A)}$$

Une partie a été supprimée mais c'est tout.

On peut encore tenter une factorisation du numérateur.

$$b=\frac{(x_B y_B-x_A y_A)(x_C-x_A)-(x_C y_C-x_A y_A)(x_B-x_A)}{(y_A-y_B)(x_C-x_A)-(y_A-y_C)(x_B-x_A)}$$

L_2 permet alors de déterminer c.

$b(y_A-y_B)+c(x_B-x_A)=x_B y_B-x_A y_A$ donc $c=\frac{x_B y_B-x_A y_A-b(y_A-y_B)}{(x_B-x_A)}$.

Si on veut aller jusqu'au bout du bout, il faudrait remplacer b par son expression donnée plus haut.

Ensuite, pour déterminer a, on utilise L_1: $a=(x_A+b)(y_A-c)$. Les valeurs de b et de c ayant été calculées précédemment, il suffit de les remplacer dans la formule.

Vérifions : Prenons $A(1;5)$, $B(2;3)$ et $C(3;2)$.

$$b=\frac{2\times3\times3-1\times3\times5-1\times2\times3-2\times3\times2+1\times2\times5+1\times3\times2}{(5-3)(3-1)-(5-2)(2-1)}=\frac{18-15-6-12+10+6}{2\times2-3\times1}=\frac{1}{1}=1.$$

On a bien trouvé ça précédemment. Continuons :

$$c=\frac{2\times3-1\times5-1\times(5-3)}{(2-1)}=\frac{6-5-2}{1}=-1.$$

Bon ! Il ne reste plus qu'à trouver a=12 :

$a=(1+1)(5+1)=2\times6=12$.

Conclusion, notre formule semble correcte.

Elle permet une programmation du calcul des coefficients a, b et c lorsqu'on connaît les coordonnées de trois points de l'hyperbole. Récapitulons, l'équation d'une hyperbole passant par A, B et C est $y=\frac{a}{x+b}+c$, où les coefficients a, b et c se calculent dans l'ordre (car c utilise b et a utilise b et c) par les formules :

- $b=\frac{(x_B y_B-x_A y_A)(x_C-x_A)-(x_C y_C-x_A y_A)(x_B-x_A)}{(y_A-y_B)(x_C-x_A)-(y_A-y_C)(x_B-x_A)}$
- $c=\frac{x_B y_B-x_A y_A-b(y_A-y_B)}{(x_B-x_A)}$
- $a=(x_A+b)(y_A-c)$.

Le programme que l'on doit écrire pour réaliser cet objectif va se baser sur l'algorithme suivant :

lire x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, x_D, y_D

$b_{hyper}=((x_B y_B-x_A y_A)(x_C-x_A)-(x_C y_C-x_A y_A)(x_B-x_A))\div((y_A-y_B)(x_C-x_A)-(y_A-y_C)(x_B-x_A))$,

$c_{hyper}=(x_B y_B-x_A y_A-b(y_A-y_B))\div((x_B-x_A))$, $a_{hyper}=(x_A+b)(y_A-c)$.

afficher a, b et c

c) Déterminer l'équation de l'hyperbole passant par les points $A(1;1)$, $B(3;4)$ et $C(4;0)$.

Tracer cette hyperbole pour $x\in[0\ ;\ 6]$.

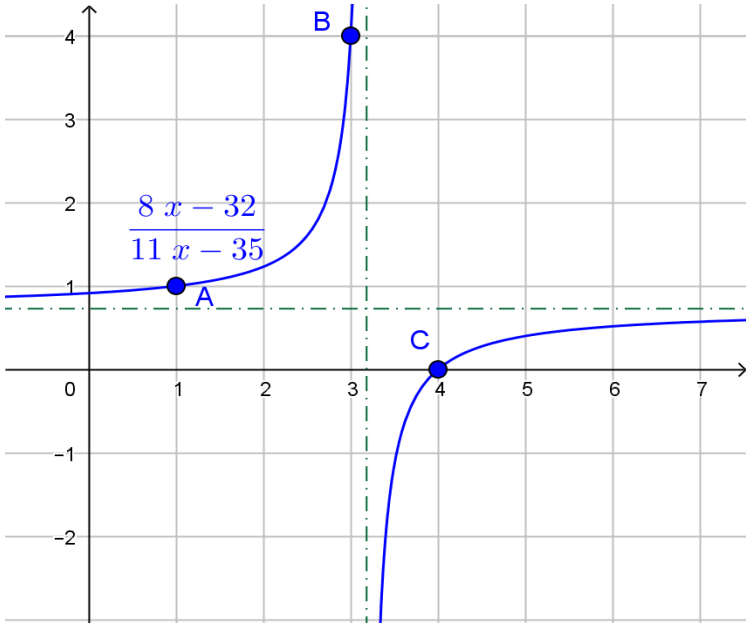
Le programme précédent affichera des valeurs approchées pour les coefficients. Si on veut les valeurs exactes, il faut afficher le numérateur et le dénominateur de ces nombres.

- $b=\frac{(3\times4-1\times1)(4-1)-(4\times0-1\times1)(3-1)}{(1-4)(4-1)-(1-0)(3-1)}=\frac{33-(-2)}{(-9)-(2)}=\frac{-35}{11}\approx-3{,}182$
- $c=\frac{3\times4-1\times1+\frac{35}{11}\times(1-4)}{3-1}=\frac{12-1-\frac{105}{11}}{2}=\frac{121-105}{22}=\frac{16}{22}=\frac{8}{11}\approx0{,}727$
- $a=(1-\frac{35}{11})(1-\frac{8}{11})=\frac{(11-35)(11-8)}{11^2}=\frac{-24\times3}{121}=\frac{-72}{121}\approx-0{,}595$

L'équation de cette courbe est donc :

$$y=\frac{-72}{121(x-\frac{35}{11})}+\frac{8}{11}=\frac{-72}{11(11x-35)}+\frac{8}{11}=\frac{-72+8(11x-35)}{11(11x-35)}=\frac{88x-352}{121x-385}=\frac{8x-32}{11x-35}$$

Traçons cette hyperbole et plaçons les points A, B et C qui la définissent.



Si on voulait améliorer notre programme, ce serait bien d'afficher des valeurs exactes : en supposant que les points A, B et C ont des coordonnées entières comme ici, on devrait afficher les numérateurs et dénominateurs de a, de b et de c (six nombres). La question n'étant pas posée, nous ne la traiterons pas. On pourrait aussi vouloir déterminer les coefficients de la forme standard de cette fonction hyperbolique, ce que nous avons fait manuellement plus haut pour notre courbe.