4 Fonctions

Objectifs :

- Étude des fonctions de référence : affine, carré, inverse, racine carrée et valeur absolue
- Sens de variation des fonctions associées $u+k$, λu, $\sqrt{u}$ et $\frac{1}{u}$
- Notion de nombre dérivé d'une fonction en un point ; tangente à une courbe en un point
- Lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation ; recherche d'extremum
- Fonctions dérivées ; étude de fonctions

Aperçu historique :

Le terme « fonction » est dû à Leibniz (1692, de functio *: exécution), un mathématicien allemand qui a contribué à jeter les bases de l'analyse moderne. L'idée de fonction a d'abord été associée à une courbe du plan avant d'être considérée comme une combinaison d'opération sur une variable, ce qui peut être rapproché d'un algorithme. Quelques années plus tard, Jean Bernoulli emploie la notation fx pour désigner une fonction de la* variable *x : les* fonctions *telles que nous allons les étudier ici étaient nées. La notion de nombre dérivé, puis de fonction dérivée sont nées au* XVII^{e}*siècle (presque) simultanément chez deux scientifiques Leibniz (1646-1716) et Newton (1642-1727) à partir de deux problèmes très différents.*
Leibniz s'est ainsi intéressé aux courbes représentatives des fonctions et en particulier aux droites joignant deux points d'une telle courbe. Il s'est en particulier posé la question suivante : les points $A(a;f(a))$ et $M(a+h;f(a+h))$ étant sur la courbe représentative d'une fonction f, le coefficient directeur de la droite (AM) est $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, mais qu'advient-il de ce coefficient directeur lorsque les deux points A et M sont très proches l'un de l'autre, « infiniment proches » ?
Newton, quant-à lui, s'est intéressé aux mouvements et en particulier aux vitesses d'objets en déplacement. Il s'est posé la question suivante : à un instant t, un objet a parcouru une distance d_1, à l'instant $t+h$ $(h>0)$, il a parcouru la distance d_2. Sa vitesse moyenne entre les instants t et $t+h$ est donc $V_m = \frac{d_2-d_1}{h}$. Que devient cette vitesse lorsque les instants t et $t+h$ sont très proches, « infiniment proches » ?
Dans les deux cas, on est amené à travailler sur des nombres « infiniment proches » et donc à devoir calculer des quotients de nombres « infiniment proches de 0 ». Pour cela, nous allons définir la notion de limite qui a posé de nombreux soucis aux mathématiciens d'avant Newton et Leibniz (voir par exemple les paradoxes de Zénon d'Alexandrie).

1. Notions générales sur les fonctions numériques

a. Généralités

DÉFINITION 4.1 Une fonction numérique f permet d'associer à chaque nombre x d'un ensemble $\mathscr{D}$ un nombre y que l'on note $f(x)$ et qui est appelé « image » de x par la fonction f. On note :

$$f : x \longmapsto y = f(x)$$

Le nombre x associé à $y = f(x)$ est appelé « antécédent » de y par f.

Remarques :

- L'image d'un nombre x de $\mathscr{D}$ par une fonction numérique f est unique. Par contre, un réel peut avoir un ou plusieurs antécédent(s) par f, ou aucun.
- L'ensemble de départ $\mathscr{D}$ dans lequel une fonction numérique f puise les valeurs de sa variable x est généralement une partie de $\mathbb{R}$: un intervalle (ouvert ou fermé) ou une réunion d'intervalles. Ce peut être aussi une partie discrète (avec des trous) comme $\mathbb{N}$. Les suites (c.f. chapitre 3) sont des fonctions définies sur $\mathbb{N}$, à partir d'un certain rang. L'ensemble d'arrivée n'est généralement pas précisé mais il s'agit de $\mathbb{R}$ ou d'une partie de $\mathbb{R}$. La fonction carrée par exemple est définie sur $\mathbb{R}$ et prends ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ (tous les carrés sont positifs).
- Dans ce chapitre, le terme fonction désignera toujours une fonction numérique. Mais on peut définir des fonctions sur d'autres objets que les nombres, par exemple les points. La symétrie centrale, par exemple, est une fonction définie sur des points. Il faut aussi noter qu'une fonction peut être définie pour plusieurs variables. Le PGCD par exemple est une fonction de deux variables entières au minimum. Le volume d'un cylindre dépend à la fois de la hauteur h et du rayon r de la base. Dans ce cas, V est une fonction de deux variable et $V(h,r) = \pi r^2 h$.

Exemple 1 – On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^2 - 1$. On a :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (x-1)^2 - 1 \\ & 1 & \longmapsto & 0^2 - 1 = -1 \\ & 0 & \longmapsto & (-1)^2 - 1 = 0 \\ & \frac{1}{2} & \longmapsto & (\frac{-1}{2})^2 - 1 = \frac{-3}{4} \\ & \sqrt{2} & \longmapsto & (\sqrt{2}-1)^2 - 1 = 2(1-\sqrt{2}) \approx -0{,}828 \end{array}$$

Dans cet exemple, portant sur une fonction polynôme de degré 2 (c.f. chapitre 1), le nombre 0 a deux antécédents car l'équation $(x-1)^2 - 1 = 0$ a deux solutions : $x = 0$ et $x = 2$. Par contre, -2 n'a pas d'antécédent car $(x-1)^2 - 1 \geqslant -1$. Le seul nombre qui n'a qu'un seul antécédent par f est -1, et cet unique antécédent est 1.

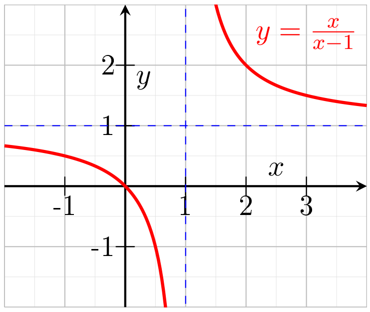
Définition 4.2 Soit f une fonction numérique. On appelle ensemble de définition de f, et on note généralement $\mathscr{D}_f$, l'ensemble des nombres pour lesquels $f(x)$ existe.

Exemple 2 – On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$.
Le nombre $g(x)$ existe pour tout $x \neq 1$. En effet si $x = 1$, pour calculer $g(x)$, il faudrait diviser par 0 ce qui est impossible. Donc $\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.
On doit distinguer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_g$ sur laquelle la fonction est définie et, dans une situation donnée, la restriction de $\mathscr{D}_g$ sur laquelle on va réellement utiliser la fonction. Dans cet exemple, si x représentait une longueur, on devrait nécessairement avoir $x \geqslant 0$. La restriction de $\mathscr{D}_g$ sur laquelle on travaille serait alors $\mathbb{R} \setminus \{1\} \cap \mathbb{R}^+ = [0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.

Définition 4.3 (Représentation graphique) Soit f une fonction numérique.
Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a une valeur $y = f(x)$; chaque couple $(x;y)$ peut être représenté par un point dans un repère.
L'ensemble des points de coordonnées $(x; y = f(x))$, lorsque x décrit $x \in \mathscr{D}_f$ est appelé courbe représentative de la fonction f. On la note généralement $\mathscr{C}_f$.

Remarque :
Bien entendu, on ne peut généralement pas tracer $\mathscr{C}_f$ en entier, car la plupart du temps l'ensemble de départ ou l'ensemble d'arrivée comporte une borne ouverte $\pm\infty$.

Dans ce cas, on trace un « segment » de la courbe complète. Le segment tracé relève d'un choix : on doit définir les paramètres de la fenêtre d'affichage (désignés souvent, sur les calculatrices, xMin, xMax, yMin et yMax).
Pour la courbe de la fonction g de l'exemple 2, nous avons affiché deux segments de la courbe $\mathscr{C}_g$: le premier pour $x \in [-2\ ;\ \frac{2}{3}]$ et le second pour $x \in [\frac{3}{2}\ ;\ 4]$. Les paramètres de la fenêtre d'affichage sont alors xMin=-2, xMax=4, yMin=-2 et yMax=3.



Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle $[a; b]$.

- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ c'est trouver les abscisses des points d'intersections de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$, c'est trouver les abscisses des points $M(x; f(x))$ et $N(x; g(x))$ tels que M est « au-dessus » de N.

<u>**Exemple**</u> :
Sur la figure ci-contre, on a tracé les représentations graphiques de deux fonctions f et g des exemples 1 et 2.

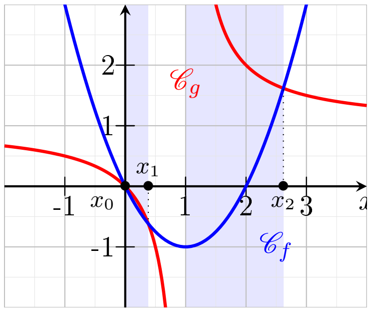
L'équation $f(x) = g(x)$ admet trois solutions :

$$\mathscr{S} = \{x_0; x_1; x_2\} \text{ avec}$$

$x_0 = 0$, $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,382$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2,618$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ est :

$$\mathscr{S}' = [x_0; x_1] \cup]1; x_2]$$

Nous avons colorié en bleu les zones où la courbe de f est en-dessous de la courbe de g dans lesquelles on trouve les solutions de l'inéquation.



Par exemple, pour $x = 2$, on a $x \in]1; x_2]$ et $M(2; f(2) = 0)$ est bien **au-dessous** de $N(2; g(2) = 2)$).
Par contre, pour $x = -1$, on a $x \notin \mathscr{S}'$ et $M(-1; f(-1) = 3)$ est **au-dessus** de $N(-1; g(-1) = \frac{1}{2})$).

Variations et extremums

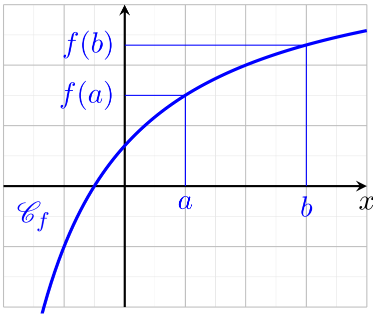
Définition 4.4 On dit qu'une fonction f est strictement croissante sur un intervalle I si pour tout a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$, et on note $\forall a, b \in I, a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$
De même, f est strictement décroissante sur un intervalle $I \Longleftrightarrow \forall a, b \in I, a < b \Longrightarrow f(a) > f(b)$.
Une fonction est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante ou décroissante.

<u>**Remarques**</u> :

- Graphiquement, une fonction est croissante (respectivement décroissante) si sa courbe « monte » (resp. « descend ») lorsqu'on se déplace de la gauche vers la droite.
- Une fonction est croissante au sens large (respectivement décroissante) sur I, si $\forall a, b \in I, a < b \Longrightarrow f(a) \geqslant f(b)$ (respect. $f(a) \leqslant f(b)$). Une fonction est monotone sur I si elle est croissante ou décroissante.
- Une fonction croissante conserve l'ordre des nombres alors qu'une fonction décroissante en inverse l'ordre.

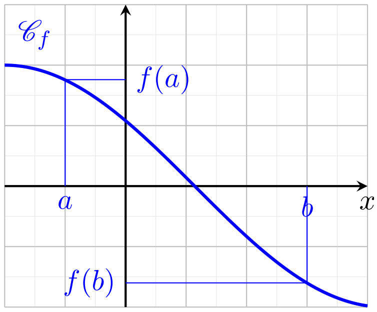
Définition 4.5 Soient f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et $x_0 \in I$.
On dit que $f(x_0)$ est le minimum de f sur I si $\forall x \in I, f(x_0) \leqslant f(x)$.
On dit que $f(x_0)$ est le maximum de f sur I si $\forall x \in I, f(x_0) \geqslant f(x)$.

Fonction strictement croissante :



Pour tous les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$. La courbe $\mathscr{C}_f$ « monte » lorsqu'on se déplace vers la droite.

Fonction strictement décroissante :



Pour tous les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$. La courbe $\mathscr{C}_f$ « descend » lorsqu'on se déplace vers la droite.

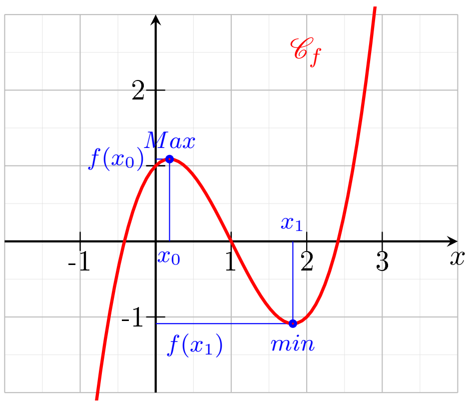
Propriété 4.1 (Condition extremum) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$. Si f est croissante pour $x \in I, x \leqslant x_0$ puis décroissante pour $x \in I, x \geqslant x_0$, alors f admet un maximum sur I. Elle atteint son maximum $f(x_0)$ pour $x = x_0$.
De même, Si f est décroissante pour $x \in I, x \leqslant x_0$ puis croissante pour $x \in I, x \geqslant x_0$, alors f admet un minimum sur I. Elle atteint son minimum $f(x_0)$ pour $x = x_0$.

Remarques

- Un extremum (minimum ou maximum) peut être identifié sur une partie seulement du domaine de définition. Dans ce cas, on parle de minimum local (ou maximum local).
- Le tableau de variation résume les informations sur le sens de variation, l'existence et la valeurs des extremums, ainsi que, on précisera ce point plus loin, les limites. Voir l'exemple qui suit concernant une fonction polynomiale du troisième degré. Le tableau de variation ainsi que la courbe permettent d'identifier un minimum local et un maximum local.

Exemple 3 –

On considère la fonction f définie par
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$$
La fonction est définie sur $\mathbb{R}$.
Elle admet un maximum local sur $]-\infty; 1]$
et un minimum local sur $[1; +\infty[$
(la valeur 1 est lue graphiquement).
Les valeurs exactes de x_0 et x_1 pourront être déterminées à l'aide de la fonction dérivée, à la fin de ce chapitre. Donnons le résultat :
$x_0 = \frac{3-\sqrt{6}}{3} \approx 0.1835$ et $x_1 = \frac{3+\sqrt{6}}{3} \approx 1.8165$
Pour évaluer les extremums locaux, il suffit alors de remplacer : $f(x_0) \approx 1.0887$ et $f(x_1) \approx -1.0887$.



Le tableau de variation de f résume les informations sur les variations de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		x_0		x_1		$+\infty$
$f(x)$		↗	$f(x_0)$	↘	$f(x_1)$	↗	

PROPRIÉTÉ 4.2 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Pour deux nombres distincts x_1 et x_2 de I, on note $\tau = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ le taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2.
La fonction f est croissante (respect. décroissante, strictement croissante, strictement croissante) sur I si et seulement si $\forall x_1, x_2 \in I, \tau \geqslant 0$ (respect. $\tau \leqslant 0$, $\tau > 0$, $\tau < 0$).

DÉMONSTRATION Pour deux valeurs distinctes x_1 et x_2 de I, si la différence $f(x_1) - f(x_2)$ est du même signe que $x_1 - x_2$, alors la fonction est croissante (l'ordre est conservé), d'où l'idée de s'interroger sur le signe du quotient (ou du produit). D'après la règle des signes, le rapport noté τ est positif si les deux facteurs sont de même signe. D'où $\tau > 0 \iff [x_1 - x_2 < 0 \implies f(x_1) - f(x_2) < 0]$, ce qui est la définition d'une fonction strictement croissante.
On raisonne de même pour $\tau < 0$, $\tau \leqslant 0$ et $\tau \geqslant 0$.

Dans la partie suivante, nous allons donner des exemples d'application de cette propriété.
Cette méthode étant parfois difficile à mettre en œuvre, on lui préfèrera la méthode qui sera étudiée plus loin, qui s'intéresse au signe de la dérivée. On substituera alors à l'étude du signe du taux d'accroissement, l'étude du signe de la dérivée.

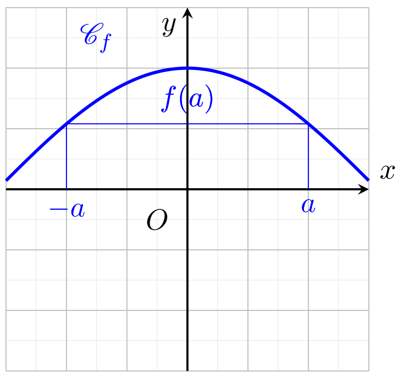
Parité, imparité

DÉFINITION 4.6 (PARITÉ) Soit f une fonction définie sur un intervalle I centré sur l'origine.
On dit que f est paire (respectivement impaire)si pour tout x de I, on a $f(-x) = f(x)$ (respect. $f(-x) = -f(x)$).

