1 Les suites

Objectifs :

- Découvrir différents types de suites et savoir les représenter graphiquement
- Mettre en œuvre un algorithme pour obtenir les termes d'une suite et la somme de ces termes
- Reconnaitre une suite arithmétique ou géométrique ; connaître les propriétés de ces suites
- Étudier les propriétés d'une suite : monotonie, bornes, limite et période éventuelles

Aperçu historique :

L'usage de suites numériques se retrouve dans des documents très anciens où sont décrits des procédés répétitifs de calcul, de véritables algorithmes :

- *En Grèce, au IIIe siècle avant J.-C., Archimède calcule le nombre π avec une belle précision grâce à un tel procédé. Pour se faire il encadre l'aire d'un cercle par ceux de deux hexagones encadrant le cercle, puis il montre comment en déduire un nouvel encadrement par les aires de deux dodécagones. Et il poursuit jusqu'à utiliser des polygones à 96 côtés en doublant, à chaque étape, le nombre de côtés des polygones. Il parvient aussi, à l'aide ce type d'approche, à calculer d'autres aires et volumes.*
- *En Grèce, au Ier siècle après J.-C., Héron d'Alexandrie décrit une méthode très efficace pour extraire une racine carrée : pour calculer le côté d'un carré d'aire 2 – donc pour calculer $\sqrt{(2)}$ – partir d'un rectangle de côtés $a = 2$ et $\frac{2}{a} = 1$, puis recommencer en prenant pour nouvelle valeur de a la moyenne entre ces deux mesures. Cette méthode, qui conduit très rapidement à un résultat d'une grande précision, était vraisemblablement connue depuis longtemps puisqu'une tablette babylonienne (YBC7289), vieille de plus de 3600 ans donne le résultat de cet algorithme poussé jusqu'à la 4e étape.*

Léonard de Pise (Fibonaci) expose au XIIIe siècle sa célèbre suite ; au XIVe, Nicolas Oresme a clairement exposé les suites que l'on appelle désormais arithmétique et géométrique ; Au XVIIe, Bernoulli, Newton, De Moivre, Stirling, Wallis, entre autres s'intéressent aux suites pour approcher des valeurs numériques. C'est à ce moment notamment qu'est précisée la notion de limite. Au début du XIXe, Lagrange[1] utilise la notation indicielle u_n et Cauchy fonde la théorie des suites. À partir de la seconde moitié du XXe siècle, l'utilisation des ordinateurs va réactiver l'intérêt portés aux suites puisqu'ils permettent de pousser très loin et très vite les calculs, par nature répétitifs, liés aux suites.

1. Généralités

a. Définition

Définition 1.1 (suite numérique) Une suite est une fonction définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ à partir d'un certain rang, noté n_0. L'image d'un entier n par la suite u est notée u_n (lire « u indice n »). u_n est le « terme général » de la suite. Celle-ci est notée $(u_n)_{n \geqslant n_0}$.

1. Joseph Louis Lagrange (1736 Turin - 1813 Paris) est connu pour avoir introduit la méthode analytique en géométrie

Remarques et premiers exemples :

- Généralement, une suite numérique commence à partir de $n = 0$: son 1[er] terme est alors u_0, le 2[e] terme est u_1, etc. Le n^e terme est u_{n-1}. Elle peut être notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite de terme générale $u_n = 2n$ est définie à partir de $n = 0$, c'est la suite des nombres pairs.
- Certaines suites ne sont définies qu'à partir d'un rang $n_0 \neq 0$, par exemple à partir de $n = 1$. Le n^e terme de la suite est alors le terme de rang $n_0 + n - 1$. La suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ est définie à partir de $n = 1$, c'est la suite des inverses d'entiers. La suite de terme général $v_n = \frac{1}{\sqrt{n-2}}$ n'est définie qu'à partir du rang $n = 3$, on la note $(v_n)_{n\geqslant 3}$.
- La notation indicielle est une spécificité des suites qui est commode et fixée par l'usage, mais la notation fonctionnelle lui est strictement équivalente. On peut ainsi définir une suite u comme une fonction $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) = n^2 \end{array}$. Généralement, on ne fait pas ça. On préfère définir une fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$, et ensuite la suite u de terme général $u_n = f(n)$.
- Attention, avec la notation indicielle, a bien noter l'indice plus bas et en petits caractères. Ceci, afin de distinguer u_{n+1} et $u_n + 1$ qui sont généralement différents. Avec la suite des carrés définie par $u_n = n^2$, on a $u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ tandis que $u_n + 1 = n^2 + 1$.
- Une suite numérique peut être définie sans que son terme général soit connu explicitement, en fonction du rang n. Généralement, il y a alors une « relation de récurrence » : u_n est connu à partir de u_{n-1}, ou bien à partir de plusieurs termes précédents, ce qui permet de calculer les termes de proche en proche, comme dans l'exemple 41.

Exemple 1 – La suite des troncatures du nombre irrationnel π présente un intérêt indéniable si l'on en juge par l'histoire de cette suite, vieille de plusieurs dizaines de siècles, qui se poursuit encore de nos jours : Archimède en détermina, il y a plus de 20 siècles, le 4[e] terme, et en 2010, A. Yee et S. Kondo, en ont calculé le 5 000 000 000 000[e] terme ! Si on note Π_n le terme général de cette suite, le nombre π serait égal à Π_∞. On dira, dans ce cas, que la suite Π « converge » vers le nombre π.

$$\begin{array}{ccccc} \Pi_0 = 3 & ; & \Pi_1 = 3,1 & ; & \Pi_2 = 3,14 \\ \Pi_3 = 3,141 & ; & \Pi_4 = 3,1416 & ; & \text{etc.} \end{array}$$

Exemple 2 – La suite de Fibonacci[2] est définie par une relation de récurrence qui porte sur les deux derniers termes : $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ et par la donnée des deux premiers termes $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. On peut ainsi calculer, de proche en proche, chacun des termes de la suite :

$$\begin{array}{ccccc} F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1 & ; & F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2 & ; & F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3 \\ F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5 & ; & F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8 & ; & \text{etc.} \end{array}$$

Ce genre de définition se prête très bien à la programmation puisqu'il suffit d'écrire une boucle `Pour i allant de 2 à n` (voir plus bas). On peut, à l'aide d'un tel programme, déterminer très rapidement $F_{12} = 144$ (c'est encore facile à la main) ou bien $F_{100} = 354\,224\,848\,179\,261\,915\,075$. Cependant, l'établissement d'une relation explicite qui permettrait de calculer directement u_n à partir de n n'est pas aisé. Une telle relation existe pourtant. C'est la formule de Binet :

$$F_n = \frac{\varphi^n - \varphi'^n}{\sqrt{5}}, \text{ où } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \varphi' = \frac{-1}{\varphi}$$

Il faut avouer que cette formule est surprenante puisqu'elle produit des entiers à partir de nombres irrationnels. Cette suite, de par sa définition très simple, intervient dans de nombreux domaines des mathématiques, tout comme le nombre φ, appelé « nombre d'or », à laquelle elle est liée.

2. Leonardo Fibonacci (1175-1250) a introduit la suite qui porte son nom dans son livre *Liber Abaci* : « Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? »

Algorithme

```
Lire n
a=0
b=1
Pour i allant de 2 à n
    c=a+b
    a=b
    b=c
Fin du Pour
Afficher b
```

Programme en Python

Noter ici l'absence de la variable supplémentaire c, due à une affectation du nouveau couple (a,b) à partir de l'ancien. Le contrôle de la boucle est modifié : il va de 1 à n-1. On aurait pu aussi écrire `range(2,n+1)`

```
n=int(input("n="))
a=1
for i in range(1,n)
    a,b=b,a+b
print("F{}={}".format(n,b))
```

Pour une Casio

```
"N"?→ N
0 → A
1 → B
For 2 → I To N
A+B → C
B → A
C → B
Next
B ◢
```

Pour une TI

```
Prompt N
0 → A
1 → B
For (I,2,N)
A+B → C
B → A
C → B
End
Disp B
```

b. Les différents types de définitions

On a déjà donné des exemples de suites définies explicitement en fonction de n :

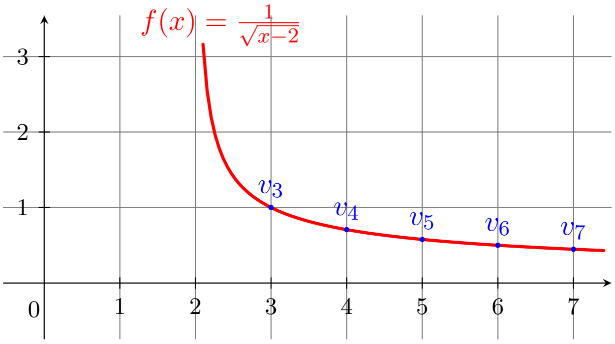
- la suite des nombres pairs : $u_n = 2n$
- la suite des carrés : $u_n = n^2$
- la suite des inverses : $u_n = \frac{1}{n}$
- la suite de terme général $v_n = \frac{1}{\sqrt{n-2}}$.