Remarques

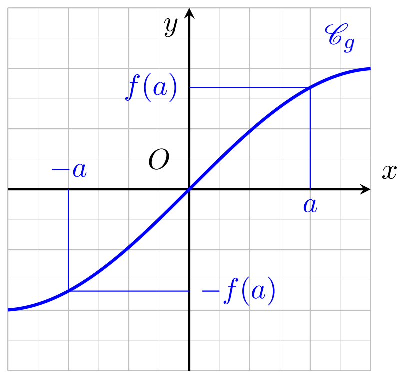
- La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f paire admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. La courbe d'une fonction impaire admet l'origine comme centre de symétrie. Cette caractérisation géométrique traduit exactement la définition.
- Un des intérêts de savoir qu'une fonction est paire ou impaire réside dans le fait que la connaissance des variations d'une telle fonction pour $x \geqslant 0$ entraîne automatiquement la connaissance de celles pour $x \leqslant 0$. Pour une fonction paire, les sens sont inversés de part et d'autre de l'origine, alors que pour une fonction impaire ils sont conservés.
- Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x^4}$ ou $x \mapsto \cos x$ sont paires alors que $x \mapsto x$, $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ ou $x \mapsto \sin x$ sont impaires.

La fonction f est paire



$\forall x \in I, f(-x) = f(x)$
La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à (Oy).

La fonction g est impaire



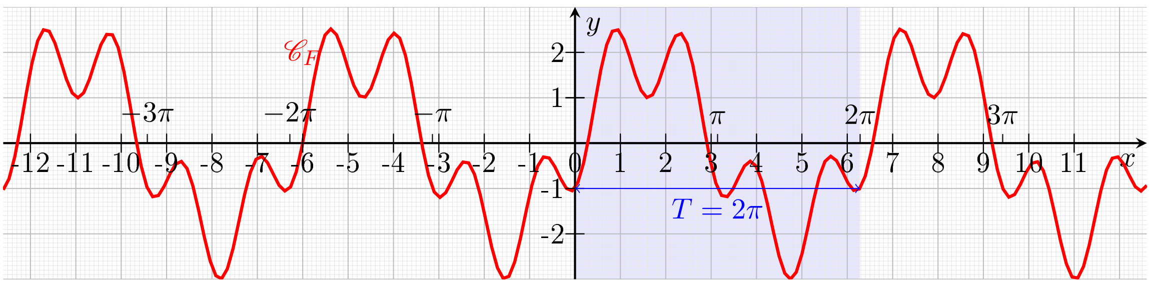
$\forall x \in I, g(-x) = -g(x)$
La courbe $\mathscr{C}_g$ est symétrique par rapport à O.

Définition 4.7 Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique de période $T > 0$ si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$ où T est le plus petit réel positif non nul vérifiant cette égalité.

Remarques :

- Cette définition a déjà été donnée dans le chapitre 3 car les fonctions trigonométriques sont les exemple-types de fonctions périodiques. Rappelons que sin et cos sont des fonctions périodiques de période 2π alors que tan est une fonction périodique de période π. Nous avons aussi remarqué que la fonction $S_{(a,b)}$ définie par $S_{(a,b)}(x) = \sin(ax+b)$, avec $a \neq 0$, est une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{a}$.
- Un des intérêts de savoir qu'une fonction est périodique réside dans le fait que la connaissance des variations d'une telle fonction sur un intervalle I d'amplitude T (la période) suffit à connaître les variations de la fonction sur $\mathbb{R}$. En effet, le motif dessiné par la courbe sur cet intervalle I est reproduit *ad libitum* par translations de vecteur $\lambda T\vec{i}$ où λ décrit $\mathbb{Z}$.

Exemple 4 – La fonction F représentée ci-dessous est périodique de période 2π. Il suffit d'en étudier les variations sur $[0; 2\pi]$ (ou sur $[-\pi; \pi]$ ou tout autre intervalle d'amplitude 2π) pour connaître tout des variations de F sur $\mathbb{R}$.



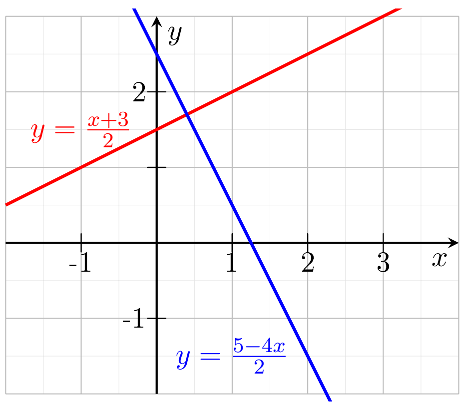
b. Fonctions usuelles

Rappelons tout d'abord quelques résultats de la classe de seconde.

Fonctions affines

Définition 4.8 Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite affine s'il existe deux réels m et p tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = mx + p$.

- Si $m > 0$, la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$
- Si $m < 0$, la fonction est décroissante sur $\mathbb{R}$
- Si $m = 0$, la fonction est constante sur $\mathbb{R}$



La représentation graphique d'une fonction affine dans un repère est la droite d'équation $y = mx + p$.
C'est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées, passant par le point de coordonnées $(0; p)$ et de coefficient directeur m.

Les fonctions linéaires sont des fonctions affines pour lesquelles le coefficient p vaut 0.

Le taux d'accroissement d'une fonction affine est constant, égal au coefficient directeur m, ce qui explique que le sens de variation soit fixé par le signe de m.

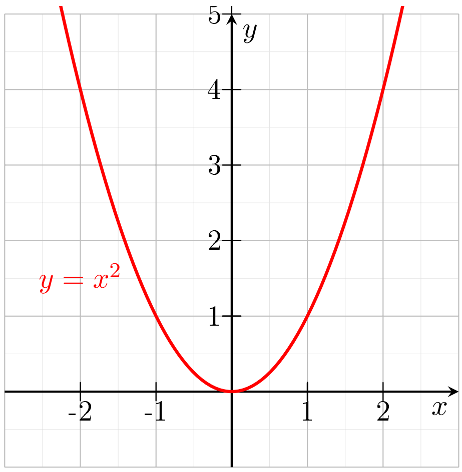
Fonction carré

La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto x^2$.
Taux de variation : $\tau = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$.
τ garde un signe constant tant que x_1 et x_2 sont de même signe. En particulier, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+, x_1 + x_2 > 0$. La fonction carré est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$.
De plus, comme $\forall x \in \mathbb{R}, (-x)^2 = x^2$, la fonction carré est paire. Sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$\searrow$	0	$\nearrow$

La fonction carré admet 0 comme minimum, atteint pour $x = 0$. Sa représentation graphique est une parabole de sommet O.



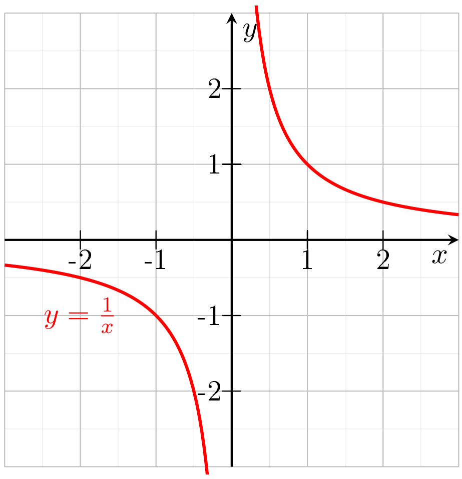
Fonction inverse

La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \frac{1}{x}$.
Taux de variation : $\tau = \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2 (x_1 - x_2)} = \frac{-1}{x_1 x_2}$.
τ est négatif sur les deux intervalles où la fonction inverse est définie. En particulier, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+, \tau < 0$. La fonction inverse est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$.
Attention, elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$!

De plus, comme $\forall x \neq 0, \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$, la fonction inverse est impaire. Sa représentation graphique est symétrique par rapport à O.
Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

Sa représentation graphique est une hyperbole.



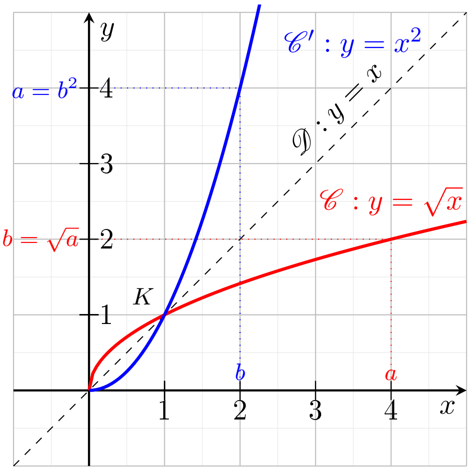
Fonction racine carrée

Définition 4.9 (fonction racine carrée) La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ qui à tout réel positif x associe sa racine carrée : $x \mapsto \sqrt{x}$, c'est-à-dire le seul nombre positif tel que $(\sqrt{x})^2 = x$.

Taux de variation : $\tau = \frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{x_1-x_2} = \frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})}{(x_1-x_2)(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})} = \frac{x_1-x_2}{(x_1-x_2)(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})} = \frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$.
Vous noterez, ici, l'utilisation de la « quantité conjuguée » de $\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}$ qui est $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$; le produit de ces deux quantités conjuguées supprimant les racines carrées grâce à l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$.
Comme le dénominateur $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ est la somme de deux nombres positifs, il est positif. τ est donc positif. La fonction racine carrée est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$\sqrt{x}$	0 $\nearrow$

Soient $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y=\sqrt{x}$, $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y=x^2$ et a et b deux réels positifs. On a :
$a=b^2$ et $b>0 \iff \begin{cases} b=\sqrt{a} \iff M(a;b)\in\mathscr{C} \\ \qquad\qquad M'(b;a)\in\mathscr{C}' \end{cases}$
Par conséquent, si on est dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de la fonction racine carrée et de la fonction carré sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.



Propriété 4.3 (Positions relatives de $x^2, x, \sqrt{x}$) Notons $\mathscr{D}$ la courbe d'équation $y=x$.
- Sur $]0;1[$, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$ alors que $\mathscr{C}'$ est en-dessous.
- Sur $]1;+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}'$ est en-dessous de $\mathscr{D}$ alors que $\mathscr{C}$ est au-dessus.
- Ces trois courbes passent toutes par les points $O(0;0)$ et $K(1;1)$.

Pour $x>1$: $\sqrt{x}<x<x^2$; pour $0>x>1$: $\sqrt{x}>x>x^2$; pour $x=0$ ou 1 : $\sqrt{x}=x=x^2$

Démonstration Cette propriété est évidente sur le graphique mais établissons-la algébriquement :
Prenons $0<x<1$ et multiplions cette inégalité par $x>0$, on obtient $0<x^2<x$. Sur cet intervalle, $\mathscr{C}'$ est donc en-dessous de $\mathscr{D}$. Comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$,
$0<x^2<x \Longrightarrow 0<x<\sqrt{x}$, donc $\mathscr{D}$ est en-dessous de $\mathscr{C}$.

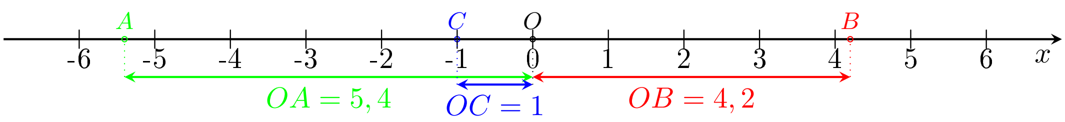
Pour $x>1$, en multipliant chaque membre par $x>0$, on obtient $x^2>x$, donc $\mathscr{C}'$ est au-dessus de $\mathscr{D}$ et, de même, en utilisant la croissance de la fonction racine carrée, $x>\sqrt{x}$, $\mathscr{D}$ est au-dessus de $\mathscr{C}$.

Enfin, on a $\sqrt{0}=0=0^2$, et $\sqrt{1}=1=1^2$, d'où le dernier point de la propriété.

Définition 4.10 (Fonction valeur absolue) La fonction valeur absolue est la fonction qui à un réel x associe sa valeur absolue : $x \mapsto |x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ si } x<0 \end{cases}$

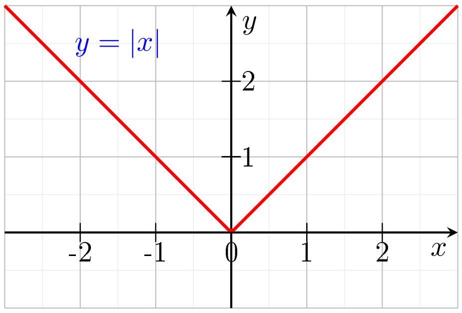
Remarque : Soient x un nombre réel, et M le point d'abscisse x de la droite réelle d'origine O.
La valeur absolue de x est la distance OM, on note : $OM=|x|$.
- Si $x\geqslant 0$, alors $OM = x_M - x_O = x-0 = x$
- Si $x\leqslant 0$, alors $OM = x_O - x_M = 0-x = -x$

Avec les points $A(-5,4)$, $B(4,2)$ et $C(-1)$, par exemple, on a $OA = |-5,4| = 5,4$, $OB=|4,2|=4,2$ et $OC=|-1|=1$.



Le sens de variation est celui de la fonction $x \mapsto x$ pour $x \in \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire croissant, et celui de la fonction $x \mapsto -x$ pour $x \in \mathbb{R}^-$, c'est-à-dire décroissant.
La fonction est paire car pour tout réel x, on a $|-x| = |x|$.
Elle passe par un minimum 0, atteint pour $x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		$\searrow$	0	$\nearrow$	



La représentation graphique est la réunion de deux demi-droites (la fonction valeur absolue est une fonction « affine par morceaux »). Cette courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
En plus des propriétés mentionnées, il faut remarquer que $|x| = \sqrt{x^2}$.
La fonction valeur absolue est souvent notée `abs` dans les langages de programmation.

Propriété 4.4 Soit $x \in \mathbb{R}$.

(i) $\forall y \in \mathbb{R}, |x| = |y| \iff (x = y \text{ ou } x = -y)$

(ii) $\forall y \in \mathbb{R}, |x \times y| = |x| \times |y|$, et pour $y \neq 0$, $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$

(iii) $\forall y \in \mathbb{R}^+, |x| < y \iff -y < x < y$, et $\forall y \in \mathbb{R}^+, |x| > y \iff x > y$ ou $x < -y$

Démonstration Ces propriétés découlent de la définition, en envisageant les différents cas.
Nous n'avons pas envisagé l'inégalité $|x| < y$ lorsque $y < 0$ car aucun nombre x ne convient alors.
Lorsque $y < 0$, par contre, l'inégalité $|x| > y$ est toujours vérifiée.

Exemple 5 – Supposons que l'on doive résoudre l'inéquation $|3x - 5| < x + 1$.
Il faut commencer par se placer dans un intervalle où $x + 1 > 0$, soit $x > -1$.

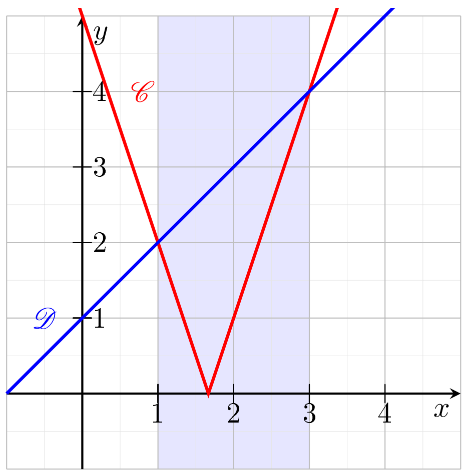
Ensuite, par application de la propriété (*iii*), on écrit :

$$-(x+1) < 3x - 5 < x + 1 \text{ soit,}$$

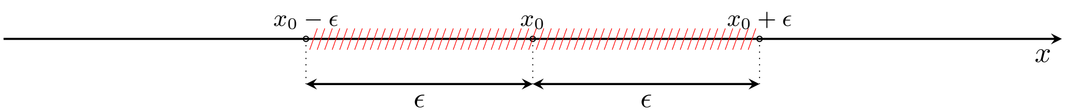
$$\begin{cases} 3x - 5 < x + 1 \iff 2x - 6 < 0 \iff x < 3 \\ -(x+1) < 3x - 5 \iff 4x - 4 > 0 \iff x > 1 \end{cases}$$

Pour avoir des solutions, il faut donc avoir simultanément : $x > -1$, $x < 3$ et $x > 1$ soit, finalement, $1 < x < 3$.

Illustration graphique :
Nous traçons la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = |3x - 5|$ qui est constituée de deux demi-droites d'équations :
$y = 3x - 5$ (lorsque $x > \frac{5}{3}$) et $y = -3x + 5$ (lorsque $x < \frac{5}{3}$)
Puis, nous traçons la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 5x + 1$
Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points où la courbe est en dessous de la droite (zone bleutée).