Dans chacun de ces exemples, il y a une fonction sous-jacente, définie sur une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle $[a; +\infty[$, où a est un entier. Dans le dernier exemple, la fonction sous-jacente f , définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$, a pour ensemble de définition $I =]2; +\infty[$. Comme $[3; +\infty[\subset I$, la suite v est définie pour $n \geqslant 3$.

Définition 1.2 (suite définie explicitement) Soient $a \in \mathbb{N}$, et f une fonction définie sur l'intervalle $[a; +\infty[$.
La suite $(u_n)_{n \geqslant a}$ de terme général $u_n = f(n)$ est une suite définie explicitement par la fonction f.

Remarque :

Il est facile de calculer un terme quelconque d'une suite définie explicitement par une fonction f (on remplace n par sa valeur). On verra que le comportement de ce type de suites (croissance, limite) se calque sur celui de f. Il est en particulier facile de représenter graphiquement ce type de suite : il suffit de placer, sur la courbe de la fonction, les points de coordonnées $(n; f(n))$
Voir l'illustration ci-contre pour la suite v (les valeurs de v_n se lisent sur l'axe des ordonnées)



Certaines suites sont définies explicitement par leur rang n alors qu'on ne sait pas exprimer de fonction sous-jacente. Donnons comme exemple la suite s dont le terme général s_n est la somme des chiffres de n en base dix. Il n'y a pas de fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui corresponde à cette notion (pour un irrationnel, cette somme est infinie donc non définie). Pourtant, on peut facilement déterminer n'importe que terme de cette suite : $s_{101} = 2$, $s_{123\,456\,789} = 45$, etc.

Définition 1.3 (suite définie implicitement) Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est définie implicitement si le terme général est donné par une description, valable à partir du rang n_0, qui permet de l'identifier, sans forcément fournir le moyen de le déterminer.

Exemple 3 – La somme « aliquote » a_n des diviseurs de n inférieurs à n est définie pour tout entier $n > 0$. Par exemple, les diviseurs stricts de 12 étant $1, 2, 3, 4$ et 6, la somme aliquote a_{12} vaut $1+2+3+4+6 = 16$. On qualifie ces diviseurs de « stricts » ou de « propres », l'expression « partie aliquote » étant aujourd'hui quelque peu désuète. Il est donc possible de calculer chacun des termes de la suite a sans disposer d'une écriture mathématique qui exprime a_n en fonction de n. Cette écriture existe ici, mais elle est compliquée et passe par la décomposition en facteurs premiers de n).

$$a_1 = 0 \; ; \; a_2 = 1 \; ; \; a_3 = 1 \; ; \; a_4 = 3 \; ; \; a_5 = 1 \; ; \; a_6 = 6 \; ; \; a_7 = 1 \; ; \; a_8 = 7$$
$$a_9 = 4 \; ; \; a_{10} = 8 \; ; \; a_{11} = 1 \; ; \; a_{12} = 16 \; ; \; a_{13} = 1 \; ; \; a_{14} = 10 \; ; \; a_{15} = 9 \; ; \quad \text{etc.}$$

La suite ainsi formée $0, 1, 1, 3, 1, 6, 1, 7, 4, 8, 1, 16, 1, 10, 9$, etc. peut être poursuivie autant qu'on le souhaite. Le moyen le plus commode, si on cherche à en déterminer un grand nombre de termes, est d'écrire un algorithme simple (voir ci-dessous). Cette suite étant importante, elle est référencée dans l'Encyclopédie en ligne des suites d'entiers de N.J.A. Sloane [3] sous le numéro $A001065$.

Algorithme

```
Lire n
a=1
Pour i allant de 2 à n
    si reste(a;i)=0
        alors a=a+i
    fin du si
Fin du Pour
Afficher a
```

Programme en Python

Le reste de la division euclidienne de n par i, noté reste(a ;i) dans l'algorithme, s'écrit n%i en Python. Noter aussi le test de l'égalité avec deux =, à distinguer de l'affectation qui se note avec un seul =.

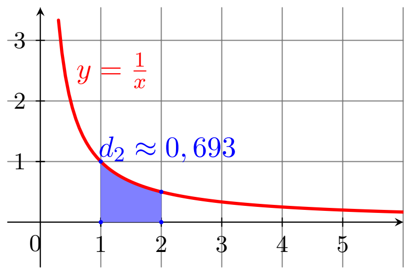
```
n,a=int(input("n=")),1
for i in range(2,n+1):
    if n%i==0 : a+=i
print("a{}={}".format(n,a))
```

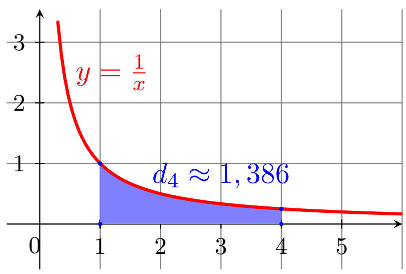
Exemple 4 –

La suite (d_n) est définie pour tout $n \geqslant 1$ par l'aire du domaine délimité par la courbe de la fonction inverse (la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = n$. Les surfaces colorées sur nos illustrations pour $n = 2$ et $n = 4$ ont pour aire des nombres correspondant à d_2 et d_4.

La fonction sous-jacente existe bien mais elle n'est pas encore connue en classe de première : il s'agit du logarithme népérien de n, noté $\ln(n)$. Sans connaître cette fonction, on range la suite d parmi les suites définies implicitement. On peut en déterminer des valeurs approchées avec un algorithme (sauriez-vous l'écrire ?). Voici les premiers termes, obtenus à la calculatrice ; excepté le 1^er^, ce ne sont que des valeurs approchées, ces nombres étant tous irrationnels :

$$d_1 = 0 \; ; \; d_2 = 0,693 \; ; \; d_3 = 1,099 \; ; \; d_4 = 1,386$$
$$d_5 = 1,610 \; ; \; d_6 = 1,792 \; ; \; d_7 = 1,946 \; ; \quad \text{etc.}$$





3. Chercher la suite sur le site de Sloane : https ://oeis.org/ en tapant les premiers termes 0, 1, 1, 3, 1, 6, 1, 7

Dans l'exemple 41, le n^{e} terme F_n de la suite de Fibonaci est déterminé à l'aide des deux termes précédents. Il suffit alors de connaître les deux premiers termes pour que toute la suite soit définie. Ce type de définition – une relation de récurrence – admet de nombreuses variantes, mais celle que nous étudierons plus particulièrement ici est la plus simple de toutes : le terme u_n est défini à l'aide du terme précédent u_{n-1} uniquement et d'un 1^{er} terme u_{n_0}.

Définition 1.4 (suite définie par récurrence) Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$, et soit $a \in I$. La suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = a \\ \text{pour } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ est définie par récurrence.

Remarques :

- La condition $f(I) \subset I$ est importante. Sans elle, on ne peut garantir l'existence de la suite : il est possible qu'un certain u_n soit dans I, mais que $f(u_n) = u_{n+1}$ n'y soit pas. Dans ce cas, on ne peut pas construire le terme u_{n+2}.
- Une suite définie explicitement peut gagner à être traduite en suite définie par récurrence, pour un calcul algorithmique plus efficace. La suite des factorielles $u_n = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ peut être avantageusement définie par la relation de récurrence $u_n = u_{n-1} \times n$ et la condition initiale $u_0 = 1$. C'est d'ailleurs ainsi qu'une calculatrice calcule le nombre $n!$.
- Une même fonction f peut définir plusieurs suites par récurrence. Il suffit de changer la condition initiale pour changer la suite. La suite des nombres pairs $u_n = 2n$ peut être définie par la relation de récurrence : $u_n = u_{n-1} + 2$, avec la condition initiale $u_0 = 0$, mais la même fonction : $x \mapsto x + 2$ sert à définir la suite des nombres impairs (la même relation de récurrence $u_n = u_{n-1} + 2$ et une valeur initiale différente $u_0 = 1$).
- Une même fonction f peut définir deux suites u et v différentes : $u_n = f(n)$ et $v_n = f(v_{n-1})$. Seule la dernière est une suite définie par récurrence. La fonction : $x \mapsto x + 2$ définit, on l'a dit, les suites des nombres pairs/impairs par récurrence, mais aussi , explicitement cette fois, la suite $u_n = 2 + n$ qui n'est que la suite décalée des nombres entiers $(2, 3, 4, 5, \text{etc.})$.

Exemple 5 – Soit la suite (u_n), définie par u : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ \text{pour } n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{u_{n-1}+1}{2} \end{cases}$.

La fonction f qui définit $u_n = f(u_{n-1})$ est la fonction affine : $x \mapsto \frac{x+1}{2}$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, on a bien $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_f$ donc la condition $f(I) \subset I$ est satisfaite.

Calculons les premiers termes de u :

$u_1 = \frac{u_0+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

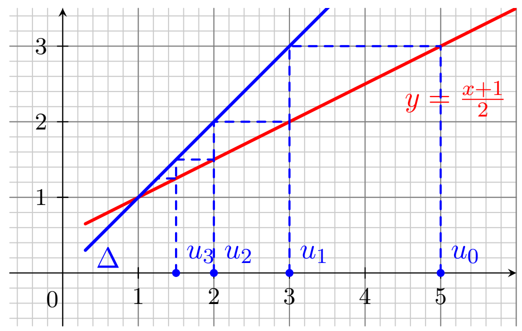
$u_2 = \frac{u_1+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$u_3 = \frac{u_2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$

Pour calculer un terme de rang donné, on est obligé de calculer tous les termes précédents. On peut déterminer u_{10} à la main mais s'il faut déterminer u_{100} ou $u_{10\,000}$, il faudra sans doute mettre au point un programme qui effectuera sans peine (et sans erreur) cette tâche (voir le programme de l'exemple 41).

Le tableur (« calc » de la suite OpenOffice ou « Excel » de Microsoft) est un outil assez adapté à ce genre d'opérations répétitives : on entre les valeurs et formules de calcul des deux premières lignes (entrer 0 cellule $A1$, 5 cellule $B1$ et `=(B1+1)/2` cellule $C1$, entrer ensuite 1 cellule $A2$, `=C1` cellule $B2$ et `=(B2+1)/2` cellule $C2$) puis on recopie la dernière ligne vers le bas à l'aide de la poignée noire. Cette solution convient pour u_{100} mais pas pour $u_{10\,000}$.

La représentation graphique de ce type de suite permet d'en visualiser le comportement : on trace la droite Δ d'équation $y = x$ et la courbe représentative de la fonction f. En plaçant u_0 sur l'axe des abscisses, on pourrait lire $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées, mais cette valeur est reportée sur l'axe des abscisses grâce à Δ (voir l'illustration). On recommence ensuite le procédé avec u_1, puis u_2, etc.



Exemple 6 – Donnons un 2[e] exemple de suite définie par une récurrence simple : soit la suite (p_n), définie par p : $\begin{cases} p_0 = 2 \\ \text{pour } n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{1}{1+p_{n-1}} \end{cases}$

La fonction g qui définit $p_n = g(p_{n-1})$ est la fonction homographique : $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, définie sur $I =]-1;+\infty[$. Or $g(I) =]0;+\infty[\subset I$ (voir la courbe). La condition de la définition 3.4 est bien satisfaite, la suite p est donc définie.

Calculons les premiers termes de p :

$p_1 = \frac{1}{1+p_0} = \frac{1}{3} \approx 0,33$

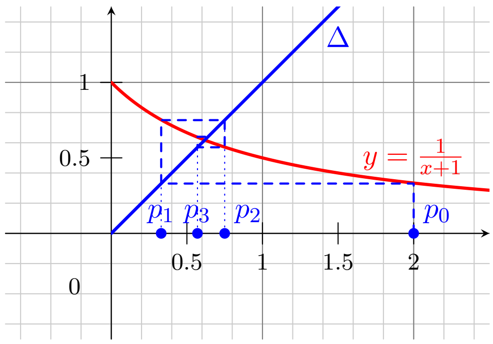
$p_2 = \frac{1}{1+p_2} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} = 0,75$

$p_3 = \frac{1}{1+p_3} = \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{4}{7} \approx 0,57$

On a parlé de calculer les termes successifs de la suite à l'aide d'un programme. L'inconvénient est qu'un programme informatique travaille avec des valeurs réelles approchées. Il serait intéressant ici de calculer séparément le numérateur N_n et le dénominateur D_n des termes de la suite p. Pour cela, exprimons N_n et D_n en fonction de N_{n-1} et D_{n-1} :

$$p_n = \frac{N_n}{D_n} = \frac{1}{1 + \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}}} = \frac{D_{n-1}}{D_{n-1} + N_{n-1}}$$

On obtient les formules de récurrences souhaitées : $N_n = D_{n-1}$ et $D_n = D_{n-1} + N_{n-1}$, ce qui est fort simple et s'intègre très facilement dans un programme tel que celui de l'exemple 41.



Algorithme

Pour éviter une variable supplémentaire dans la boucle, nous avons écrit l'affectation de N d'une façon un peu astucieuse (vérifier qu'elle fait bien ce qu'il faut).

```
Lire n
N=2
D=1
Pour i allant de 1 à n
    D=D+N
    N=D-N
Fin du Pour
Afficher N,D et N/D
```

Programme en Python

En Python, le problème ne se pose pas grâce à la possibilité déjà vue d'affecter directement un couple (un « tuple » selon la terminologie officielle).

```
n=int(input("n="))
N,D=2,1
for i in range(n)
    N,D=D,D+N
print("p{}={}/{}={}".format(n,N,D,N/D))
```

Grâce à ce programme, si je dois déterminer p_{100}, au lieu de me contenter d'une vague approximation à 15 chiffres, plus ou moins fausse, je peux calculer la valeur exacte :

$$p_{100} = \frac{792\,070\,839\,848\,372\,253\,127}{1\,281\,597\,540\,372\,340\,914\,251} \approx 0{,}618\,033\,988\,749\,894\,9$$

.

c. Propriétés

Définition 1.5 (sens de variation) Une suite est croissante (respect. strictement croissante) si, à partir d'un certain rang N, on a $u_{n+1} \geqslant u_n$ (respect. $u_{n+1} > u_n$).

Remarque :

Même définition pour une suite décroissante ou strictement décroissante, il suffit de mettre $\leqslant$ ou $<$. Une suite est dite « monotone » si elle est croissante ou décroissante (respect. strictement monotone si strictement croissante ou décroissante). Une suite est dite « constante » si à partir d'un certain rang, on a $u_{n+1} = u_n$.

Exemples :
On peut apprécier le sens de variation d'une suite lorsqu'on dispose d'une représentation graphique de cette suite. Bien sûr, il faut se méfier de certains comportements imprévus de la fonction sous-jacente s'il y en a une.

- La suite v de terme général $v_n = \frac{1}{\sqrt{n-2}}$ vue à la définition 3.2 est strictement décroissante à partir de son premier terme $v_3 = 1$.
- La suite d de l'exemple 43 est strictement croissante à partir de son premier terme $d_0 = 0$ car l'aire du domaine ne cesse de croître. On peut définir une relation de récurrence pour cette suite $d_{n+1} = d_n + a_n$ où a_n est la petite partie de l'aire qui est ajoutée au rang n. Comme il s'agit d'une aire non nulle, on a $a_n > 0$ ce qui prouve bien que $d_{n+1} > d_n$.
- La suite u de l'exemple 44 est strictement décroissante à partir de son premier terme $u_0 = 5$. Cela se comprend en regardant la courbe. Pour une preuve plus rigoureuse, voir plus loin.

Propriété 1.1 (critères de monotonie) Une suite (u) est croissante si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && \forall n \geqslant N, u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \\
&\text{(ii)} && \forall n \geqslant N, u_n > 0 \text{ et } \tfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \\
&\text{(iii)} && \forall n \geqslant N, u_n < 0 \text{ et } \tfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1
\end{aligned}$$

Démonstration Les critères énoncés ne font que traduire la définition 3.5 d'une suite croissante. Le critère (i) est applicable à toutes les suites alors que les deux suivants ne sont valables que pour des suites dont le terme général, à partir d'un certain rang, *ne s'annule pas et ne change pas de signe.*

Remarque :
Même critères pour montrer qu'une suite est décroissante, en changeant le sens des inégalités :

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0\,;\; u_n > 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1\,;\; u_n < 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$

Pour une monotonie stricte, prendre des inégalités strictes.