Remarque :
Un cas particulier de la propriété (*iii*) mérite d'être signalé.
$\forall x, x_0 \in \mathbb{R}, \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, |x - x_0| \leqslant \epsilon \iff -\epsilon \leqslant x - x_0 \leqslant \epsilon \iff x_0 - \epsilon \leqslant x \leqslant x_0 + \epsilon \iff x \in [x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon]$.



En effet, on peut interpréter $|x_A - x_B|$ comme la distance entre les points $A(x_A)$ et $B(x_B)$ d'un axe gradué et l'inégalité $|x_A - x_B| < \lambda$ où $\lambda \geqslant 0$ comme le fait que B ne s'écarte pas de A de plus de λ, soit $AB < \lambda$, ce qu'on peut interpréter des deux façons équivalentes :

$$x_B \in [x_A - \lambda; x_A + \lambda] \text{ ou } x_A \in [x_B - \lambda; x_B + \lambda]$$

c. Opérations sur les fonctions

Définition 4.11 Deux fonctions f et g sont dites égales si et seulement si :
- leurs ensembles de définition $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$ sont confondus
- pour tout x de cet ensemble, on a $f(x) = g(x)$

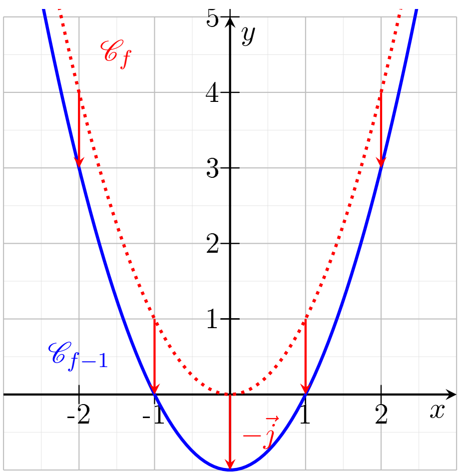
Dans ce cas, leurs courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont confondues.

Les fonctions que l'on va considérer ont souvent des ensembles de définition différents ; dans ce cas, on travaillera sur l'intersection $\mathscr{D} = \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$ des deux ensembles de définition, c'est-à-dire sur la partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ où les fonctions sont toutes les deux définies. On dit que l'on « restreint » les fonctions à $\mathscr{D}$.

Opérations simples

Définition 4.12 (Somme d'un réel) Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I et k un réel quelconque. La fonction $f + k$ est la fonction qui à $x \in I$ associe $f(x) + k$.

Exemple 6 – $f(x) = x^2$ et $k = -1$: la fonction $g = f + k$ définie par $g(x) = f(x) + k = x^2 - 1$ a le même sens de variation que la fonction carré, et la courbe représentative de la fonction g est obtenue à partir de celle de f par une translation de vecteur $-\vec{j}$ (décalage de 1 unité vers le bas).



Propriété 4.5 Soient f une fonction numérique définie et monotone sur un intervalle I et k un réel quelconque. Les fonctions $f + k$ et f ont le même sens de variation sur I et, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction $f + k$ se déduit de celle de f par translation de vecteur $k\vec{j}$.

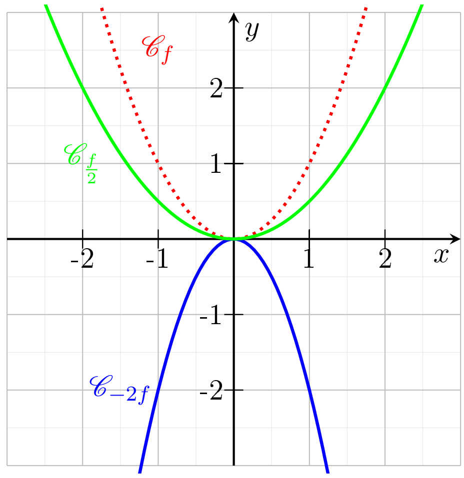
Démonstration Le taux de variation de g entre deux valeurs x_1, x_2 de l'intervalle I est

$$\tau = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_1) + k - (f(x_2) + k)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

C'est le même taux de variation que f, les deux fonctions ont donc même sens de variation sur I.
Soient $x \in I$, $M(x; f(x))$ le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et $M'(x; g(x))$ le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x.
Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour composantes $(x - x; g(x) - f(x))$, soit $(0; k)$ car $g(x) - f(x) = k$.
Si on est dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, il s'agit donc du vecteur $k\vec{j}$.
La courbe $\mathscr{C}_g$ est bien la translatée de $\mathscr{C}_f$ par le vecteur $k\vec{j}$.

Définition 4.13 Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I et k un réel quelconque. La fonction kf est la fonction qui à $x \in I$ associe $k \times f(x)$.

Exemple 7 – $f(x) = x^2$, $k = -2$ et $k' = \frac{1}{2}$:
La fonction $g = kf$ définie par $g(x) = -2x^2$ a des sens de variation opposés à ceux de la fonction carré
La fonction $g' = k'f$ définie par $g'(x) = \frac{x^2}{2}$ a les mêmes sens de variation que ceux de la fonction carré.



Propriété 4.6 Soient f une fonction numérique définie et monotone sur un intervalle I et k un réel quelconque.
Les fonctions kf et f ont le même sens de variation sur I si $k > 0$ et des sens opposés si $k < 0$.
La courbe représentative de kf se déduit de celle de f en multipliant par k l'ordonnée de chaque point de $\mathscr{C}_f$.

Démonstration Le taux de variation de $g = kf$ entre deux valeurs x_1, x_2 de l'intervalle I est

$$\tau = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{kf(x_1) - k(f(x_2))}{x_1 - x_2} = k\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

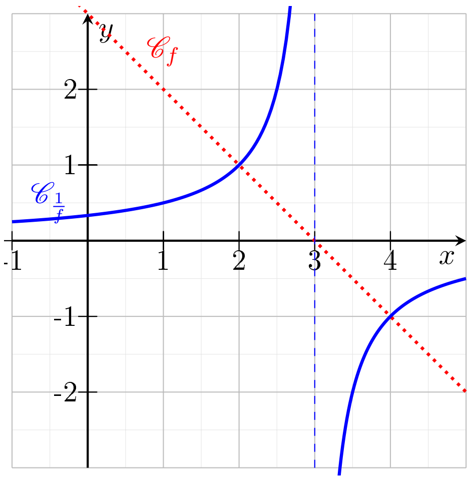
C'est le taux de variation de f multiplié par k, les deux fonctions ont donc même sens de variation sur I lorsque $k > 0$ et des sens opposés lorsque $k < 0$.
On peut noter que si $k = 0$, la propriété ne s'applique pas car kf est constante égale à 0 sur I.

Une remarque en passant : la multiplication par un réel de valeur absolue inférieure à 1 « aplatit » verticalement la courbe, alors que la multiplication par un réel de valeur absolue supérieure à 1 la « dilate », toujours dans le sens vertical.

Compositions

Définition 4.14 (fonction inverse) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie et qui ne s'annule pas sur I. La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ est définie sur I. Elle est appelée fonction inverse de f et notée $g = \frac{1}{f}$.

Exemple 8 – Soit $f : x \mapsto 3 - x$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Cette fonction s'annulant pour $x = 3$, on va définir la fonction inverse de f sur $I = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Cette fonction $g = \frac{1}{f}$ est définie sur I par $x \mapsto \frac{1}{3-x}$.
Sur $]-\infty; 3[$, la fonction f est définie, décroissante, ne s'annule pas et ne change pas de signe (son signe est positif). Par conséquent, la fonction inverse de f est également définie, et son sens de variation est, à l'opposé de celui de f, croissant.
Sur $]3; +\infty[$, la fonction f est définie, décroissante, ne s'annule pas et ne change pas de signe (son signe est négatif). Par conséquent, la fonction inverse de f est également définie, et son sens de variation est, à l'opposé de celui de f, croissant.



Pour définir $\frac{1}{f}$, il suffit de restreindre l'ensemble de définition de f aux parties où $f(x) \neq 0$.

PROPRIÉTÉ 4.7 Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I, ne s'annulant pas et ne changeant pas de signe sur I. La fonction $g = \frac{1}{f}$ a un sens de variation opposé à celui de f.

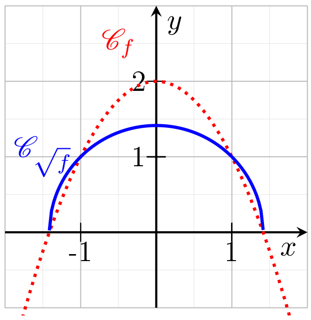
DÉMONSTRATION Le taux de variation de $g = \frac{1}{f}$ entre deux valeurs x_1, x_2 de l'intervalle I est

$$\tau = \frac{\frac{1}{f(x_1)} - \frac{1}{f(x_2)}}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{f(x_1)f(x_2)}}{x_1 - x_2} = \frac{-(f(x_1) - f(x_2))}{f(x_1)f(x_2)(x_1 - x_2)} = \frac{-1}{f(x_1)f(x_2)} \times \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

C'est le taux de variation de f multiplié par $\frac{-1}{f(x_1)f(x_2)}$. Comme la fonction f ne change pas de signe sur I, le produit $f(x_1)f(x_2)$ reste positif. Les taux de variations de f et g sont donc de signes opposés (à cause du -1 qui reste au numérateur), les deux fonctions ont donc des sens de variation opposés.

DÉFINITION 4.15 (RACINE CARRÉE) Soient I un intervalle et f une fonction définie et positive sur I ($\forall x \in I, f(x) \geqslant 0$). La fonction $g : x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est définie sur I. Elle est appelée fonction racine carrée de f et notée $g = \sqrt{f}$.

EXEMPLE 9 – Soit $f : x \mapsto= 2 - x^2$.
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et positive entre les racines de l'équation $2 - x^2 = 0$, soit pour $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$ (voir chapitre 1). La fonction racine carrée de f est donc définie sur l'intervalle $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ où la fonction f est positive.
La fonction f est croissante sur $[-\sqrt{2}; 0]$ puis décroissante sur $[0; \sqrt{2}]$ et de même pour la fonction $g = \sqrt{f}$.
Dans un repère orthonormé, la courbe de g est un demi-cercle, car $y = \sqrt{2 - x^2} \Longrightarrow y^2 = 2 - x^2$, ce qui correspond bien à l'équation du cercle de centre$O$ et de rayon $\sqrt{2}$. L'autre demi-cercle a pour équation $y = -\sqrt{2 - x^2}$.



Pour définir $\sqrt{f}$, il suffit de restreindre l'ensemble de définition de f aux parties où $f(x) \geqslant 0$.

PROPRIÉTÉ 4.8 Soient I un intervalle et f une fonction définie et positive sur I. La fonction $\sqrt{f}$ a même sens de variation que f sur I.

DÉMONSTRATION Le taux de variation de $g = \sqrt{f}$ entre deux valeurs x_1, x_2 de l'intervalle I est

$$\begin{aligned}\tau = \frac{\sqrt{f(x_1)} - \sqrt{f(x_2)}}{x_1 - x_2} &= \frac{(\sqrt{f(x_1)} - \sqrt{f(x_2)})(\sqrt{f(x_1)} + \sqrt{f(x_2)})}{(x_1 - x_2)(\sqrt{f(x_1)} + \sqrt{f(x_2)})} = \frac{(\sqrt{f(x_1)})^2 - (\sqrt{f(x_2)})^2}{(x_1 - x_2)(\sqrt{f(x_1)} + \sqrt{f(x_2)})} \\ &= \frac{f(x_1) - f(x_2)}{(x_1 - x_2)(\sqrt{f(x_1)} + \sqrt{f(x_2)})} = \frac{1}{\sqrt{f(x_1)} + \sqrt{f(x_2)}} \times \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\end{aligned}$$

C'est le taux de variation de f multiplié par $\frac{1}{\sqrt{f(x_1)}+\sqrt{f(x_2)}}$. Comme $\sqrt{f(x_1)}$ et $\sqrt{f(x_2)}$ sont toujours positifs, leur somme l'est aussi. Les taux de variations de f et g sont donc de même signe, les deux fonctions ont donc les mêmes sens de variation.

Le cas problématique où $\sqrt{f(x_1)}$ et $\sqrt{f(x_2)}$ sont nuls tous les deux en même temps doit être écarté en considérant une restriction de I sur laquelle $\sqrt{f(x)}$ ne s'annule qu'une seule fois. Comme x_1 et x_2 sont différents, la somme $\sqrt{f(x_1)}+\sqrt{f(x_2)}$ ne peut alors pas être nulle et le quotient $\frac{1}{\sqrt{f(x_1)}+\sqrt{f(x_2)}}$ est bien défini et positif. Cette situation se produit dans notre exemple, puisque $\sqrt{2 - x^2}$ s'annule deux fois (pour $-\sqrt{2}$ et pour $\sqrt{2}$). En considérant séparément les intervalles $[-\sqrt{2}; 0]$ et $[0; \sqrt{2}]$, notre raisonnement permet de conclure. Notez que pour ces points « problématiques », la courbe de g est verticale (elle a une tangente verticale). On verra plus loin que cela correspond aux points où la fonction dérivée n'est pas définie.

DÉFINITION 4.16 (COMPOSÉE MONOTONE) Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I, à valeurs dans J, et soit g une fonction définie J. La fonction $x \mapsto g(f(x))$ est définie sur I. Elle est appelée fonction composée de f suivie de g et notée $g \circ f$.

Remarques : Les deux précédentes propriétés concernent des compositions :

- la fonction $g = \frac{1}{f}$ est la composée de f suivie de $x \mapsto \frac{1}{x}$
- la fonction $g = \sqrt{f}$ est la composée de f suivie de $x \mapsto \sqrt{x}$

On peut imaginer composer théoriquement toutes les fonctions entre elles. Nous n'envisagerons pas toutes les possibilités qui sont infinies, mais on peut donner l'exemple d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ et de la fonction sinus $g : x \mapsto \sin(x)$. Les composées $f \circ g$ et $g \circ f$ sont différentes car $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sin(x)) = a\sin(x) + b$, alors que $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(ax + b) = \sin(ax + b)$.

PROPRIÉTÉ 4.9 Soient I un intervalle et f une fonction définie et monotone sur I, à valeurs dans J, et soit g une fonction définie et monotone sur J. La composée $g \circ f$ est monotone : elle est croissante si f et g sont de même monotonie et décroissante sinon.
N.B. : même monotonie = toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes

DÉMONSTRATION Le taux de variation de $g \circ f$ entre deux valeurs x_1, x_2 de l'intervalle I est

$$\tau = \frac{g \circ f(x_1) - g \circ f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{g(f(x_1)) - g(f(x_2))}{f(x_1) - f(x_2)} \times \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

C'est le taux de variation de g multiplié par le taux de variation de f.
Si ces deux taux gardent le même signe, et c'est le cas lorsque les fonctions f et g sont de même monotonie, alors ce produit est positif et la fonction composée est croissante.
Si ces deux taux sont de signes contraires, et c'est le cas lorsque les fonctions f et g sont de monotonies différentes, alors ce produit est négatif et la fonction composée est décroissante.

2. Notion de limite

Dans la partie 3 du chapitre 3, nous avons étudié la notion de limite en $+\infty$ pour une suite. Ici, cette notion doit être élargie aux fonctions numériques, et pas seulement au voisinage de $+\infty$. Il faudra bien sûr inclure le voisinage de $-\infty$, mais aussi le voisinage d'un point a. Par exemple, étudier ce qui se passe pour la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-2}$ lorsque x est dans un voisinage de 2, la valeur interdite.
L'objectif est double : étudier les comportements asymptotiques des fonctions aux bornes de leurs ensembles de définition, et mettre en place la notion de fonction dérivée, obtenue par « passage à la limite » d'un taux de variation.

a. Limite en $\pm\infty$

DÉFINITION 4.17 (FONCTION DE LIMITE $+\infty$) Une fonction f admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$ si, quel que soit le nombre A, à partir d'une certaine valeur x_0 de x, on a $f(x) > A$. Autrement dit :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x > x_0, f(x) > A$

Remarques : On a une définition analogue pour les fonctions de limite $-\infty$ en $+\infty$:
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x > x_0, f(x) < A$

De même, on définit ce que signifie, pour une fonction numérique, avoir une limite $\pm\infty$ en $-\infty$:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x < x_0, f(x) > A$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x < x_0, f(x) < A$
On dit « f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ » ou bien « f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ ».