Exemples d'application des critères :

- Montrons que la suite u de l'exemple 44 est strictement décroissante à partir de $n = 0$.
  $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2}$. Calculons $u_{n+1} - u_n$ pour appliquer le critère (i) : $u_{n+1} - u_n = \frac{1-u_n}{2}$.
  Pour montrer que $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} - u_n < 0$, il faut donc montrer que
  $\forall n \geqslant 0, \frac{1-u_n}{2} < 0 \iff 1 - u_n < 0 \iff u_n > 1$.
  Ceci s'obtient par récurrence : $u_0 = 5 > 1$ et si, pour $n > 0$ on a $u_n > 1$ $(\star)$, alors pour $n+1$ on a $u_n + 1 > 2 \iff \frac{u_n+1}{2} > \frac{2}{2}$, soit $u_{n+1} > 1$ ce qui achève la récurrence.
- Montrons que cette suite est strictement décroissante à l'aide du critère (ii) :
  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n+1}{2u_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2u_n}$.
  Ce critère nécessite qu'on s'assure de deux inégalités : $\forall n, u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
  On a déjà montré $(\star)$ que $\forall n, u_n > 1$ donc, à fortiori, on a $\forall n, u_n > 0$.
  Pour l'autre inégalité, $\forall n, u_n > 1 \iff 2u_n > 2 \iff \frac{1}{2u_n} < \frac{1}{2}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0;\infty[$. On en déduit que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2u_n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, soit $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
- Montrons que la suite v de terme général $v_n = \frac{1}{\sqrt{n-2}}$ est strictement décroissante à partir de $v_3 = 1$. on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1-2}} \div \frac{1}{\sqrt{n-2}} = \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{\frac{n-2}{n-1}}$. Il se trouve que $0 < \frac{n-2}{n-1} < 1$ pour tout $n > 1$ car il s'agit du rapport de deux nombres entiers positifs et consécutifs, le plus grand étant au dénominateur. La fonction racine étant croissante sur $[0;\infty[$, on en déduit que $\sqrt{\frac{n-2}{n-1}} < \sqrt{1}$, soit $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$. Comme, de plus, $\forall n > 2, v_n > 0$ (v_n est une racine carrée), d'après (ii) la suite v est strictement décroissante.

Définition 1.6 (suite bornée) Une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est majorée si $\forall n \geqslant n_0, \exists M \in \mathbb{R}, u_n \leqslant M$.
Une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est minorée si $\forall n \geqslant n_0, \exists m \in \mathbb{R}, u_n \geqslant m$.
Une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est borné si elle est minorée *et* majorée.

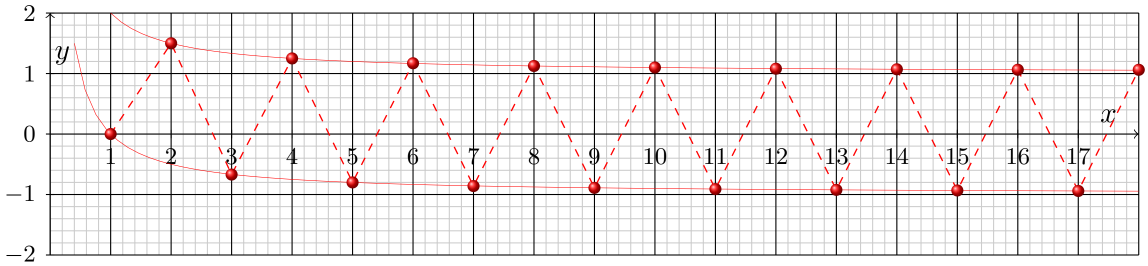
Remarques :
- Les nombres m et M qui interviennent dans cette définition sont appelés « minorant » et « majorant ». Il n'y a pas unicité de ces nombres : si une suite est majorée par M alors elle est majorée aussi par tous les nombres supérieurs à M. Il n'y a pas de plus grand majorant. Par contre, une suite majorée admet toujours un plus petit majorant, appelé borne supérieure. La suite des troncatures décimales de π admet pour borne supérieure le nombre π.
- On peut préciser qu'une suite est majorée (ou minorée ou bornée) « à partir d'un certain rang ».

Exemples : Revenons encore une fois sur les suites déjà étudiées.
- La suite v de terme général $v_n = \frac{1}{\sqrt{n-2}}$ vue à la définition 3.2 est bornée : elle est majorée, son premier terme $v_3 = 1$ en est la borne supérieure ; elle est minorée par 0 qui est la borne inférieure jamais atteinte, sa limite (voir plus loin).
- La suite d de l'exemple 43 est minorée par le premier terme $d_0 = 0$ qui est la borne inférieure. Cette suite n'est pas majorée : elle dépasse tout majorant arbitrairement choisi. Cela mérite une justification mais on laisse cela pour la classe terminale.
- La suite u de l'exemple 44 est bornée, tous ses termes étant compris entre 1 (borne inférieure, jamais atteinte) et 5 (premier terme $u_0 = 5$ et borne supérieure).

Exemple 7 – La suite (t_n), définie à partir de $n = 1$ par $t_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ admet -1 comme borne inférieure et $\frac{3}{2}$ comme borne supérieure.
Calculons les premiers termes de t :

$t_1 = (-1)^1 + \frac{1}{1} = -1 + 1 = 0$	$t_2 = (-1)^2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$
$t_3 = (-1)^3 + \frac{1}{3} = -1 + \frac{1}{3} = \frac{-2}{3} \approx -0,67$	$t_4 = (-1)^4 + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1,25$
$t_5 = (-1)^5 + \frac{1}{5} = -1 + \frac{1}{5} = \frac{-4}{5} = -0,8$	$t_6 = (-1)^6 + \frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6} \approx 1,17$

On voit se dessiner, et plus encore sur la représentation graphique ci-dessous, un comportement séparé de deux sous-suites : une suite p, associée à la fonction $x \mapsto -1 + \frac{1}{x}$, qui contient tous les éléments de rang pair de t (t_2, t_4, t_6, etc.) et qui est décroissante, minorée par 1 et majorée par $t_2 = \frac{3}{2} = 1,5$; une suite i, associée à la fonction $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$, qui contient tous les éléments de rang impair de t (t_1, t_3, t_5, etc.) et qui est décroissante aussi, mais minorée par -1 et majorée par $t_1 = 0$. Globalement, la suite t est donc bornée, ses bornes étant -1 et $\frac{3}{2} = 1,5$. Elle n'est pas décroissante alors que les deux sous-suites p et i dont elle est formée le sont.



> **Définition 1.7 (suite périodique)** Une suite (u_n) est périodique à partir du rang N s'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $\forall n \geqslant N, u_{n+p} = u_n$. L'entier p est alors la « période » de u.

Remarque : L'entier p appelé période est « le plus petit » entier non nul vérifiant la définition 3.7. Il est évident qu'une suite de période $p > 0$ vérifie aussi la propriété pour $2p$, $3p$, etc. La suite de terme général $(-1)^n$ est périodique de période 2 depuis $n = 0$, car $\forall n \geqslant 0, u_{n+2} = u_n$. On a aussi $u_{n+4} = u_n$, mais la période est 2 et non 4.

Exemples :

- Les suites constantes, ou constantes à partir d'un certain rang, sont des suites périodiques de période 1. La suite q des décimales de $\frac{1}{15} = 0,0666\dots$ est une suite constante, donc périodique de période 1, à partir du rang 2 : $\forall n \geqslant 2,\ \ q_{n+1} = q_n$.
- Si k est un entier non nul, les suites c et s définies par $c_n = \cos(\frac{2n\pi}{k})$ et $s_n = \sin(\frac{2n\pi}{k})$ sont périodiques de période k car cos et sin sont des fonctions périodiques de période 2π :
$c_{n+k} = \cos(\frac{2(n+k)\pi}{k}) = \cos(\frac{2n\pi}{k} + 2\pi) = \cos(\frac{2n\pi}{k}) = c_n$ (même chose pour la suite s).
- La suite de Syracuse S d'un nombre $S_0 = p$ est un exemple intéressant de suite « finalement » périodique. Définies par $S_{n+1} = \frac{S_n}{2}$ si n pair, $3S_n + 1$ si n impair, ces suites ont un comportement périodique qui tarde parfois à se manifester. On n'est pas encore sûr qu'elles finissent toutes sur le cycle $[4, 2, 1]$ (cela reste une conjecture) mais c'est assez probable. Voici la suite qui démarre sur 15 : $15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, \underline{4, 2, 1, 4, \dots}$

2. Suites arithmétiques et géométriques

a. Les suites arithmétiques

Définition 1.8 Une suite u est arithmétique si la différence entre deux termes consécutifs est constante, autrement dit s'il existe un réel r, appelé « raison » de la suite, tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.