Propriété 4.10 Chacune des fonctions suivantes a pour limite $+\infty$ en $+\infty$:
$x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, etc. (soit $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $x \mapsto \sqrt{x}$

Démonstration Montrons cela pour la fonction $x \mapsto x^2$.
Pour tout nombre $A > 0$ on peut trouver x_0 à partir duquel tous les carrés sont plus grands que A : il s'agit de $x_0 = \sqrt{A}$ car, pour $x > 0$, $x^2 > A \iff x > \sqrt{A}$.
Pour les autres valeurs de l'exposant $n \geqslant 1$: comme $x^n > x^{n-1}$ pour tout $x \geqslant 1$ (en multipliant par $x^{n-1} > 0$), $x > \sqrt{A} \Longrightarrow x^n > x^2 > A$ et donc, x^n dépasse n'importe quelle valeur A arbitrairement choisie pourvu que x soit assez grand.
Pour la fonction racine, la valeur x_0 à partir de laquelle $\sqrt{x}$ dépasse n'importe quelle valeur A arbitrairement choisie, est $x_0 = A^2$.
Les fonctions puissances et la fonction racine tendent donc toutes vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Définition 4.18 (Fonction de limite finie) Une fonction f à valeurs positives sur $[a;+\infty[$, admet 0 comme limite en $+\infty$ si, quel que soit le nombre $A > 0$, à partir d'une certaine valeur x_0 de x, on a $f(x) < A$. Autrement dit :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \iff \forall A > 0,\ \exists x_0 > a,\ \forall x > x_0, f(x) < A$
l étant un réel, une fonction f admet l comme limite en $+\infty$ si la fonction $f - l$ admet pour limite 0 en $+\infty$. Autrement dit, s'il existe une fonction φ de limite 0 en $+\infty$, telle que $f(x) = l + \varphi(x)$.

Remarques :

- De la première partie, on tire une définition de la limite 0 en $+\infty$ pour une fonction de signe quelconque : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \iff \lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = 0$
- Notons que toutes les fonctions n'ont pas forcément une limite en $+\infty$:
  $x \mapsto \sin(x)$ par exemple n'a pas de limite.
- D'une façon générale tout ce qui a été énoncé concernant la limite en $+\infty$ est transposable au voisinage de $-\infty$. Des limites énoncées dans la propriété 4.10, on déduit notamment :
  — comme la fonction carré est paire, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
  — comme la fonction cube est impaire, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

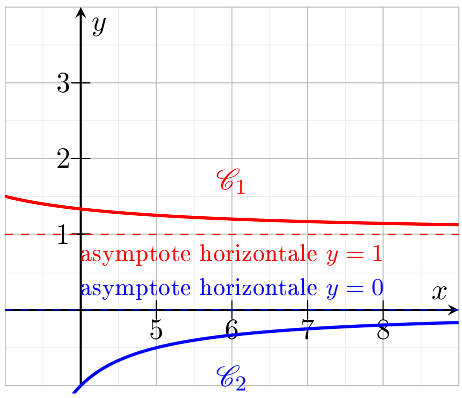
Propriété 4.11 Chacune des fonctions suivantes a pour limite 0 en $+\infty$:
$x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x^3}$, etc. (soit $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$

Démonstration Montrons cela pour la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
Pour tout nombre $A > 0$ on peut trouver x_0 à partir duquel toutes les inverses sont plus petites que A : il s'agit de $x_0 = \frac{1}{A}$ car, pour $x > 0$, $\frac{1}{x} < A \iff x > \frac{1}{A}$.
Pour les autres valeurs de l'exposant $n > 0$, il suffit de remarquer encore que, comme $x^n > x^{n-1}$ pour tout $x \geqslant 1$, on déduit $\frac{1}{x^n} < \frac{1}{x^{n-1}} < \cdots < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x}$ et donc $\forall n > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.
Pour la fonction racine, la valeur x_0 à partir de laquelle $\frac{1}{\sqrt{x}}$ devient inférieur à n'importe quelle valeur A arbitrairement choisie, est $x_0 = \frac{1}{A^2}$.

Exemples et interprétations graphiques : Si une fonction f a une limite finie l en $+\infty$, la courbe de f se rapproche de plus en plus de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = l$. Cette droite est appelée « asymptote horizontale » pour la courbe $\mathscr{C}_f$. On dit que la courbe tend asymptotiquement vers la droite : elle s'en rapproche sans jamais être confondue avec elle.

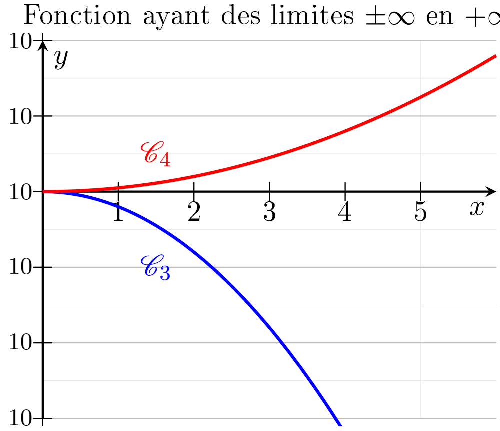
- La fonction g_1 de l'exemple 2 définie par $g_1(x) = \frac{x}{x-1}$ a pour limite $l = 1$ en $+\infty$, car $\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$. Cette fonction s'écrit $g_1(x) = 1 + \varphi(x)$ où $\varphi(x) = \frac{1}{x-1}$ est une fonction de limite nulle en $+\infty$ (on justifiera cela plus loin avec les théorèmes de comparaison). La courbe de g_1 tend asymptotiquement vers la droite d'équation $y = 1$ (notée $\mathscr{C}_1$ sur le graphique de gauche).
- La fonction g_2 de l'exemple 8 $x \mapsto \frac{1}{3-x}$ tend, quant-à elle, vers 0 en $+\infty$ (notée $\mathscr{C}_2$).
- Les fonction g_3 et g_4 de l'exemple 7 définies par $g_3(x) = -2x^2$ et $g_4(x) = \frac{x^2}{2}$, ont une limite infinie. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} g_3(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g_4(x) = +\infty$ (la détermination de ces limites est très simple à l'aide des théorèmes qui suivent). Les courbes sont notées $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ sur le graphique de droite.

Fonction ayant des limites finies en $+\infty$:



La courbe s'approche de son asymptote horizontale (limite finie).

Fonction ayant des limites $\pm\infty$ en $+\infty$:



La courbe dépasse toute valeur arbitraire A vers le haut (limite $+\infty$) ou vers le bas (limite $-\infty$).

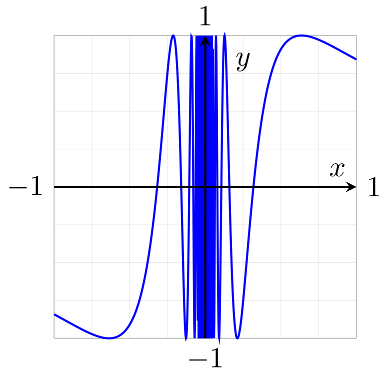
b. Limite en un point

DÉFINITION 4.19 (LIMITE EN UN POINT) Une fonction f admet 0 comme limite en a si, quel que soit le nombre A, dès que x est assez proche de a, la valeur absolue de $f(x)$ est plus proche de 0 que A. Autrement dit :
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \epsilon > 0, |x - a| < \epsilon \implies |f(x)| < A$
l étant un réel, une fonction f admet l comme limite en a si la fonction $f - l$ admet pour limite 0 en a. Autrement dit, s'il existe une fonction φ de limite 0 en a, telle que $f(x) = l + \varphi(x)$.

Remarques :

- La question de la limite en un point a est un problème à résoudre lorsqu'on est au bord de l'ensemble de définition de la fonction. Sinon, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Prenons un exemple : la fonction $f : x \mapsto \frac{(1+x)^3-1}{x}$ n'est pas définie pour $x = 0$. On ne peut pas remplacer x par 0 (le résultat n'est pas défini), et on ne peut simplifier par x que si $x \neq 0$. Dans ce cas, on simplifie par $x \neq 0$ et on fait « tendre » x vers 0.
Pour $x \neq 0$, on a $f(x) = \frac{(1+x)^3-1}{x} = \frac{1+3x^2+3x+x^3-1}{x} = \frac{x(3x+3+x^2)}{x} = 3x + 3 + x^2$.
La simplification finale n'est possible que si $x \neq 0$, vous l'avez noté. Cependant, l'expression obtenue est définie jusqu'à être infiniment proche de 0. Et que se passe t-il pour $3x + 3 + x^2$ quand x s'approche infiniment près de 0 ? Et bien cette quantité s'approche de 3. Et on peut écrire $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$.

- Toutes les fonctions n'ont pas nécessairement une limite en un point.
  Par exemple la fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0 : quand x s'approche de 0, $\frac{1}{x}$ tend vers l'infini, et la fonction sin continue bravement à osciller entre -1 et $+1$ pour chaque intervalle d'amplitude 2π. La courbe obtenue contient une infinité d'oscillations dans la zone bleutée. On peut dilater cette zone autant qu'il nous plait, il y aura toujours cette zone au voisinage de 0.



- La deuxième partie de cette définition étend la définition d'une limite en un point à toute valeur finie l. On peut ramener la recherche d'une limite en un point a, à la recherche de la limite en 0, en considérant que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h)$. Il suffit pour cela d'effectuer le changement de variable $x = a + h$. Lorsque h tend vers 0, x tend bien vers a.
  Prenons un exemple :

  la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2-x-2}{x-2}$ n'est pas définie pour $x = 2$.
  On ne peut pas remplacer x par 2 (le résultat n'est pas défini).
  Par contre, en écrivant $x = 2 + h$, on a $f(2+h) = \frac{(2+h)^2-(2+h)-2}{(2+h-2)^2} = \frac{h^2+3h}{h} = h + 3$.
  Quand on fait tendre x vers 2, soit h vers 0, $h + 3$ tend vers 3, et on a $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$.
  En fait, $f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x-2}$ se simplifie, lorsque $x \neq 2$, en $f(x) = (x+1)$, et nous venons de montrer que pour la valeur interdite $x = 2$, l'expression $f(x) = x + 1$ reste valable (puisque $2 + 1 = 3$). La fonction f peut être « prolongée par continuité » en la fonction affine $x \mapsto x + 1$ qui, elle, est définie sur $\mathbb{R}$.

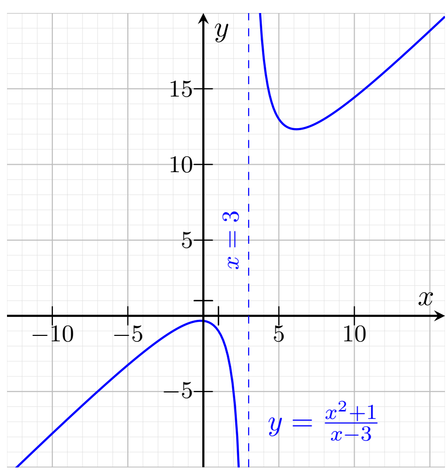
Définition 4.20 (Limite infinie en un point) Une fonction f admet $+\infty$ comme limite en a si, quel que soit le nombre A, dès que x est assez proche de a, on a $f(x) > A$. Autrement dit : $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \epsilon > 0, |x - a| < \epsilon \Longrightarrow f(x) > A$

Remarques :

- On définit de même ce que signifie $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.
- Lorsque la limite d'une fonction f en a est $\pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une « asymptote verticale » à la courbe représentative de f (la courbe s'approche de son asymptote sans jamais l'atteindre).

Exemple 10 – La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+1}{x-3}$ n'est pas définie pour $x = 3$.

En écrivant $x = 3 + h$, on a
$f(3+h) = \frac{(3+h)^2+1}{3+h-3} = \frac{h^2+6h+10}{h} = h + 6 + \frac{10}{h}$.
Quand on fait tendre x vers 3, soit h vers 0, $h+6$ tend vers 6, mais $\frac{10}{h}$ tend vers l'infini. Il parait alors évident que $f(3+h)$ tend vers l'infini : $\lim_{x \to 3} f(x) = \pm\infty$.
La droite d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f. Comme f est définie des deux côtés de la valeur interdite $x = 3$, il y a deux limites : la limite à gauche (quand x tend vers 3 tout en étant inférieur à 3) notée $\lim_{x \to 3^-} f(x)$, et la limite à droite (quand x tend vers 3 tout en étant supérieur à 3) notée $\lim_{x \to 3^+} f(x)$.
Ici, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$.



Propriété 4.12 (Limites de référence en 0) Chacune des fonctions suivantes a pour limite 0 en 0 : $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, etc. (soit $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $x \mapsto \sqrt{x}$.
n étant un entier non nul, les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ont pour limite $+\infty$ en 0, excepté lorsque n est impair, la limite à gauche de 0 est alors $-\infty$.

Démonstration Pour ne pas trop nous répéter, nous laissons cette démonstration au lecteur.

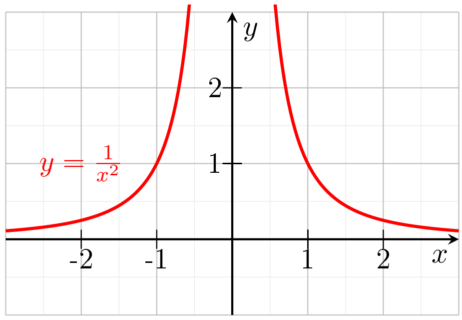
Remarque :

La fonction inverse correspond à $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ pour $n = 1$. n étant impair, on a $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, ce que l'examen de la courbe (page 81) laissait déjà supposer.
On peut alors compléter le tableau de variation de cette fonction, en y faisant figurer les limites en 0 et aussi en $\pm\infty$.

x	$-\infty$	0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0 ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

Pour $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $n = 2$ étant pair, la propriété affirme que les deux limites (à gauche et à droite de 0) sont $+\infty$.

Cela se voit sur la courbe et se note dans le tableau des variations de cette fonction.



x	$-\infty$	0		$+\infty$
$\frac{1}{x^2}$	0 ↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

c. Théorèmes sur les Limites

Dans cette section, nous allons reprendre sans les démontrer, les différents théorèmes qui ont déjà été exposés dans le chapitre sur les suites. Pour une suite, il ne s'agissait que de la limite éventuelle en $+\infty$. Il faut donc ici transposer ces théorèmes pour les limites éventuelles des fonctions en $-\infty$ et en un point a.

Théorème 4.1 (croissance non majorée) Toute fonction croissante non majorée, définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$, a pour limite $+\infty$. De même, toute fonction décroissante non minorée, définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$, a pour limite $-\infty$.

Remarques : Cette propriété traduit la notion de limite.
Á titre d'exemple de transposition, nous pouvons énoncer la propriété suivante : toute fonction décroissante non majorée, définie sur un intervalle de la forme $]a; b]$, a pour limite $+\infty$ en a.

Théorème 4.2 (croissance majorée) Toute fonction croissante et majorée admet une limite l qui est le plus petit majorant de la fonction.
De même, pour toute fonction décroissante et minorée : sa limite est le plus grand des majorants.

Théorème 4.3 (somme et produit par un réel) Soient f une fonction qui tend vers $+\infty$ et k un réel non nul.

- La fonction $(f + k)$ tend vers $+\infty$ et, si $k > 0$, la fonction (kf) aussi
- Si $k < 0$, la fonction (kf) tend vers $-\infty$

Théorème 4.4 (Somme et Produit de fonctions) Soient f et g deux fonctions ayant une limite, finie ou infinie. Les fonctions $f+g$ et $f\times g$, admettent ou non une limite selon les différents cas exposés par les deux tableaux ci-dessous :

Fonction « somme » : $(f+g)$

$\lim g$ \ $\lim f$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$

Fonction « produit » : $(f\times g)$

$\lim g$ \ $\lim f$	$l\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l'\neq 0$	$l\times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Théorème 4.5 (Quotient de fonctions) Soient f et g deux fonctions ayant une limite, finie ou infinie. La fonction quotient $\frac{f}{g}$ admet ou non une limite selon les différents cas exposés par le tableau ci-dessous :

$\lim g$ \ $\lim f$	l	$+\infty$	$-\infty$
$l\neq 0$	$\frac{l}{l'}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0		
$-\infty$	0		

Théorème 4.6 (Majoration) Soient f et g deux fonctions.
Si, à partir d'un certain réel x_0, on a $f\geqslant g$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
De même, si à partir d'un réel x_0, on a $f\leqslant g$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Théorème 4.7 (Gendarmes) Soient f, g et h trois fonctions. Si, à partir d'un certain réel x_0, on a $g\leqslant f\leqslant h$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=l$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

Exemple 11 – La fonction $f : x\mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.
Déterminons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, soit en 0 et en $\pm\infty$.

Lorsque $x>0$, on a $0<1<2x+1$ et, en ajoutant $x^2>0$, on obtient l'encadrement $x^2<1+x^2<(1+x)^2$.
Comme la fonction racine carrée est croissante, cela implique que $x<\sqrt{1+x^2}<1+x$.
En divisant par $x>0$, on obtient l'encadrement de $f(x)$

$$1<f(x)<1+\frac{1}{x}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}=1$, d'après le théorème 4.7, on peut donc conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

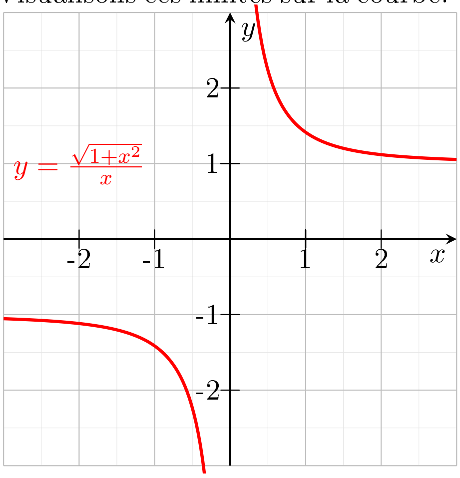
Au voisinage de 0+ (x tend vers 0 et $x>0$), la majoration $f(x)<1+\frac{1}{x}$ ne permet pas de conclure.
Par contre, on peut remarquer que $1<\sqrt{1+x^2}$ et donc

$$\frac{1}{x}<f(x)$$

Comme $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, d'après le théorème 4.6, on peut donc conclure que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$.

Voilà pour les deux bornes ouvertes positives de $\mathscr{D}_f$. Pour les deux autres, il suffit de remarquer que la fonction est impaire. En effet, $f(-x)=\frac{\sqrt{1+(-x)^2}}{-x}=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=-f(x)$. Les limites seront donc « symétriques » par rapport à O : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$.

Visualisons ces limites sur la courbe.



Complétons le tableau de variation.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

Méthode (Fonction polynôme)
Pour une fonction polynôme de degré p : $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$, la limite au voisinage de $\pm\infty$ est celle du terme dominant (celui de plus haut degré) :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sum_{k=0}^{p} a_k x^k = \lim a_p x^p$$

- Au voisinage de $+\infty$: si $a_p > 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ mais si $a_p < 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
- Au voisinage de $-\infty$, on doit tenir compte de la parité de p :
  — Si $a_p > 0$ et p pair, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, si $a_p > 0$ et p impair, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
  — Si $a_p < 0$ c'est l'inverse : si p pair, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; si p impair, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$).

La généralité énoncée s'étend aux fonctions polynomiales ayant des termes de degré négatif.
La fonction f définie par $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 1 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}$, par exemple, a un comportement au voisinage de $\pm\infty$ qui est celui du terme de plus haut degré (de $-x^3$ ici).
Pour ce type de fonctions, la limite au voisinage de 0 est déterminée par le terme de degré négatif le plus petit (par $\frac{7}{x^2} = 7x^{-2}$ ici). La règle qui s'applique alors a été vue dans la propriété 4.12.

3. Fonction dérivée

a. Nombre dérivé

Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative, x_0 et x deux réels distincts de l'intervalle I tels que $x = x_0 + h$, où h est un réel non nul.

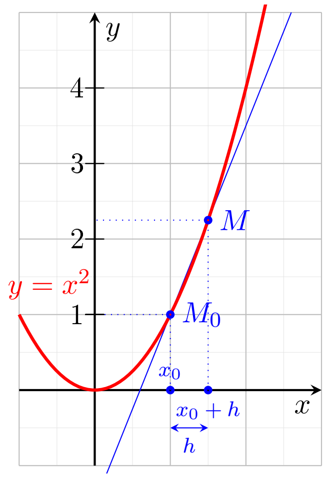
Droite sécante à une courbe

On note M_0 le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x_0, et M celui d'abscisse x.
Le coefficient directeur de la droite (M_0M) est le taux de variation de f entre x_0 et $x_0 + h$:

$$\tau = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Pour $f : x \mapsto x^2$, le coefficient directeur de la droite (M_0M) est :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h$$

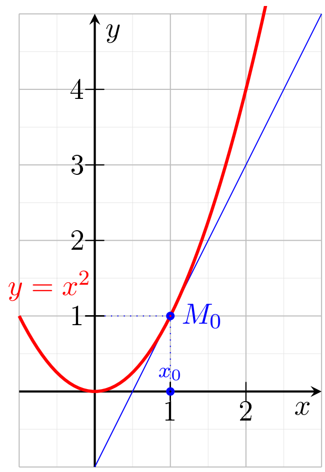


Droite tangente à une courbe

Avec les notations précédentes, si le point M de $\mathscr{C}$ se rapproche « infiniment près » du point M_0, autrement dit si l'on fait tendre x vers x_0, c'est-à-dire h vers 0, la droite (M_0M) s'approche de la « tangente » à la courbe $\mathscr{C}$ au point M_0. La pente de (M_0M) lorsque $h \to 0$ est la pente de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M_0. Elle est égale à

$$\lim_{h\to 0} \tau = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Pour $f : x \mapsto x^2$, cette pente vaut $2x_0$.



Nombre dérivé

DÉFINITION 4.21 [Nombre dérivé] Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel x_0. On dit que f est dérivable en x_0 si le quotient $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite l finie. Cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0 et notée $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Comme on l'a vu plus haut, la fonction $f : x \mapsto x^2$, est dérivable en x_0 et on a $f'(x_0) = 2x_0$.
$2x_0$ est la pente de la tangente en $\mathscr{C}$, la courbe représentative de f, au point M_0 d'abscisse x_0.

PROPRIÉTÉ 4.13 (INTERPRÉTATION GRAPHIQUE) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $x_0 \in I$. La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ a pour équation :

$$T : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

DÉMONSTRATION Si la fonction f est dérivable en x_0, la tangente T à $\mathscr{C}$ en $M_0(x_0, f(x_0))$ admet un coefficient directeur qui est $f'(x_0)$. Son équation est donc du type $y = f'(x_0)x + p$ $(\star)$.
Comme $M_0(x_0, f(x_0)) \in T$, on doit avoir : $f(x_0) = f'(x_0) \times x_0 + p$.
On en déduit que $p = f(x_0) - f'(x_0) \times x_0$, et en remplaçant dans $(\star)$ on obtient :
$y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 \times f'(x_0)$, et donc $T : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

EXEMPLE 12 – Pour $f : x \mapsto x^2$, le coefficient directeur de la tangente en (M_0) est $2x_0$.
L'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en (M_0) est donc $y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2$, soit $y = 2x_0x - x_0^2$.

Pour $x_0 = 3$, on a $T_3 : y = 6x - 9$ (en jaune).

Pour $x_0 = 2$, on a $T_2 : y = 4x - 4$ (en magenta).

Pour $x_0 = 1$, on a $T_1 : y = 2x - 1$ (en bleu).

Pour $x_0 = \frac{1}{2}$, on a $T_{\frac{1}{2}} : y = x - \frac{1}{4}$ (en vert).

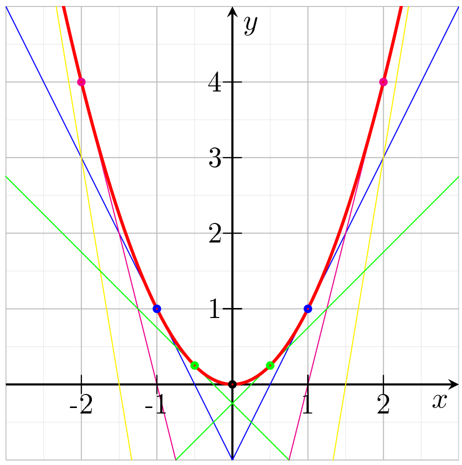
Pour $x_0 = 0$, on a $T_0 : y = 0$ (tangente horizontale, en noir).

Pour $x_0 = -\frac{1}{2}$, on a $T_{-\frac{1}{2}} : y = -x - \frac{1}{4}$ (en vert).

Pour $x_0 = -1$, on a $T_{-1} : y = -2x - 1$ (en bleu).

Pour $x_0 = -2$, on a $T_{-2} : y = -4x - 4$ (en magenta).

Pour $x_0 = -3$, on a $T_{-3} : y = -3x - 9$ (en jaune).



Interprétation cinématique

On considère un objet en mouvement et on note t la durée (en secondes) de son parcours et $f(t)$ la distance (en mètres) parcourue après t secondes.
La distance parcourue entre deux instants t_1 et t_2 est égale à $f(t_2) - f(t_1)$.
La vitesse moyenne de l'objet entre les instants t_1 et t_2 est le rapport entre la distance parcourue $f(t_2) - f(t_1)$ et la durée du parcours $t_2 - t_1$. Cette vitesse moyenne est donc égale au taux d'accroissement de la fonction f entre t_1 et t_2 : $\tau = \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$.
Lorsque les instants t_1 et t_2 deviennent « infiniment proches », le rapport τ prend une valeur limite, le nombre dérivé de f en $t_1 = t_2$ qui correspond à ce qu'on appelle la « vitesse instantanée » de l'objet à l'instant $t_1 = t_2$ (la vitesse indiquée par le tachymètre d'une voiture, ou de tout objet en mouvement).

DÉFINITION 4.22 :
La vitesse instantanée $V(t_0)$ à l'instant t_0 d'un objet parcourant $f(t)$ mètres en t secondes est égale au nombre dérivé de la fonction f en t_0 :

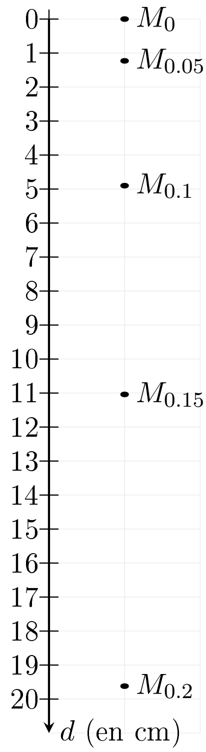
$$V(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

EXEMPLE 13 – Quand on lâche un objet, la distance qu'il parcourt dans sa chute après t secondes est donnée par la relation $f(t) = \frac{1}{2}gt^2$ m, où $g \approx 9,81 \text{m.s}^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur.

La vitesse instantanée de l'objet après une chute de t secondes est la limite quand $h \longrightarrow 0$ de la vitesse moyenne entre les instants t et $t + h$. Or cette vitesse moyenne est :

$$v = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h} = \frac{\frac{1}{2}g(t^2 + 2th + h^2) - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$
$$= \frac{1}{2}g\frac{2th + h^2}{h} = \frac{1}{2}g(2t + h) = gt + \frac{gh}{2}$$

Lorsque h tend vers 0, ce quotient tend vers gt.
La vitesse instantanée d'un objet en chute libre est $v(t) = f'(t) = gt$.
Cette vitesse de chute libre est proportionnelle à la durée de la chute.
Remarquons que les expressions de $f(t)$ et $f'(t)$ ne tiennent pas compte de la masse de l'objet : une bille en plomb et une bille en polystyrène chutent de la même façon.
Ci-contre la chute d'une bille photographiée toutes les $0,05$ secondes.
⇛ Après $0,2$ secondes de chute, la distance parcourue est $\frac{g}{2} \times 0,2^2 \approx 0,2$ m et la vitesse atteinte est $g \times 0,2 \approx 1,96$ m/s, soit environ 7 km/h.
⇛ Après 5 secondes de chute, la distance parcourue est $\frac{g}{2} \times 5^2 \approx 122,6$ m et la vitesse atteinte est $g \times 5 \approx 49$ m/s, soit environ 176 km/h.
⇛ Après 10 secondes de chute, la distance parcourue est $\frac{g}{2} \times 10^2 \approx 490,5$ m et la vitesse atteinte est $g \times 10 \approx 98$ m/s, soit environ 353 km/h.



Interprétation numérique

Si f est une fonction définie et dérivable au voisinage de x_0, on a $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.
L'expression $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$ est une fonction φ de limite nulle quand x_0 tend vers 0. Cela signifie que l'on peut écrire $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \varphi(h)$, soit $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varphi(h)$.
Cette écriture est appelée « développement limité à l'ordre 1 » de f au point x_0.

DÉFINITION 4.23 :
Si une fonction f est dérivable en x_0, alors $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varphi(h)$ où φ est une fonction telle que $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$. La quantité $f(x_0) + hf'(x_0)$ est une valeur approchée de $f(x_0 + h)$ qui s'écarte de la valeur exacte de la quantité $|h\varphi(h)|$

Remarques :

- Notez la similitude entre les expressions $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varphi(h)$ du développement limité à l'ordre 1 de f au point x_0, et $y = f(x_0) + hf'(x_0)$ qui est l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse x_0.
- La reconnaissance du nombre dérivé de f en x_0 peut s'opérer directement, en reconnaissant dans le développement de $f(x_0 + h)$, la forme $f(x_0) + h\alpha + h\varphi(h)$ où φ est une fonction telle que $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$. On a alors $f'(x_0) = \alpha$.

Exemple 14 – Considérons la fonction cube $f : x \mapsto x^3$.
f est définie et dérivable pour tout réel et on a $f(x_0+h) = (x_0+h)^3 = x_0^3 + 3hx_0^2 + 3h^2x_0 + h^3$.

➠ On reconnait dans $x_0^3 + 3hx_0^2$ la forme $f(x_0) + h\alpha$ avec $\alpha = 3x_0^2$ et dans $3h^2x_0 + h^3$ la forme $h\varphi(h)$ où $\varphi(h) = 3hx_0 + h^2$ est telle que $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.
Par conséquent le nombre dérivé de f en x_0 est $\alpha = f'(x_0) = 3x_0^2$.
Chercher la limite du taux de variation quand $h \longrightarrow 0$ revient au même :

$$\tau = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{3hx_0^2 + 3h^2x_0 + h^3}{h} = 3x_0^2 + 3hx_0 + h^2$$

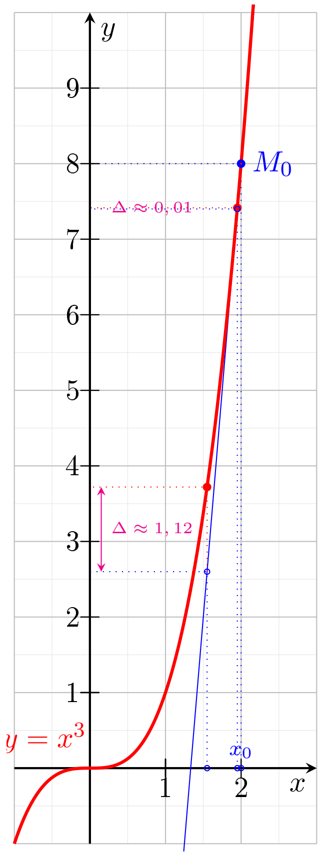
La limite de ce taux quand $h \longrightarrow 0$ est $f'(x_0) = 3x_0^2$.

➠ La valeur approchée de $(x_0+h)^3$ est $x_0^3 + 3x_0^2h$.
L'erreur commise, en prenant $x_0^3 + 3x_0^2h$ à la place de $(x_0+h)^3$ est $h^2(3x_0+h)$.
Combien vaut approximativement $1,95^3$?
Environ $2^3 + 3 \times 2^2 \times (-0,05) = 8 + 12 \times (-0,05) = 8 - 0,6 = 7,4$.
La valeur exacte étant $7,414875$, l'erreur commise n'est que de $0,014875$.
Plus on s'écarte de la valeur de référence, plus l'erreur est grande :
Si on évalue $1,55^3 = 3,723875$ en prenant $x_0^3 + 3x_0^2h$ avec $x_0 = 2$, on trouve $2^3 + 3 \times 2^2 \times (-0,45) = 2,6$. L'erreur commise $\Delta = 1,123875$ est grande.

➠ L'équation de la tangente à la courbe de la fonction cube au point d'abscisse x_0 est $y = x_0^3 + h3x_0^2$, soit, en remplaçant h par $x - x_0$:

$$y = x_0^3 + (x - x_0)3x_0^2 = 3x_0^2x - 2x_0^3$$

Au point M_0 d'abscisse $x_0 = 2$, cette équation est $y = 12x - 16$.
On retrouve $7,4$ en effectuant $y = 12 \times 1,95 - 16$
On retrouve $2,6$ en effectuant $y = 12 \times 1,55 - 16$
La représentation graphique ci-contre illustre ces différents aspects.



b. Dérivation

Soit f une fonction définie et dérivable en tout x_0 d'un intervalle I.
L'hypothèse « dérivable » signifie que pour $x_0 \in I$, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe.
On a appelé cette limite « nombre dérivé de f en x_0 » et on l'a noté $f'(x_0)$.

Définition 4.24 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f sur I, et notée f'.