Exemple 8 – Si u est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 4, on a :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = u_0 + 4 = 1 + 4 = 5 \quad ; \quad u_2 = u_1 + 4 = 5 + 4 = 9$$

On remarque que $u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$; de même, on aura $u_3 = u_0 + 3r$ et, plus généralement $u_n = u_0 + nr$. Ici, on aura $u_n = 1 + 4n$. La suite u est la suite des entiers dont le reste de la division euclidienne par 4 est 1.

Théorème 1.1 Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- u est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b
- u est la suite définie par $u_n = a + b \times n$.

Démonstration Si u est arithmétique de raison b, supposons que l'on ait $u_n = a + b \times n$ $(\star)$. Dans ce cas, $u_{n+1} = u_{n+1} + b = (a + b \times n) + b = a + b \times (n + 1)$. La relation $(\star)$ étant vraie pour n est vraie pour $n + 1$. Or $u_0 = a + b \times 0$, cette relation est donc vraie à partir de $n = 0$. Elle est donc vraie, de proche en proche, pour tout $n \geqslant 0$. Réciproquement, si pour tout $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a + nb$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = (a + (n + 1)b) - (a + nb) = b$. La suite u est donc une suite arithmétique de raison b et de premier terme $u_0 = a + 0 \times b = a$.

Remarque : On peut exprimer le terme de rang n d'une suite arithmétique de raison r à partir de n'importe quel terme. Par exemple à partir du terme de rang 1 :

$$\forall n \geqslant 1,\ \ u_n = u_0 + nr = (u_0 + r) + (n - 1)r = u_1 + (n - 1)r$$

De façon plus générale, si u est une suite arithmétique de raison r, pour tous les entiers n et p on a :

$$\forall n \geqslant p,\ \ u_n = u_0 + nr = (u_0 + pr) + (n - p)r = u_p + (n - p)r$$

Autrement dit, connaissant deux termes d'une suite arithmétique, on peut en déterminer la raison r :

$$\forall n \geqslant p,\ \ r = \frac{u_n - u_p}{n - p}$$

EXEMPLE 9 – Si u est une suite arithmétique telle que $u_{12} = 273$ et $u_{47} = 56$ (pourquoi pas !), on peut déterminer la raison de cette suite :

$$r = \frac{u_{47} - u_{12}}{47 - 12} = \frac{56 - 273}{35} = \frac{-217}{35} = -6,2$$

On remarque que $u_{12} = u_0 + 12r = u_0 + 12 \times (-6,2)$, donc on on déduit que

$$u_0 = u_{12} - 12 \times (-6,2) = 273 + 74,4 = 347,4$$

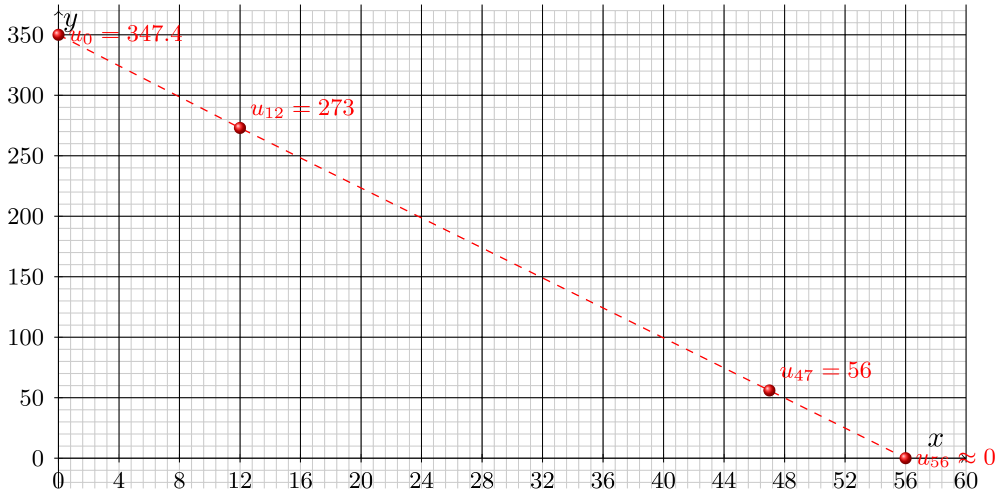
La suite u est ainsi la suite arithmétique de raison $-6,2$ commençant par $u_0 = 347,4$.

PROPRIÉTÉ 1.2 Une suite arithmétique u de raison r est croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$.

DÉMONSTRATION Le critère (i) de la propriété 3.1 s'applique directement ici :

$$u_{n+1} - u_n = r, \text{ donc } u_{n+1} - u_n > 0 \Longleftrightarrow r > 0$$

Remarque : Les points de coordonnées $(n; u_n)$ de la représentation graphique d'une suite arithmétique u de raison r sont alignés sur une droite de pente r. Cette droite représente la fonction sous-jacente : la fonction affine $x \mapsto rx + s$ où $s = u_0$. L'illustration de l'exemple 48 ci-contre montre la droite d'équation $y = -6.2x + 347,4$ sur laquelle sont rangés tous les points de coordonnées $(n; u_n)$.



PROPRIÉTÉ 1.3 (SOMME DES TERMES D'UNE SUITE ARITHMÉTIQUE) La somme S de n termes d'une suite arithmétique est le produit de n par la demi-somme du premier et du dernier terme, soit, en commençant au terme d'indice p :

$$S = n \times \frac{u_p + u_{p+n-1}}{2}$$

DÉMONSTRATION On a $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{p+n-2} + u_{p+n-1}$. Écrivons chaque terme u_{p+k} sous la forme équivalente $u_p + kr$ et écrivons la somme S dans un sens et dans l'autre :

$$\begin{cases} S = [u_p] & +[u_p + r] & + \dots & +[u_p + (n-2)r] & +[u_p + (n-1)r] \\ S = [u_p + (n-1)r] & +[u_p + (n-2)r] & + \dots & +[u_p + r] & +[u_p] \end{cases}$$

On remarque que la somme des termes superposés est toujours égale à $2u_p + (n-1)r$, soit $u_p + [u_p + (n-1)r] = u_p + u_{p+n-1}$, la somme des termes extrêmes. Comme il y a n termes dans chaque somme, il vient $2S = n \times (u_p + u_{p+n-1})$ d'où le résultat en divisant les deux membres par 2.

Remarque : Dans le cas où le premier terme est u_0, on a $S = n \times \frac{u_0+u_{n-1}}{2}$, et si le premier terme est u_1, on a $S = n \times \frac{u_1+u_n}{2}$. En utilisant la notation synthétique de la somme – la lettre Σ (« sigma majuscule », le « S » de l'alphabet grec) – cette propriété s'écrit :

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{p+n-2} + u_{p+n-1} = \sum_{k=p}^{p+n-1} u_k = n \times \frac{u_p + u_{p+n-1}}{2}$$

Exemple 10 – Calculons la somme des 100 premiers entiers non nuls : $S_{100} = 1+2+\cdots+99+100$. La suite des entiers consécutifs est la suite arithmétique v de premier terme $v_1 = 1$ et de raison $r = 1$. La somme S_{100} cherchée est donc la somme des 100 premiers termes de la suite v :

$$S_{100} = \sum_{k=1}^{100} v_k = 100 \times \frac{v_1 + v_{100}}{2} = 100 \times \frac{1+100}{2} = 5\,050$$

Calculons la somme des entiers compris entre 463 (inclus) et 612 (inclus). Il y a $612 - 463 + 1 = 150$ termes à ajouter, donc la somme cherchée est :

$$463 + 464 + \cdots + 611 + 612 = \sum_{k=463}^{612} v_k = 150 \times \frac{463+612}{2} = 75 \times 1075 = 80\,625$$

Exemple 11 –

Donnons une application moins triviale de cette formule. L'observation des 4 lignes ci-contre laisse conjecturer une propriété : il semblerait que la somme de la n^{e} ligne soit égale à n^3. On peut écrire une ligne supplémentaire pour tester cette conjecture :
$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 5 \times \frac{21+29}{2} = 5 \times 25 = 125 = 5^3$.