Remarques :

- Nous avons montré précédemment que la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$ avait pour nombre dérivé en x_0 le nombre $f'(x_0) = 2x_0$. Ainsi, la fonction dérivée de la fonction carrée est la fonction $f' : x \mapsto 2x$. De même, nous avons montré que la fonction cube $g : x \mapsto x^3$ avait pour nombre dérivé en x_0 le nombre $g'(x_0) = 3x_0^2$. La dérivée de la fonction cube est la fonction $g' : x \mapsto 3x^2$. L'objectif de cette partie est d'obtenir les fonctions dérivées des fonctions de référence, puis de celles qui sont obtenues à partir de celles-ci, par des opérations algébriques ou par composition.
- Pour un solide en mouvement, si on note d la fonction qui donne la distance parcourue par le solide après un temps t, alors la fonction dérivée de d correspond à la vitesse instantanée du solide. On note $v = d'$ cette fonction de vitesse. La fonction dérivée de v, correspond à la limite du taux d'accroissement des vitesses entre deux temps infiniment proches.
L'accroissement de la vitesse étant appelée accélération, cette fonction v' mesure l'accélération instantanée, notée a. Ainsi $a(t) = v'(t) = d''(t)$. Cela a donc du sens de dériver plusieurs fois une fonction : ici, a est dite « dérivée seconde » de d.

Dérivées des fonctions usuelles

Propriété 4.14 (Fonction constante) La dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

Démonstration Soient $k \in \mathbb{R}$ et f la fonction telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = k$. Pour tout $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f entre $x+h$ et x est : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0$.
Lorsque $h \longrightarrow 0$, ce taux restant nul, on a $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$.
La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$.

Propriété 4.15 (Fonction puissance) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = nx^{n-1}$.

Démonstration Soient $x \in \mathbb{R}$ et h un réel non nul. Le taux d'accroissement de f entre $x+h$ et x est : $\tau = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$.
Le développement de $(x+h)^n = (x+h)(x+h)\dots(x+h)$ est un polynôme en x de degré n :

- un seul terme en x^n : x^n
- n produits $x^{n-1} \times h$, soit un terme en x^{n-1} égal à nhx^{n-1}
- le reste du développement contenant, au minimum, le facteur h^2, on peut l'écrire $h \times \varphi(h)$ où $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$

On peut donc écrire $\tau = \frac{nhx^{n-1} + h \times \varphi(h)}{h} = nx^{n-1} + \varphi(h)$. Comme on a bien $\lim\limits_{h \to 0} \tau = \lim\limits_{h \to 0} nx^{n-1} + \varphi(h) = nx^{n-1}$, la fonction f est dérivable en tout point et $f'(x) = nx^{n-1}$.

Remarques :

- On retrouve les résultats précédents : La dérivée de $f : x \mapsto x^2$ est $f' : x \mapsto 2x$ et la dérivée de $g : x \mapsto x^3$ est $g' : x \mapsto 3x^2$
- pour la fonction linéaire identité $f : x \mapsto x$, la dérivée est $f' : x \mapsto 1$ une fonction constante. D'une façon générale, les fonctions constantes sont les dérivées des fonctions affines, puisque le taux d'accroissement d'une fonction affine est constant.

Propriété 4.16 (Fonction inverse) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Démonstration Pour $x \neq 0$ et $h \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{x(x+h)h} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

Ce taux n'est défini, au voisinage de 0, que si la somme $x+h$ est non nulle, et on a :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(-\frac{1}{x(x+h)} \right) = -\frac{1}{x^2}$$

Propriété 4.17 (Fonction racine carrée) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ et pour $x \in \mathbb{R}^*_+$, on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

DÉMONSTRATION Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et $h > 0$. Le taux d'accroissement de f entre $x+h$ et x est :

$$\tau = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h}^2-\sqrt{x}^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

On a donc :

$$\lim_{h\to 0}\tau = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

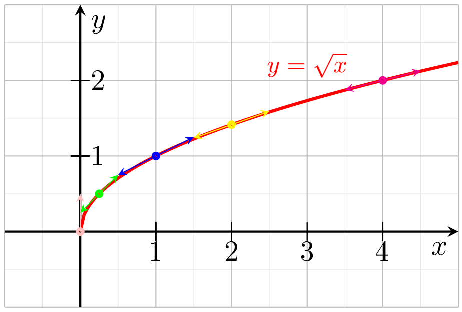
Si $x=0$, pour $h>0$, on a $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$. Ainsi, lorsque $h \longrightarrow 0$, on a $\sqrt{h} \longrightarrow 0$ et donc $\frac{1}{\sqrt{h}} \longrightarrow +\infty$. Donc la limite lorsque $h \longrightarrow 0$ de τ n'existe pas : la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 (la tangente à la courbe de la fonction carrée est verticale au point O).

EXEMPLE 15 – Traçons la courbe représentant la fonction racine carrée avec quelques tangentes.

Dressons pour cela un tableau de valeurs de la fonction et de la dérivée (coefficient directeur de la tangente), et déterminons l'équation des tangentes. Pour $x=0$, la fonction n'étant pas dérivable ($f'(x_0)$ n'existe pas), la tangente à la courbe n'a pas une équation de la forme $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$; cette équation est $x=0$.

x	$\frac{1}{4}$	1	2	4
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2
$f'(x)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{4}$
Tangente $y=$	$x+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$	$\frac{x\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{x}{4}+\frac{3}{2}$

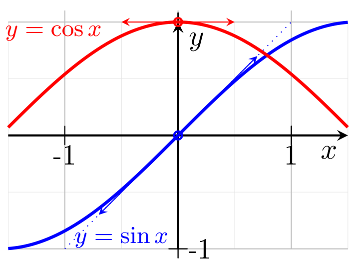
Afin de ne pas trop surcharger la figure, et selon la tradition, nous représentons les tangentes par des segments centrés sur le point de tangence, avec des extrémités en pointe de flèche.



PROPRIÉTÉ 4.18 (FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES) Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$.
La fonction tangente est dérivable sur des intervalles I de la forme $]-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in I$, on a $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$.

DÉMONSTRATION

Comme on l'observe sur la courbe de la fonction sinus, la tangente en O est la droite d'équation $y=x$, de coefficient directeur 1. En s'appuyant sur cette observation, admettons que la fonction sin est dérivable en 0 et que $\sin'(0)=1$. Cela peut s'écrire, sous la forme du développement limité : $\sin(0+h) = \sin(0)+\sin'(0)h + h\varphi(h)$ où φ est telle que $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h) = 0$.
Cette égalité peut s'écrire plus simplement $\sin(h) = h(1+\varphi(h))$.



On en déduit, d'après la formule de duplication, que
$\cos(h) = 1-2\sin^2(\frac{h}{2}) = 1-2\frac{h^2}{4}(1+\varphi(\frac{h}{2}))^2 = 1+h\psi(h)$, où ψ est telle que $\lim\limits_{h\to 0}\psi(h)=0$.
En d'autres termes, on en déduit que cos est dérivable en 0 et que $\cos'(0)=0$, ce que nous aurions pu observer sur la courbe (tangente horizontale au point d'abscisse 0).

Utilisons maintenant les formules d'addition :
$\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x)$ et $\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \sin(h)\sin(x)$.
En remplaçant $\sin(h)$ et $\cos(h)$ par leurs développement limités d'ordre 1 en 0, on obtient :
$\sin(x+h) = \sin(x)(1 + h\psi(h)) + h(1+\varphi(h))\cos(x) = \sin(x) + h\cos(x) + h\theta(h)$ et
$\cos(x+h) = \cos(x)(1 + h\psi(h)) - \sin(x)h(1+\varphi(h)) = \cos(x) - h\sin(x) + h\rho(h)$,
où θ et ρ sont telles que $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h) = 0$ et $\lim\limits_{h\to 0}\rho(h) = 0$.
Ainsi on obtient bien le résultat annoncé pour les fonctions cos et sin. Pour la fonction tan, on fera plus loin la démonstration comme une application de la propriété sur la dérivée d'un quotient.

Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété 4.19 (Dérivée d'une somme) Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et h la fonction définie sur I par $h(x) = f(x) + g(x)$.
La fonction $h = f + g$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Démonstration Puisque f et g sont dérivables dans un voisinage de $x \in I$, notons leurs développements limités d'ordre 1 en x : $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varphi(h)$ et
$g(x+h) = g(x) + hg'(x) + h\psi(h)$, où φ et ψ sont telles que $\lim\limits_{h\to 0}\psi(h) = 0$. On en déduit que
$(f+g)(x+h) = (f+g)(x) + h[f'(x) + g'(x)] + h\theta(h)$ où θ est définie par $\theta(h) = \varphi(h) + \psi(h)$. Cette fonction est telle que $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h) = 0$, d'où la conclusion.

Propriété 4.20 (Produit par un réel) Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I, λ un réel quelconque et g la fonction définie sur I par $g(x) = \lambda f(x)$.
La fonction $g = \lambda f$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $g'(x) = \lambda f'(x)$.

Démonstration Puisque f est dérivable dans un voisinage de $x \in I$, son développement limité d'ordre 1 en x est $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varphi(h)$, où φ est telle que $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h) = 0$.
On en déduit que $\lambda f(x+h) = \lambda f(x) + h[\lambda f'(x)] + h\psi(h)$ où ψ est définie par $\psi(h) = \lambda\varphi(h)$.
Cette fonction est telle que $\lim\limits_{h\to 0}\psi(h) = 0$, d'où la conclusion.

Méthode
Les fonctions polynômes sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$ et la dérivée d'un polynôme de degré n est un polynôme de degré $n-1$.
Pour être plus précis, la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$$

a pour dérivée :

$$f' : x \mapsto \sum_{k=1}^{p} a_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{p-1} a'_k x^k \text{ où } a'_k = (k+1)a_{k+1}$$

Exemple : si f est la fonction définie par $f(x) = 5x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 8x + 9$, alors la dérivée de f est définie par $f'(x) = 20x^3 - 18x^2 + 14x - 8$.

Propriété 4.21 [Dérivée d'un produit] Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et h la fonction définie sur I par $h(x) = f(x)g(x)$.
La fonction $h = fg$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Démonstration Puisque f et g sont dérivables dans un voisinage de $x \in I$, notons leurs développements limités d'ordre 1 en x : $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varphi(h)$ et
$g(x+h) = g(x) + hg'(x) + h\psi(h)$, où φ et ψ sont telles que $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$ et $\lim\limits_{h\to 0} \psi(h) = 0$.
On en déduit que
$(fg)(x+h) = (fg)(x) + h[f'(x) \times g(x) + g'(x) \times f(x)] + h\theta(h)$ où θ est une fonction compliquée constituée de la somme de six termes de limites 0, autrement dit $\lim\limits_{h\to 0} \theta(h) = 0$.
En effet, explicitons θ :
$\theta(h) = f(x)\psi(h) + g(x)\varphi(h) + h[f'(x)g'(x) + f'(x)\psi(h) + g'(x)\varphi(h) + \psi(h)\varphi(h)]$.
Dans cette expression, x étant fixé, c'est h qui varie et qui tend vers 0, d'où la conclusion.

Exemple 16 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables
$f = uv$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$, où u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et v dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$.
Par application de la propriété 4.21, avec les notations employées, on a $f' = u'v + uv'$.
Pour tout $x > 0$, on a donc :

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{2x} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

Remarque : Dans le cas de cet exemple, la propriété 4.21 permet d'affirmer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car alors f et g le sont), mais elle ne permet pas de conclure sur la dérivabilité de f en 0.
Pour établir cette dérivabilité, revenons à la définition du nombre dérivé : f est dérivable en 0 si le quotient $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ admet une limite réelle lorsque $h \to 0$. Ici on a $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h}$, et comme $\lim\limits_{h\to 0} \sqrt{h} = 0$, on peut en conclure que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Conséquence : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
La fonction $g = f^2$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a $g'(x) = 2 \times f(x) \times f'(x)$.
Il suffit d'appliquer la propriété 4.21 au cas où $f = g$.
Par exemple, la dérivée de $g : x \mapsto (5x^2 - 3x + 1)^2$ est la fonction g' définie par
$g'(x) = 2 \times f(x) \times f'(x)$ où $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$ et $f'(x) = 10x - 3$. $g'(x)$ s'écrit donc
$g'(x) = 2(5x^2 - 3x + 1)(10x - 3)$.
Cette propriété évite de développer le carré pour dériver f, et donc évite de perdre la factorisation.

Propriété 4.22 (Dérivée d'un quotient) Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I, avec $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, et h la fonction définie sur I par $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
La fonction $h = \frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Démonstration Déterminons tout d'abord la dérivée de la fonction i définie par $i(x) = \frac{1}{g(x)}$.
Pour un réel x_0 de I , le taux de variation de i entre $x_0 + h$ et x_0 est :

$$\tau = \frac{i(x_0+h) - i(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} = \frac{\frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{g(x_0+h)g(x_0)}}{h} = \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \times \frac{-1}{g(x_0+h)g(x_0)}$$

Comme $\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = g'(x_0)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \frac{-1}{g(x_0+h)g(x_0)} = \frac{-1}{g^2(x_0)}$, on en déduit que $\lim\limits_{h\to 0} \tau = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

La fonction i a pour dérivée la fonction définie par $i'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$.
Il ne reste plus qu'à appliquer la propriété 4.21 à la fonction $h = \frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g} = fi$: $h' = fi' + f'i$.
Cela s'écrit pour un réel x de I

$$h'(x) = \frac{-f(x)g'(x)}{g^2(x)} + \frac{f'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Remarques :

- Les fonctions rationnelles (quotients de polynômes) sont dérivables sur leur ensemble de définition.
- La propriété suivante est un cas particulier important, ne serait-ce que parce que nous avons bâti notre démonstration du cas général sur lui : soit f une fonction définie, dérivable et qui ne s'annule pas sur un intervalle I. La fonction g définie sur I par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a $g'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$.

Exemple 17 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, par $f(x) = \frac{3x-2}{x^2-1}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$:
on a $f = \frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x - 2 \\ v(x) = x^2 - 1 \end{cases}$ et comme $\begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$, on en déduit que $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$:

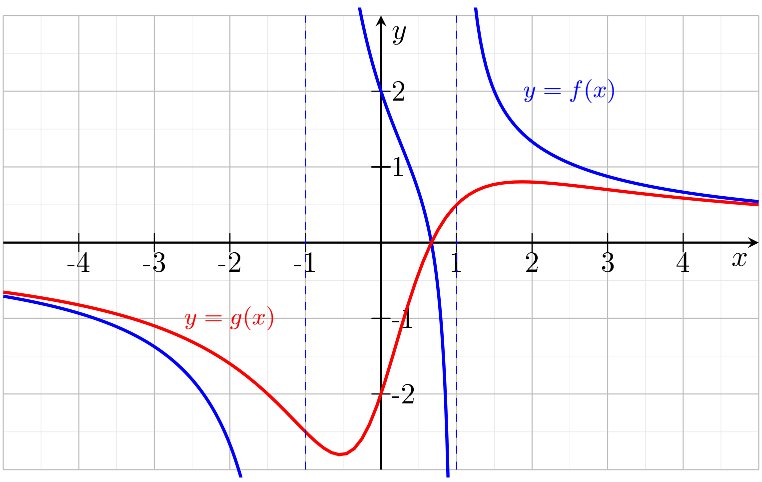
$$f'(x) = \frac{3 \times (x^2 - 1) - (3x - 2) \times (2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-3x^2 + 4x - 3}{(x^2 - 1)^2}$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annulant pas :
on a $g = \frac{u}{w}$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x - 2 \\ w(x) = x^2 + 1 \end{cases}$ et comme $\begin{cases} u'(x) = 3 \\ w'(x) = 2x \end{cases}$, on en déduit que $f' = \frac{u'w - uw'}{v^2}$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = \frac{3 \times (x^2 + 1) - (3x - 2) \times (2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-3x^2 + 4x + 3}{(x^2 + 1)^2}$$

Notez le peu de différence entre les expressions de f et g d'une part, et de f' et g' d'autre part. Les ensembles de définition de ces deux fonctions étant différents, l'allure des courbes est cependant grandement différente (au moins dans un voisinage des valeurs interdites de f.



Exemple 18 – La fonction tan est définie comme le quotient de $\sin(x)$ par $\cos(x)$, pour tout réel x tel que $\cos(x) \neq 0$, soit $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un entier relatif quelconque. La dérivée de tan est donc

$$\left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{(\sin)'(\cos) - (\sin)(\cos)'}{\cos^2} = \frac{(\cos)(\cos) + (\sin)(\sin)}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$$

puisque $(\cos)(\cos) + (\sin)(\sin) = \cos^2 + \sin^2 = 1$.
On peut remarquer aussi que :

$$\frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{\cos^2}{\cos^2} + \frac{\sin^2}{\cos^2} = 1 + \frac{\sin^2}{\cos^2} = 1 + \tan^2$$

Propriété 4.23 (Dérivée d'une composée) Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie en tout point de $f(I)$. Si f est dérivable en x et que g est dérivable en $f(x)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x et $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times (g' \circ f)(x)$.

Démonstration Puisque f est dérivable dans un voisinage de $x \in I$, notons son développement limité d'ordre 1 en x : $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varphi(h)$, où φ est telle que $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.
Puisque g est dérivable dans un voisinage de $f(x) \in f(I)$, notons son développement limité d'ordre 1 en $f(x)$: $g(f(x)+k) = g(f(x)) + kg'(f(x)) + k\psi(k)$, où ψ est telle que $\lim\limits_{k \to 0} \psi(k) = 0$.
Prenons $k = hf'(x) + h\varphi(h)$. Lorsque $h \longrightarrow 0$, on a bien $k \longrightarrow 0$. Substituons cette expression de k au développement limité de $g(f(x)+k)$, qui devient le développement limité de $g(f(x+h))$:

$$g(f(x+h)) = g(f(x)) + (hf'(x) + h\varphi(h))\left(g'(f(x)) + \psi(k)\right) = g(f(x)) + hf'(x)g'(f(x)) + h\theta(h)$$

L'expression de la fonction θ est assez compliquée, mais il est clair que cette fonction tend vers 0 quand $h \longrightarrow 0$. En effet $\theta(h) = f'(x)\psi(k) + \varphi(h)g'(f(x)) + \varphi(h)\psi(k)$. Du fait que $\lim\limits_{h \to 0} \psi k = \lim\limits_{k \to 0} \psi k = 0$ (nous n'avons pas écrit l'expression $\psi(k)$ en fonction de h pour ne pas surcharger) et que $\lim\limits_{h \to 0} \varphi h = 0$, on a bien $\lim\limits_{h \to 0} \theta h = 0$, d'où le résultat.

Remarques : La définition 4.16 et la propriété 4.23 nous ont déjà familiarisé avec cette notion de composition. De plus, nous avons déjà vu plusieurs composées sans les nommer : la conséquence de la propriété 4.21 nous donne la dérivée de f^2 qui est la composée de f suivie de la fonction carrée. Nous avons aussi vu la dérivée de $\frac{1}{f}$ qui est la composée de f suivie de la fonction inverse. Nous pouvons maintenant compléter avec la dérivée de $\sqrt{f}$ qui est composée de f suivie de la racine carrée. La propriété4.23 nous indique qu'il s'agit de $\frac{f'}{2\sqrt{f}}$. De même, on peut dériver f^n (composée de f suivie de la fonction puissance n : $(f^n)' = nf'f^{n-1}$ ce qui confirme bien le résultat obtenu pour le carré de f : $(f^2)' = 2f'f$. La dérivée de $\sin(ax+b)$ est $a\cos(ax+b)$ et celle de $\cos(ax+b)$ est $-a\sin(ax+b)$. etc.

c. Application de la dérivée à l'étude des fonctions

Propriété 4.24 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, on a :
- si f est strictement croissante sur I, alors f' est positive sur I
- si f est constante sur I, alors f' est nulle sur I
- si f est strictement décroissante sur I, alors f' est négative sur I

Démonstration Démonstration du cas « f strictement croissante » : Soit f une fonction strictement croissante et dérivable sur I et soient x un réel de I et h un réel non nul tel que $x + h \in I$. Étudions le signe de $\tau = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, le taux d'accroissement de f entre $x+h$ et h. Deux cas sont possibles :

- $h > 0$: on a $x < x + h$ or f est strictement croissante sur I donc $f(x) < f(x+h) \Longleftrightarrow f(x+h) - f(x) > 0$ et, comme $h > 0$, $\tau > 0$
- $h < 0$: on a $x + h < x$ or f est strictement croissante sur I donc $f(x+h) < f(x) \Longleftrightarrow f(x+h) - f(x) < 0$ et, comme $h < 0$, $\tau > 0$

Dans les deux cas, $\tau > 0$. Si on donne à h des valeurs de plus en plus proches de 0, ce quotient restera strictement positif, et sa limite qui existe car f est dérivable en I est positive.
Les deux autres cas se démontrent de la même manière.

Remarques : La limite peut être nulle en certains points, comme par exemple pour la fonction $f : x \mapsto x^2$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. La dérivée, définie par $f'(x) = 2x$, est strictement positive en tout point de $\mathbb{R}^*_+$ mais elle s'annule pour $x = 0$. Si la dérivée est nulle en un point de I (ou en un nombre quelconque de points disjoints), cela n'empêche pas la fonction d'être strictement croissante sur I.

Théorème 4.8 Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable sur l'intervalle I éventuellement privé de ses bornes :
- si pour $x \in I$ on a $f'(x) > 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I
- si pour $x \in I$ on a $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I
- si pour $x \in I$ on a $f'(x) < 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I

Démonstration Ce théorème, qui est la réciproque de la propriété précédente, est admis.
Il découle d'un autre théorème étudié en Terminale (le théorème des accroissements finis).

Remarques :
- L'ensemble formé par la propriété 4.24 et le théorème 4.8 constituent ce qui est appelé parfois « principe de Lagrange », du nom de ce mathématicien qui généralisa l'étude des variations grâce au signe de la dérivée.
- Donnons deux exemples, $f : x \mapsto x^2$ a pour dérivée $f' : x \mapsto = 2x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) > 0$ sauf en 0 où $f'(0) = 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. De même, sur $\mathbb{R}^-$, $f'(x) < 0$ sauf en 0 où elle s'annule, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
  C'est plus immédiat qu'en passant par l'étude de signe du taux d'accroissement !
  La fonction tan a pour dérivée $1 + \tan^2$ sur les intervalles de la forme $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$; cette dérivée est strictement positive, sauf en $x = k\pi$ où elle s'annule, donc tan est strictement croissante sur chacun de ces intervalles.

Propriété 4.25 (Condition extremum) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si $f(x_0)$ est un extremum local de f alors $f'(x_0) = 0$.

Remarques :
- Nous avons déjà défini la condition pour avoir un extremum dans la propriété 4.1.
  Cette nouvelle propriété traduit la condition en termes de dérivée.
- Attention la réciproque est fausse ! En effet, considérons la fonction cube : $f(x) = x^3$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(0) = 0$. Pourtant $f(0)$ n'est pas un extremum local de f : la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, la dérivée $3x^2$ étant strictement positive sauf en un point où elle s'annule.

Propriété 4.26 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$ tel que f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors $f(x_0)$ est un extremum local de f.

Remarque :
Changer de signe peut se faire de deux façons : soit $h > 0$, si on a $f'(x) > 0$ quand $x_0 - h < x < x_0$, et $f'(x) < 0$ quand $x_0 < x < x_0 + h$, alors la fonction passe par un maximum ; si le changement de signe est inversé $f'(x) < 0$ pour $x < x_0$ et $f'(x) > 0$ pour $x > x_0$, alors la fonction passe par un minimum. On peut résumer cela par les extraits de tableaux de variations ci-dessous :

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

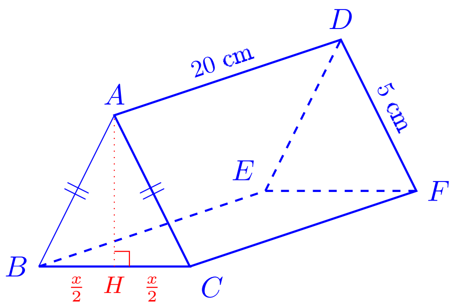
$f(x_0)$ est un minimum local de f

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

$f(x_0)$ est un maximum local de f

Exemple 19 – Une boîte a la forme d'un prisme droit à base triangle isocèle.

On a $AB = 5$ cm et $AD = 20$ cm, mais BC est variable.
On note $BC = x$, l'objet du problème étant de déterminer x pour que le volume de la boîte soit maximal.
Le triangle ABC existe si et seulement si $0 \leqslant x \leqslant 10$.
Notons $\mathscr{V}(x)$ le volume de la boîte.
On a $\mathscr{V}(x) = \mathscr{A}_{ABC} \times AD$.
Soit H le pied de la hauteur issue de A dans ABC. Ce dernier étant isocèle, H est le milieu de $[BC]$ et on a $AH = \sqrt{25 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{100 - x^2}$ et $\mathscr{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times x \times \frac{1}{2}\sqrt{100 - x^2}$.
On a donc $\mathscr{V}(x) = 5x\sqrt{100 - x^2}$.



➠ 1re méthode : Dérivons la fonction $g : x \mapsto 5x\sqrt{100 - x^2}$ qui est le produit de deux fonctions, la seconde étant une fonction composée de la forme $\sqrt{u}$. En appliquant les règles de dérivation, on obtient :

$$g'(x) = 5\sqrt{100 - x^2} + 5x\frac{-2x}{100 - x^2} = 5\frac{(100 - x^2)\sqrt{100 - x^2} - 10x^2}{100 - x^2}$$

L'étude du signe de cette expression est assez délicate, même si on sait que dans l'intervalle $[0; 10]$, le dénominateur est forcément positif. Comment résoudre l'inéquation $(100 - x^2)\sqrt{100 - x^2} - 10x^2 > 0$? Cette méthode, qui cherche à appliquer brutalement la propriété 4.26, se heurte à des difficultés de mise en œuvre qui relèvent de la difficulté de résoudre certaines équations ou inéquations algébriques.

➠ 2e méthode : Considérons l'expression $5\sqrt{100x^2 - x^4}$ qui est équivalente à $5x\sqrt{100 - x^2}$, au moins dans le domaine d'étude de la fonction (sur l'intervalle $[0; 10]$) et dérivons $h : x \mapsto 5\sqrt{100x^2 - x^4}$.

$$h'(x) = 5\frac{200x - 4x^3}{(\sqrt{100x^2 - x^4})^2} = \frac{20x(50 - x^2)}{x^2(100 - x^2)}$$

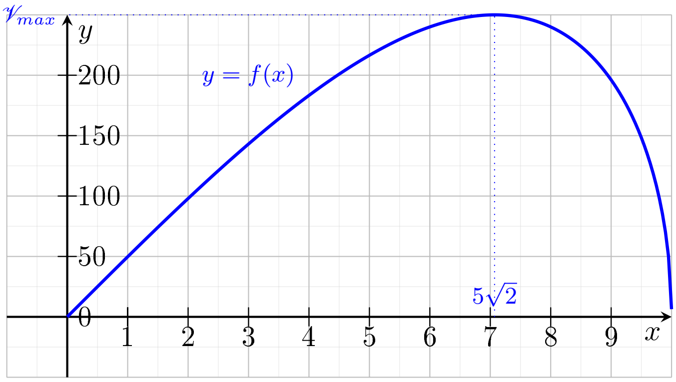
On se retrouve dans une configuration assez favorable car le numérateur et le dénominateur se factorisent facilement. En regardant bien, seul le facteur $50 - x^2$ peut s'annuler en changeant de signe dans $[0; 10]$. Le trinôme $50 - x^2$ s'annule pour $x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,071$. Le signe de ce trinôme est le même que le coefficient de x^2, soit négatif à l'extérieur des racines. L'autre racine étant négative, $50 - x^2 < 0$ pour $x > 5\sqrt{2}$ sur $[0; 10]$. Comme les autres facteurs de $\mathscr{V}' = h'$ sont positifs sur $[0; 10]$, on a $\mathscr{V}' \leqslant 0$ pour $x \leqslant 5\sqrt{2}$ et $\mathscr{V}' \geqslant 0$ pour $x \geqslant 5\sqrt{2}$. La dérivée change de signe et s'annule pour $x = 5\sqrt{2}$, la fonction admet donc $\mathscr{V}(5\sqrt{2})$ comme maximum.

➠ 3e méthode : Considérons la fonction $f : x \mapsto 100x^2 - x^4$ qui est définie et positive sur $[0; 10]$. Cette fonction a les mêmes variations que $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. En dérivant f : $f'(x) = 200x - 4x^3 = 4x(50 - x^2)$, on est ramené à la conclusion précédente.

Résumons par le tableau de signes de la dérivée de $\mathscr{V}$ ainsi que le tableau de variations de $\mathscr{V}$:

x	0		$5\sqrt{2}$		10
$\mathscr{V}'$		$+$	0	$-$	
$\mathscr{V}$	0	$\nearrow$	250	$\searrow$	0

Ainsi $\mathscr{V}$ admet un maximum pour $x = 5\sqrt{2}$.
On a alors $\mathscr{V}_{max} = 250$ cm^3.



d. Fonction exponentielle

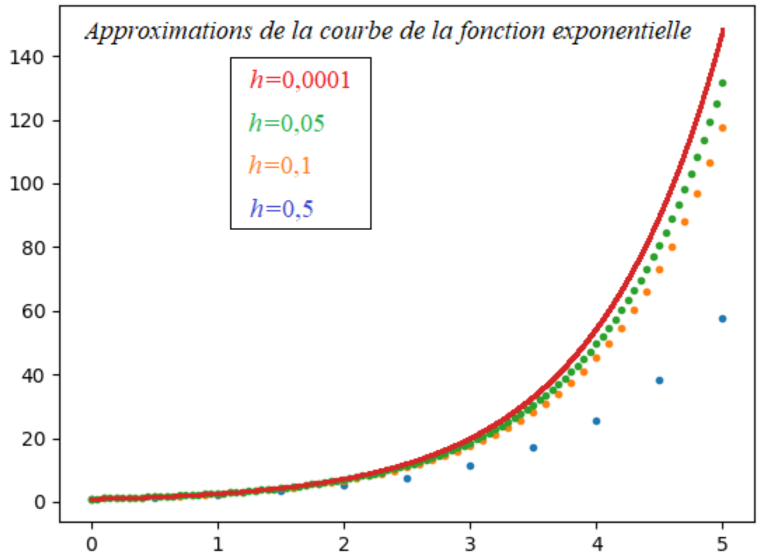
Supposons qu'il existe une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f'(x) \text{ et } f(0) = 1.$$

On peut se faire une idée d'une telle fonction en construisant point par point sa courbe $\mathscr{C}$:

- Partant du point $M_0(0; 1)$, on détermine le point $M_h(h; 1 + h)$.
  La tangente à $\mathscr{C}$ en M_0 a, en effet, pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ soit $y = x + 1$ et donc, en choisissant le réel h suffisamment petit pour que la courbe soit proche de sa tangente, l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse h est proche de $1 + h$.
- En réitérant le procédé à partir de $M_h(h; 1 + h)$, on détermine le point $M_{2h}(2h; (1 + h)^2)$ qui est sur la tangente à $\mathscr{C}$ en M_h (son équation est $y = f'(h)(x - h) + f(h)$ soit
  $y = (1 + h)(x - h + 1)$ d'où, pour $x = 2h$, $y = (h + 1)^2$).
- De même, on va avoir les points $M_{3h}(3h; (1 + h)^3)$, $M_{4h}(4h; (1 + h)^4)$, etc.

On peut construire ainsi, de proche en proche, les points d'une courbe qui s'approche, lorsque h devient de plus en plus proche de 0, de la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f.
Ci-dessous, les suites de points obtenues en prenant $h = 0,5$, $h = 0,1$, $h = 0,05$ et $h = 0,0001$.
On constate que, lorsque h s'approche de 0, ces courbes s'approchent de plus en plus d'une courbe limite qui est celle de la fonction f.



Définition 4.25 (Fonction exponentielle) Il existe une *unique* fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f'(x)$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction – appelée fonction exponentielle – est notée exp et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \exp'(x) \text{ et } \exp(0) = 1$$

Remarques :

- L'existence de cette fonction est admise mais on peut s'en approcher point par point, comme on l'a vu plus haut (méthode due à Euler).
- L'unicité de cette fonction va être montrée plus loin, comme une conséquence de la propriété suivante : $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

PROPRIÉTÉ 4.27 (PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES) $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ et $\exp(x) > 0$

DÉMONSTRATION Soit g la fonction définie par $g(x) = \exp(x)\exp(-x)$.
La fonction g est dérivable car c'est le produit de deux fonctions dérivables et on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \exp'(x)\exp(-x) + \exp(x)\exp'(-x) \\ &= [\exp(x)]\exp(-x) + \exp(x)\left[(-x)'\exp(-x)\right] \\ &= \exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $g(x) = k$ et comme $g(0) = \exp(0)\exp(-0) = 1$, on a $g(x) = 1$.
Par conséquent $\exp(x)\exp(-x) = 1 \iff \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
De plus, on a forcément $\exp(x) \neq 0$ car, sinon le produit $\exp(x)\exp(-x)$ ne vaudrait pas toujours 1.
Comme $\exp(0) = 1 > 0$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \neq 0$, on comprend intuitivement que la courbe ne traversera jamais l'axe des abscisses (car elle est est continue) et donc $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$. Ceci sera mieux justifié en terminale avec le théorème des valeurs intermédiaires.