Somme des nombres impairs

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & & & = & 1 \\ & & 3 & + & 5 & & & = & 8 \\ & 7 & + & 9 & + & 11 & & = & 27 \\ 13 & + & 15 & + & 17 & + & 19 & = & 64 \end{array}$$

Cela semble se confirmer, mais pour le prouver, il faut montrer que la somme des n nombres impairs de la n^{e} ligne est égale à n^3 pour tout entier n. Combien y a t-il de nombres impairs écrits avant cette n^{e} ligne ? Avec la notation de l'exemple 49 ci-dessus, il y en a $S_{n-1} = (n-1) \times \frac{n-1+1}{2} = n \times \frac{n-1}{2}$.
La n^{e} ligne commence donc par le $(S_{n-1}+1)^{e}$ nombre impair, c'est-à-dire par $2(S_{n-1}+1) - 1$.
En remplaçant S_{n-1} par sa valeur, on obtient $2(n \times \frac{n-1}{2} + 1) - 1 = n(n-1) + 1$.
Il ne reste plus qu'à déterminer le n^{e} nombre impair de cette ligne qui commence par $n(n-1)+1$: il s'agit de $[n(n-1)+1] + 2(n-1)$, soit $n(n+1) - 1$.
Calculons maintenant la somme de cette n^{e} ligne : $n \times \frac{[n(n-1)+1]+[n(n+1)-1]}{2} = n \times \frac{2n^2}{2} = n^3$.

b. Suites géométriques

Définition 1.9 Une suite (u_n) est géométrique si le quotient entre deux termes consécutifs est constant, autrement dit s'il existe un réel $q \neq 0$, appelé « raison » de la suite, tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$.

Exemple 12 – Si u est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$, et de raison $q = 1,5$, on a :

$$\begin{aligned} &u_0 = 2 \\ &u_1 = q \times u_0 = 1,5 \times 2 = 3 \\ &u_2 = q \times u_1 = 1,5 \times 3 = 4,5 \\ &u_3 = q \times u_2 = 1,5 \times 4,5 = 6,75 \end{aligned}$$

On remarque que $u_2 = q \times u_1 = (q \times u_0) \times q = u_0 \times q^2$; de même, on aura $u_3 = u_0 \times q^3$ et, plus généralement, $u_n = u_0 \times q^n$. Ici, on aura $u_n = 2 \times 1,5^n$.
La suite u peut représenter une quantité initialement égale à 2, qui augmente de 50% à chaque période. Au bout de n périodes, la quantité est égale à $2 \times 1,5^n$.

Théorème 1.2 Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
- u est une suite géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b
- u est la suite définie par $u_n = a \times b^n$.

Démonstration Si u est géométrique de raison b, supposons que l'on ait $u_n = a \times b^n$ $(\star)$. Dans ce cas, $u_{n+1} = b \times u_n = b \times (a \times b^n) + b = a \times b^{n+1}$. La relation $(\star)$ étant vraie pour n est vraie pour $n+1$. Or $u_0 = a \times b^0$ $(b^0 = 1)$, cette relation est donc vraie à partir de $n = 0$. Elle est donc vraie, de proche en proche, pour tout $n \geqslant 0$.
Réciproquement, si pour tout $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a \times b^n$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a \times b^{n+1}}{a \times b^n} = b$. La suite u est donc une suite arithmétique de raison q et de premier terme $u_0 = a \times b^0 = a$.

Remarque : On peut exprimer le terme de rang n d'une suite géométrique de raison q à partir de n'importe quel terme. Par exemple à partir du terme de rang 1 :

$$\forall n \geqslant 1, \;\; u_n = u_0 \times q^n = (u_0 \times q) \times q^{n-1} = u_1 \times q^{n-1}$$

De façon plus générale, si u est une suite géométrique de raison q, pour tous les entiers n et p on a :

$$\forall n \geqslant p, \;\; u_n = u_0 \times q^n = (u_0 \times q^p) \times q^{n-p} = u_p \times q^{n-p}$$

Autrement dit, connaissant deux termes d'une suite géométrique, on peut utiliser la fonction « racine n^{e} » pour déterminer la raison q de la suite :

$$\forall n \geqslant p, \;\; q = \sqrt[n-p]{\frac{u_n}{u_p}}$$

Exemple 13 – Si u est une suite géométrique telle que $u_0 = 100\,000$ et $u_6 = 177\,156$, on peut déterminer la raison de cette suite :

$$q = \sqrt[6-0]{\frac{177156}{100000}} = \sqrt[6]{1,77156} = 1,1$$

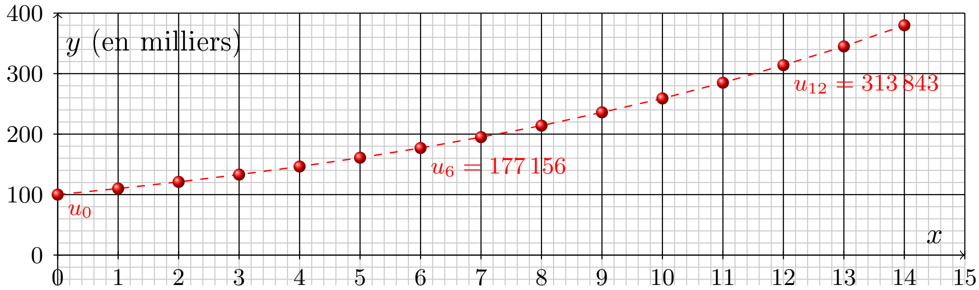
Imaginons que l'on cherchait ainsi le taux d'augmentation mensuel d'une population qui est passée de 100 000 individus à 177 156 individus en 6 mois. On vient de trouver que ce taux est de 10% car ainsi la population est multipliée par $1 + \frac{10}{100} = 1 + 0,1 = 1,1$.
Quelle sera la population à la fin de la 1^{re}année (après $n = 12$ mois) ?
On doit calculer $u_{12} = u_0 \times q^{12} = u_6 \times q^6 = u_6 \times 1,1^6 = 177\,156 \times 1,77156 \approx 313\,842$.
La population atteint 313 842 individus à la fin de la 1^{re}année.

Propriété 1.4 Une suite géométrique u de raison $q > 0$ est
- croissante si $u_0 > 0$ et $q > 1$ ou bien si $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$
- décroissante si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$ ou bien si $u_0 < 0$ et $q > 1$

Une suite géométrique u de raison $q < 0$ n'est ni croissante ni décroissante.

Démonstration Lorsque $q > 0$, la propriété 3.1 s'applique directement car, comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, les termes ne changent pas de signe. Ils sont positifs si $u_0 > 0$ et c'est le critère (ii) qui s'applique car alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \iff q > 1$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \iff q < 1$, ce qui démontre la 1^{re} partie des deux propositions.
Pour le cas où $u_0 < 0$, tous les termes sont négatifs est le critère (iii) permet de répondre.
Lorsque $q < 0$, les critères de la propriété 3.1 ne s'appliquent pas. Les termes de la suite sont alternativement positifs et négatifs ce qui explique que la suite n'est pas monotone.

Remarque : Les points de coordonnées $(n; u_n)$ de la représentation graphique d'une suite géométrique se disposent sur la courbe d'une fonction exponentielle (étudiée en classe de terminale). Sans entrer dans les détails de l'expression de la fonction sous-jacente, voici la représentation de la suite géométrique u de l'exemple 52 de premier terme $u_0 = 100\,000$ et de raison $q = 1,1$.



Propriété 1.5 (somme des termes d'une suite géométrique) La somme S de n termes d'une suite géométrique de raison q est le produit du premier terme u_p par le rapport $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ soit :

$$S = u_p \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Démonstration On doit d'abord établir la relation (déjà rencontrée au chapitre **??**) :

$$(1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+q^n) = 1-q^{n+1}$$

Si on développe le membre de gauche, on trouve directement le membre de droite. Tous les termes du développements s'annulent deux à deux, sauf le 1er et le dernier :

$$\begin{aligned}&[1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+q^n]-[q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}+q^n+q^{n+1}] =\\ &\qquad = 1+[q-q]+[q^2-q^2]+\cdots+[q^{n-1}-q^{n-1}]+[q^n-q^n]-q^{n+1} = 1-q^{n+1}\end{aligned}$$

La somme cherchée s'obtient en tout multipliant par u_p car :

$$S = u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\cdots+u_{p+n-2}+u_{p+n-1} = u_p(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+q^n)$$

Remarque : Avec la notation synthétique, la somme de n termes commençant par le terme de rang$p$ d'une suite géométrique de raison q s'écrit :

$$u_p+u_{p+1}+\cdots+u_{p+n-2}+u_{p+n-1} = \sum_{k=p}^{p+n-1} u_k = u_p \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemple 14 – Vous connaissez la légende du jeu d'échec : l'inventeur demanda comme rétribution au roi qu'on lui remit les grains de riz qu'on mettrait sur le cases de l'échiquier en commençant par 1 grain dans la 1re case, 2 sur la 2e case, etc. en doublant à chaque case. Comme il y a 64 cases sur un échiquier, cela fait :

$$S_{64} = 1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}+2^{64} = 1 \times \frac{1-2^{65}}{1-2} = 2^{65}-1$$

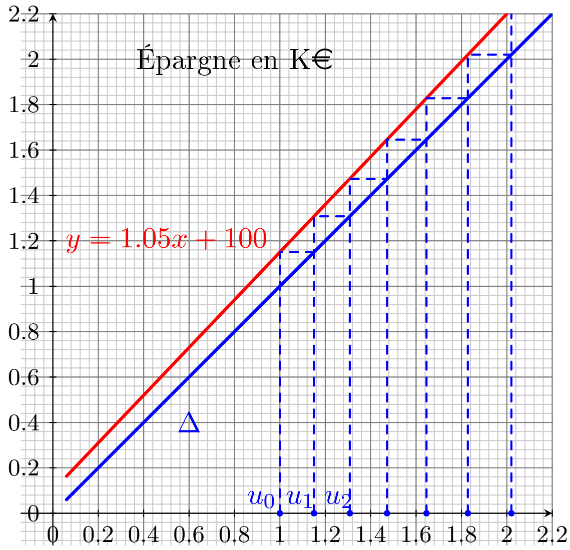
Le résultat est astronomique : 36 893 488 147 419 103 231 grains de riz.
Sachant que le poids de 1000 grains est $28g$, cela fait tout de même environ $1,033 \times 10^{15}kg$.
En 2014, la production mondiale de riz était de 740 millions de tonnes, soit $7,4 \times 10^{11}kg$...
N.B. : En base 2, de la même façon qu'après 111 (3 en base 10) il y a 1000 (4 en base 10), il ne faut pas s'étonner qu'après $\underbrace{1111\cdots111}_{\text{64 chiffres 1}}$ (notre somme ici), il y a $\underbrace{1000\cdots000}_{\text{1 suivi de 64 zéros}}$ (1 de plus que le résultat).

Exemple 15 (suite arithmético-géométrique) – Je dépose 1000 € sur un livret d'épargne. Á la fin de chaque année, la banque verse 5 % d'intérêts sur le livret et j'y ajoute aussi 100 €.

En appellant u_n la somme dont je dispose sur mon livret après n années, on a :

- pour $n \in \mathbb{N}$,
  $u_{n+1} = (1 + \frac{5}{100}) \times u_n + 100 = 1,05u_n + 100$
- la somme disponible sur le livret aujourd'hui est 1000 €, donc $u_0 = 1000$.

On a $u_1 = 1{,}05 \times 1\,000 + 100 = 1\,150$,
puis $u_2 = 1{,}05 \times 1\,150 + 100 = 1\,307{,}50 \ldots$
De proche en proche, on peut donc calculer u_n pour n'importe quelle valeur de n. Si on souhaite une formule explicite qui donne u_n directement en fonction de n, on peut utiliser la méthode suivante, valable pour toute suite dont la relation de récurrence est de type $u_{n+1} = au_n + b$. On a rencontré une telle suite, dite « arithmético-géométrique », dans l'exemple 44.



Méthode
La suite u_n n'est pas géométrique, mais on peut en construire une qui soit liée avec elle.
Le « point fixe » de la suite u est le nombre l qui vérifie : $l = 1,05l + 100$, soit $l = \frac{-100}{0{,}05} = -2000$.
Étudions la suite v définie par $v_n = u_n - l = u_n + 2000$. On a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 2000 = (1,05u_n + 100) + 2000 = 1,05u_n + 2100 = 1,05(u_n + 2000) = 1,05v_n$$

Ainsi (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 + 2000 = 3000$ et de raison $q = 1,05$.
On peut en déduire que $v_n = v_0 \times q^n = 3000 \times 1,05^n$ et donc $u_n = v_n - 2000 = 3000 \times 1,05^n - 2000$.

Voilà donc notre formule explicite : $\boxed{u_n = 3000 \times 1,05^n - 2000}$.

Vérifions qu'elle est correcte : $u_1 = 3000 \times 1,05^1 - 2000 = 3150 - 2000 = 1150$
$u_2 = 3000 \times 1,05^2 - 2000 = 3307,5 - 2000 = 1307,50$

L'application de cette méthode pour la suite de l'exemple 44, définie par $u_0 = 5$ et $u_n = \frac{u_{n-1}+1}{2}$, passe par le nombre l qui vérifie : $l = \frac{l+1}{2}$, soit $l = 1$. La suite associée est définie par $v_n = u_n - 1$ et on a $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{u_n+1}{2} - 1 = \frac{u_n-1}{2} = \frac{v_n}{2}$. La suite v est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 4$, on a donc $v_n = v_0 \times q^n = \frac{4}{2^n} = \frac{1}{2^{n-2}}$ et donc $u_n = v_n + 1 = 1 + \frac{1}{2^{n-2}}$.

3. Limite d'une suite

a. La notion de limite en +∞

Introduction :
Nous nous intéressons ici au comportement d'une suite u lorsque l'indice n devient de plus en plus grand – infiniment grand. Nous avons déjà observé des suites qui s'approchent progressivement d'une certaine valeur finie. La suite de l'exemple 40 (troncatures) s'approche progressivement de π.
La suite de l'exemple 41 (Fibonaci) nous montre un autre comportement : les termes deviennent progressivement plus grands et finissent par dépasser n'importe quelle valeur, aussi grande fut-elle.
L'exemple 42 (aliquote) montre un 3ᵉ type de comportement : les valeurs se suivent de façon irrégulière. Il n'y a pas de tendance autre que cet apparent chaos.

Trois possibilités de comportement en $+\infty$ se dégagent de ces exemples :

- Les valeurs se stabilisent de plus en plus autour d'un nombre réel fini l. Dans ce cas, on dira que la suite « converge » vers la limite l et on notera cela $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
- Les valeurs deviennent de plus en plus grande (respect. petite), et finissent par devenir supérieure à n'importe quelle valeur positive fixée à l'avance (respect. inférieure à n'importe quelle valeur négative). Dans ce cas, on dira que la suite « diverge » vers l'infini, $+\infty$ ou $-\infty$ selon les cas, et on notera cela $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (respect. $-\infty$).
- La suite de converge pas vers une limite et ne diverge pas vers l'infini. Elle peut osciller entre deux ou plusieurs valeurs (suites périodiques) ou bien suivre d'autres comportements. Dans ce cas, on dira que la suite « diverge » sans avoir de limite.

DÉFINITION 1.10 (SUITE CONVERGENTE) Une suite u converge vers une limite l si, à partir d'un certain rang N, tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n. Autrement dit :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \iff \forall\epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant N \Longrightarrow l-\epsilon < u_n < l+\epsilon$

Remarques : La dernière ligne est quelque peu abrupte. À la fin de cette ligne (après le $\Longrightarrow$), on aurait pu écrire – ce qui revient au même – $|u_n - l| < \epsilon$ à la place de $l-\epsilon < u_n < l+\epsilon$, mais cette simplification ne facilite pas forcément la compréhension.
Ces deux écritures traduisent l'expression *un intervalle ouvert contenant l contient le terme u_n* que l'on aurait pu écrire aussi $u_n \in]l-\epsilon; l+\epsilon[$. Ici, l'intervalle est centré sur l, le réel positif ϵ est son rayon. Plus ϵ est petit, plus on s'approche de l. En exigeant qu'à partir d'un certain rang N tous les termes u_n soient dans cet intervalle, quelle que soit la petitesse de ϵ, on traduit analytiquement la notion intuitive de limite.
On pourrait encore utiliser une autre notion, celle de la distance entre u_n et l, notée $d(u_n, l)$. La fin de la ligne serait alors notée $d(u_n, l) < \epsilon$.

EXEMPLE 16 – La suite des inverses définie pour tout entier $n \neq 0$ par $u_n = \frac{1}{n}$ a pour limite 0 en $+\infty$, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Cette affirmation est fondée sur l'observation que les inverses d'entiers deviennent de plus en plus petits, tout en restant supérieures à zéro. S'il faut prouver cela, choisissons une valeur arbitraire de la précision, par exemple $\epsilon = 10^{-6}$, et montrons qu'il existe un rang N à partir duquel toutes les inverses sont plus petites que cet ϵ là. On généralise ensuite cela à toutes les valeurs possibles de ϵ. Comme n et ϵ sont positifs tous les deux, on a :

$$\frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}$$

Il suffit donc de choisir comme valeur de N le premier entier supérieur à $\frac{1}{\epsilon}$ (donc $10^6 + 1 = 1000001$ quand $\epsilon = 10^{-6}$). Ainsi, pour tout entier $n \geqslant N$, on aura bien $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$ ce qui est plus contraignant encore que la notation de la définition : $-\epsilon < u_n < \epsilon$ (ici $l = 0$ et donc ici $l-\epsilon < u_n < l+\epsilon$ s'écrit $-\epsilon < u_n < \epsilon$).
On montrerait, de même, que les suites $(\frac{1}{n^2})$, $(\frac{1}{n^3})$, etc., $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ sont des suites qui convergent vers 0.