Conséquence :
Prouvons l'unicité de la fonction exp :
Supposons qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2 telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f'(x)$ et $f(0) = 1$.
Soit h la fonction définie par $h(x) = f_1(x)f_2(-x)$.
La fonction h est dérivable car c'est le produit de deux fonctions dérivables et on a :
$h'(x) = f_1'(x)f_2(-x) + f_1(x)f_2'(-x) = f_1(x)f_2(-x) - f_1(x)f_2(-x) = 0$.
On en déduit que $h(x) = k$ et comme $h(0) = f_1(0)f_2(0) = 1$, on a $h(x) = 1$.
Par conséquent $f_1(x)f_2(-x) = 1 \iff f_2(-x) = \frac{1}{f_1(x)}$.
Or, on vient de montrer (en notant $f_1 = \exp$) que si $f_1(x) = f_1'(x)$ et $f_1(0) = 1$ alors $f_1(-x) = \frac{1}{f_1(x)}$.
On en déduit que pour tout réel, on a $f_1(-x) = f_2(-x)$ et donc (en notant $X = -x$) $f_1(X) = f_2(X)$.

PROPRIÉTÉ 4.28 (PROPRIÉTÉ FONCTIONNELLE) La fonction exp transforme les somme en produit :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

DÉMONSTRATION Soient λ un réel quelconque et F_λ la fonction définie par $F_\lambda(x) = \frac{\exp(x+\lambda)}{\exp(\lambda)}$.
La fonction F_λ est dérivable car c'est la composée de fonctions dérivables et on a :

$$\begin{aligned} F_\lambda'(x) &= \frac{(x+\lambda)'\exp'(x+\lambda)}{\exp(\lambda)} \\ &= \frac{\exp(x+\lambda)}{\exp(\lambda)} \\ &= F_\lambda(x) \end{aligned}$$

On en déduit que $F_\lambda(x) = F_\lambda'(x)$ et comme, de plus, $F_\lambda(0) = \frac{\exp(\lambda)}{\exp(\lambda)} = 1$, on a $F_\lambda = \exp$.
Par conséquent $\exp(x) = \frac{\exp(x+\lambda)}{\exp(\lambda)} \iff \exp(x)\exp(\lambda) = \exp(x+\lambda)$.
Il suffit de remplacer λ par y dans cette dernière égalité.

Conséquences :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x-y) = \exp(x)\exp(-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \exp(nx) = (\exp(x))^n$ et $\exp(-nx) = \frac{1}{(\exp(x))^n}$

> DÉMONSTRATION Montrons la 1re partie de cette 2e conséquence par récurrence :
> La propriété est vraie pour $n = 0$ car $\exp(0) = 1 = (\exp(x))^0$.
> Supposons que $\exp(nx) = (\exp(x))^n$, on a alors :
> $\exp((n+1)x) = \exp(nx + x) = \exp(nx)\exp(x) = (\exp(x))^n \exp(x) = (\exp(x))^{n+1}$
> La propriété étant vraie au rang n est vraie au rang $n+1$;
> comme elle est vraie pour $n = 0$, elle sera vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.
> Pour la 2e partie de cette conséquence, il suffit d'appliquer la propriété fondamentale.

DÉFINITION 4.26 (LE NOMBRE e) L'image de 1 par la fonction exp est notée e

$$e = \exp(1) \approx 2,718$$

Remarque :
La méthode de Euler décrite en introduction permet de déterminer des valeurs approchées de e aussi proche que l'on veut de sa valeur exacte. Il suffit de faire tendre h vers zéro. Le programme utilisé pour tracer les courbes peut servir à déterminer ces valeurs. Ci-dessous à gauche, les résultats obtenus pour des valeurs de plus en plus petites de h (une dizaine de minutes de calcul).
Bien sûr, la calculatrice vous donne instantanément une valeur plus précise : $e \approx 2,718281828459$
On doit encore à Euler (*Introductio in Analysin infinitorum*, 1748) cette autre définition algorithmique de e, beaucoup plus efficace que la 1re (mais moins facile à expliquer) :

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{1\times2\times3\times4} + \dots$$

Ci-dessous à droite, les résultats obtenus pour $S(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ (moins d'une milliseconde de calcul).

```
valeur approchée de e
avec h=10^-0 : 2
avec h=10^-1 : 2.853116706110003
avec h=10^-2 : 2.7048138294215294
avec h=10^-3 : 2.7169239322355985
avec h=10^-4 : 2.7184177414175807
avec h=10^-5 : 2.718295419874667
avec h=10^-6 : 2.7182804690959363
avec h=10^-7 : 2.71828196596018
avec h=10^-8 : 2.71828179834636
avec h=10^-9 : 2.7182820737581594
```

```
S(0) : 1
S(1) : 2.0
S(2) : 2.5                       S(11) : 2.718281826198493
S(3) : 2.6666666666666665        S(12) : 2.7182818282861687
S(4) : 2.708333333333333         S(13) : 2.7182818284467594
S(5) : 2.7166666666666663        S(14) : 2.71828182845823
S(6) : 2.7180555555555554        S(15) : 2.718281828458995
S(7) : 2.7182539682539684        S(16) : 2.718281828459043
S(8) : 2.71827876984127          S(17) : 2.7182818284590455
S(9) : 2.7182815255731922        S(18) : 2.7182818284590455
S(10) : 2.7182818011463845       S(19) : 2.7182818284590455
```

Conséquences :
On peut réécrire les propriétés de la fonction exp en remarquant que $\exp(n) = (\exp(1))^n = e^n$.
Les propriétés fondamentales s'écrivent alors $e^{-n} = \frac{1}{e^n}$ et $e^n > 0$.
La propriété fonctionnelle, quant à elle, s'écrit $e^{m+n} = e^m e^n$.
Les deux conséquences de cette propriété s'écrivent, respectivement, $e^{m-n} = \frac{e^m}{e^n}$ et $e^{mn} = (e^m)^n$.
Ces propriétés algébriques coïncidant toutes avec celles des puissances, on notera désormais $\exp(x) = e^x$.

EXEMPLE 20 – Pour un réel a donné, la suite (u_n) définie par $u_n = e^{na}$ est une suite géométrique.
On peut remarquer en effet que $e^{na} = (e^a)^n$ et, en posant $u_0 = 1$ et $q = e^a$, on a bien $u_n = u_0 q^n$.
On aurait pu montrer cela aussi en déterminant le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{(n+1)a}}{e^{na}} = \frac{e^{na+a}}{e^{na}} = e^{na+a-na} = e^a$.
D'une façon plus générale, les suites géométriques de raison $q = e^a$ et de 1er terme positif $u_0 = e^b$ sont telles que $u_n = e^b(e^a)^n = e^{an+b}$.

La suite des puissances de 2, par exemple, $u_n = 2^n$ est une suite géométrique de 1er terme $u_0 = 1$ et de raison $e^a = 2$.

Quel nombre réel a est tel que $e^a = 2$? On peut rechercher un tel nombre par tâtonnement sur la calculatrice, ou bien en programmant de plus en plus finement le balayage d'un intervalle contenant la solution : ce nombre est en effet compris entre 0 et 1 puisque $e^0 = 1$ et $e^1 = e > 2,7$.

x	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
e^x	1	1,051	1,105	1,162	1,221	1,284	1,350	1,419	1,492	1,568	1,649	1,733	1,822	1,916	2,014	2,117	2,226	2,340	2,460	2,586	2,718

La notation de la valeur exacte implique une fonction qui ne sera définie et étudiée qu'en terminale : la fonction ln qui est telle que $\ln(e) = 1$ et $\ln(e^a) = a$. Ainsi $e^a = 2 \iff a = \ln(e^a) = \ln(2)$.
La calculatrice donne la valeur approchée $a = \ln(2) \approx 0,69314718055995$.

Propriété 4.29 (Résumé) Pour tous réels x et y et tout entier relatif n :

$$e^0 = 1 \qquad e^1 = e \qquad e^x > 0 \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{x+y} = e^x e^y \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad e^{nx} = (e^x)^n \qquad (e^x)' = e^x$$

Propriété 4.30 (Sens de variation) La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, pour tous réels x et y : $e^x = e^y \iff x = y$ et aussi $e^x < e^y \iff x < y$.

Démonstration On sait que $(e^x)' = e^x$ et aussi que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' > 0$.

Propriété 4.31 (Limites) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Démonstration
Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x - x$.
La fonction f est dérivable car c'est la somme de deux fonctions dérivables et on a $f'(x) = e^x - 1$. On en déduit que :
- $f'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$
- $f'(x) < 0 \iff e^x < 1 \iff x < 0$

D'où le tableau de variation ci-contre.

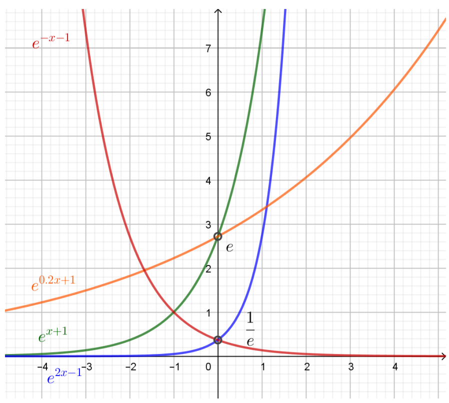
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f passe par un minimum atteint pour $x = 0$ qui vaut $f(0) = e^0 - 0 = 1$.
Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}, e^x - x \geqslant 1 \iff e^x \geqslant x + 1$.
D'après le théorème de minoration, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
Pour l'autre limite, on peut remarquer, quitte à faire le changement de variable $X = -x$ que :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$$

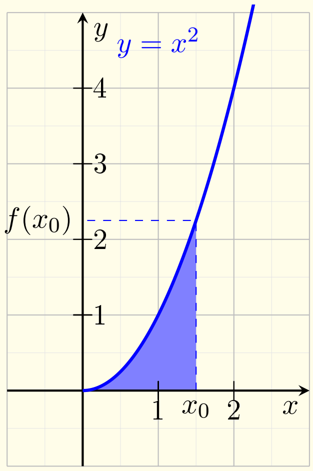
Exemple 21 (Fonctions composées) – a et b étant deux réels quelconques, soit $f_{(a,b)}$ la fonction $x \longmapsto e^{ax+b}$.
Le signe de la dérivée $f'_{(a,b)}(x) = ae^{ax+b}$ dépend de celui de a :
- Si $a > 0$ la fonction est strictement croissante et modélise toutes les situations de croissances exponentielles (suites géométriques avec $q > 0$ et $u_0 > 0$)
- Si $a < 0$ la fonction est strictement décroissante et modélise toutes les situations de décroissances exponentielles (suites géométriques avec $q < 0$ et $u_0 > 0$)

Dans tous les cas, ces fonction sont positives et $f_{(a,b)}(0) = e^b$.



LE COIN DU CHERCHEUR

❊ Calculs d'aires et de volumes



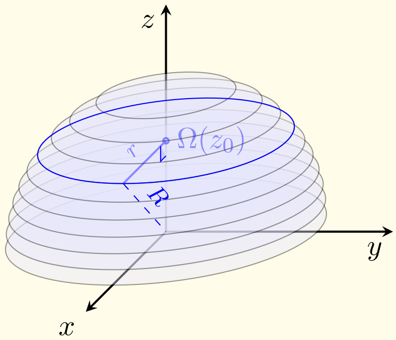
On note $\mathscr{S}(x)$ l'aire du domaine contenu « sous » la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^2$ entre la valeur $x = 0$ et $x = x_0$ (voir le schéma ci-contre), x_0 étant un réel positif quelconque.

➩ Montrer que pour tout $h > 0$, on a

$$x_0^2 \leqslant \frac{\mathscr{S}(x_0 + h) - \mathscr{S}(x_0)}{h} \leqslant (x_0 + h)^2$$

Montrer que cette inégalité reste valable pour tout $h < 0$, du moment que $x_0 + h$ reste positif.
En déduire, en faisant tendre h vers 0, que $\mathscr{S}$ est dérivable en x_0 et que $\mathscr{S}'(x_0) = x_0^2$.
La conséquence de ceci est que la fonction $\mathscr{S}$ cherchée est connue par sa dérivée f. On sait aussi que $\mathscr{S}(0) = 0$. Avec ces deux informations, déterminer $\mathscr{S}(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏



On note $\mathscr{V}(z_0)$ le volume de la tranche de demi-sphère comprise entre la valeur $z = 0$ et $z = z_0$ (voir le schéma de la demi-sphère ci-contre), z_0 étant un réel positif inférieur à R le rayon de la demi-sphère.

➩ Déterminer le rayon $r(z_0)$ du petit cercle de centre $\Omega(0, 0, z_0)$ (le rayon dépend de z_0 et de la constante R).
Montrer ensuite que pour tout $h > 0$, on a

$$\pi r^2(z_0) \leqslant \frac{\mathscr{V}(z_0) - \mathscr{V}(z_0 + h)}{h} \leqslant \pi r^2(z_0 + h)$$

Montrer que cette inégalité reste valable pour tout $h < 0$, du moment que $z_0 + h$ reste positif.
En déduire, en faisant tendre h vers 0, que $\mathscr{V}$ est dérivable en z_0 et que $\mathscr{V}'(z_0) = \pi r^2(z_0)$.
La conséquence de ceci est que la fonction $\mathscr{V}$ cherchée est connue par sa dérivée et par la valeur initiale $\mathscr{V}(0) = 0$. Avec ces deux informations, déterminer $\mathscr{V}(z)$ pour tout $z \leqslant R$.
Retrouver alors la formule qui donne le volume d'une sphère de rayon R.

Méthode (Fiche de révision)

Formulaire de dérivation à connaître par ♥

Fonction f	Dérivée f'	f dérivable sur
$x \mapsto ax+b$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$
ku, où k est réel	ku'	I si u est dérivable sur I
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	I si u est dérivable, positive, non nulle sur I
u^n	$nu'u^{n-1}$	I si u est dérivable sur I
$u+v$	$u'+v'$	I si u et v sont dérivables sur I
uv	$u'v+uv'$	I si u et v sont dérivables sur I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	I si u et v dérivables et v non nulle sur I
$v \circ u$	$u' \times v' \circ u$	I si u est dérivable sur I et v sur $f(I)$
e^u	$u'e^u$	I si u est dérivable sur I

➲ Définitions

f paire	$\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$
f impaire	$\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$
f T-périodique	$\exists T > 0, \forall x \in D_f, x+T \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$
période	la plus petite valeur de T qui convient ci-dessus
Nombre dérivé en x_0	$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
f dérivable en x_0	$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varphi(h)$, où $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$
croissance stricte sur I	$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
décroissance stricte sur I	$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
$f(x_0)$ minimum de f sur I	$\exists x_0 \in I, \forall x \in I, f(x) \geqslant f(x_0)$
$f(x_0)$ maximum de f sur I	$\exists x_0 \in I, \forall x \in I, f(x) \leqslant f(x_0)$

➲ Propriétés

f paire	$x \mapsto x^{2n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, cos, $x \mapsto \lvert x \rvert$
f impaire	$x \mapsto x^{2n+1}$, où $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, sin, tan
f T-périodique	sin et cos de période 2π, tan de période π
limite 0 quand $x \longrightarrow 0$	$x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \sqrt{x}$
limite $+\infty$ quand $x \longrightarrow 0$	$x \mapsto \frac{1}{x}$ et plus généralement $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
limite 0 quand $x \longrightarrow +\infty$	$x \mapsto \frac{1}{x}$ et plus généralement $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
limite $+\infty$ quand $x \longrightarrow +\infty$	$x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \sqrt{x}$
Tangente à C_f en x_0	$T_{x_0} : y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$
vitesse instantanée	si $f(t)$: position d'un solide à l'instant t, $v(t) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t}$
valeur approchée affine	$f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$
croissance stricte sur I	$\forall x \in I, f'(x) > 0$ ou $f'(x) = 0$ en un nombre fini de points
décroissance stricte sur I	$\forall x \in I, f'(x) < 0$ ou $f'(x) = 0$ en un nombre fini de points
minimum atteint en x_0	$\exists x_0, x \leqslant x_0 \Longrightarrow f'(x) \leqslant 0$ et $x \geqslant x_0 \Longrightarrow f'(x) \geqslant 0$
maximum atteint en x_0	$\exists x_0, x \leqslant x_0 \Longrightarrow f'(x) \geqslant 0$ et $x \geqslant x_0 \Longrightarrow f'(x) \leqslant 0$
Positions relatives	sur $]0;1[$, $x^2 < x < \sqrt{x}$ sur $]1;+\infty[$, $\sqrt{x} < x < x^2$