DÉFINITION 1.11 (SUITE DE LIMITE $+\infty$) Une suite u diverge et admet $+\infty$ comme limite si, à partir d'un certain rang N, tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n. Autrement dit :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant N \Longrightarrow u_n > A$

Remarques : On a une définition analogue pour les suites de limite $-\infty$:
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant N \Longrightarrow u_n < A$
Noter l'équivalence entre les écritures $u_n \in]A, +\infty[$ et $u_n > A$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on peut abréger cette notation et écrire simplement $\lim u = +\infty$ ou même $u \to +\infty$.

Exemple 17 – La suite des carrés définie pour tout entier par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$. Cette affirmation est fondée sur l'expérience : les carrés des entiers deviennent de plus en plus grands et finissent par dépasser toute valeur fixée à l'avance. S'il faut prouver cela, choisissons un maximum arbitraire $A > 0$, par exemple $A = 10^6$, et montrons qu'il existe un rang N à partir duquel tous les carrés sont plus grands que cette valeur A. On généralise ensuite cela à toutes les valeurs possibles de A. Comme n et A sont positifs tous les deux, on a :

$$n^2 > A \iff n > \sqrt{A}$$

Il suffit donc de choisir comme valeur de N le premier entier supérieur à $\sqrt{A}$ (donc $10^3 + 1 = 1001$ quand $A = 10^6$). Ainsi, pour tout entier $n \geqslant N$, on aura bien $n^2 > A$.
On montrerait, de même, que les suites (n), (n^3), etc., $(\sqrt{n})$ sont des suites qui ont pour limite $+\infty$.

b. Théorèmes sur les limites

Théorème 1.3 (croissante non majorée) Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$. De même, toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Démonstration Ne pas être majorée, pour une suite u, signifie que pour tout réel A, on peut trouver un rang N tel que $\forall n > N,\ u_n > A$. C'est la définition d'une suite de limite $+\infty$.
Ce théorème n'est donc qu'une reformulation de la définition.

Remarques : Si la suite u diverge vers $+\infty$, alors tout suite extraite de u diverge vers $+\infty$.
On entend par « suite extraite », une suite dont les termes successifs sont extraits, en des indices croissants (non nécessairement consécutifs) de la suite u. Par exemple, la suite (u_{2n}) est extraite de u (on prend un terme sur deux de la suite u). De même, les suites (u_{n+1}), (u_{3n+1}), (u_{n^2}) ou (u_{2^n}) sont des suites extraites de u, qui convergent vers $+\infty$ si u converge vers $+\infty$.
La suite (u_{2^n}) commence par $u_1,\ u_2,\ u_4,\ u_8$, etc.

Théorème 1.4 (croissante majorée) Toute suite croissante et majorée est convergente vers une limite l qui est le plus petit majorant de la suite.
De même, pour toute suite décroissante et minorée : sa limite est le plus grand des majorants.

Démonstration Nous admettrons ce théorème.

Exemple 18 – Montrons que la suite u définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est majorée par 2.
Pour commencer, montrons que $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ pour tout $n > 1$. En effet, $n^2 > n(n-1) = n^2 - n$ pour tout entier n, leurs inverses sont donc rangées dans le sens inverse.
La somme $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est donc majorée par $1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.
Or $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ (mettre au même dénominateur), u_n est donc majoré par $1 + \sum\limits_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k})$. En écrivant tous les termes de cette somme, on s'aperçoit qu'ils s'éliminent deux à deux :
$1 + (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{n}$. Donc $u_n < 2$.
De plus, la suite u est croissante, car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^2} > 0$. Par application du théorème 3.4, la suite converge vers une limite l.
Remarque : si le théorème annonce qu'il y a une limite, il ne donne pas sa valeur. Ici, on sait seulement que la limite est $l \leqslant 2$. puisque 2 est un majorant de cette suite. On peut s'approcher de la véritable limite de cette suite au moyen d'un programme. On en obtiendra ainsi une valeur approchée qui est bien inférieure à 2 puisqu'elle vaut environ 1,644 934 066 848 226 436 472 415 166 6.
Comme l'a montré Euler[4] en 1735, il s'agit de l'irrationnel $\frac{\pi^2}{6}$.

4. Leonhard Euler(1707 Bâle - 1783 St Pétersbourg), un des plus grands et des plus prolifiques mathématiciens

Théorème 1.5 (somme et produit par un réel) Soient u une suite qui diverge vers $+\infty$ et k un réel non nul.

- La suite $(u_n + k)$ diverge vers $+\infty$ et, si $k > 0$, la suite (ku_n) aussi
- Si $k < 0$, la suite (ku_n) diverge vers $-\infty$

Démonstration Examinons le cas $k > 0$: comme la suite u diverge vers $+\infty$, elle dépasse toute valeur arbitrairement fixée. Un réel $A > 0$ étant arbitrairement fixé.
La suite dépasse le réel $\frac{A}{k}$, à partir d'un certain rang N, et donc $\forall n > N,\ u_n > \frac{A}{k}$, soit $ku_n > A$. La suite (ku_n) diverge donc vers $+\infty$.
La suite dépasse le réel $A - k$, à partir d'un certain rang N', et donc $\forall n > N',\ u_n > A - k$, soit $u_n + k > A$. La suite $(u_n + k)$ diverge donc vers $+\infty$.
On raisonne de même dans le cas $k < 0$.

Exemples :
La suite u définie par $u_n = 3n^2$ a pour limite $+\infty$ car (n^2) a pour limite $+\infty$, on l'a vu dans l'exemple 56. La suite v définie par $v_n = -1 + 3n^2$ a donc pour limite $+\infty$.
La suite r définie par $r_n = -2\sqrt{n}$ a pour limite $-\infty$ car $(\sqrt{n})$ a pour limite $+\infty$, on l'a également mentionné dans l'exemple 56. La suite s définie par $s_n = 5 - 2\sqrt{n}$ a donc pour limite $-\infty$.

Ce théorème est un cas particulier du théorème suivant qui envisage les différents cas de figure pour la somme et le produit de deux suites.

Théorème 1.6 (somme et produit de suites) Soient u et v deux suites ayant une limite, finie ou infinie. Les suites de terme général $u_n + v_n$ et $u_n \times v_n$, admettent ou non une limite selon les différents cas exposés par les deux tableaux ci-dessous :

Suite « somme » : $(u_n + v_n)$

$\lim v$ \ $\lim u$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$

Suite « produit » : $(u_n \times v_n)$

$\lim v$ \ $\lim u$	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l' \neq 0$	$l \times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Démonstration Ce théorème est admis.

Remarques :

- Les cases hachurées indiquent des cas indéfinis. Dans ces cas, on ne peut pas conclure directement à l'aide de ce théorème. Par exemple, si on a $u_n = n^2$ et $v_n = -2n$, on a $\lim u = +\infty$ et $\lim v = -\infty$. La somme $u + v$ a une limite indéterminée à l'égard de ce théorème. Il suffit, dans ce cas, de factoriser : $u_n + v_n = n(n-2)$. La somme indéterminée est devenue déterminée puisque les suites r et s définies par $r_n = n$ et $s_n = n - 2$ forment une suite « produit » déterminée : chacune divergeant vers $+\infty$, la limite est trouvée à l'aide du tableau de droite, c'est $+\infty$. On verra dans l'exemple qui suit que les suites « polynomiale » admettent pour limite la limite de son « terme dominant ».
- L'indication $l' \neq 0$ (ou $l \neq 0$) masque un autre cas d'indétermination : $\infty \times 0$. On rencontre ce cas, par exemple, avec $u_n = n^2$ et $v_n = \frac{2}{n}$ puisque $\lim u = +\infty$ et $\lim v = 0$, mais l'indétermination est levée si on simplifie l'expression : $u_n \times v_n = 2n$ a pour limite $+\infty$.
- La notation $\pm\infty$ indique que la limite est $+\infty$ ou $-\infty$, selon le signe de la limite finie l ou l'. La règle des signes s'applique, étendue au signe des limites infinies. Par exemple, si on a $u_n = 0,1n^3$ et $v_n = -2 + \frac{1}{n}$, comme $\lim u = +\infty$ et $\lim v = -2$ (par application du théorème sur la limite d'une somme). Le produit $u \times v$ admet $-\infty$ comme limite, du fait des signes des limites de u (positive) et v (négative).

Exemple 19 – Quelle est la limite de la suite u définie par $u_n = -n^3 + 3n^2 - 2n + 1$? Le théorème 3.6 ne permet pas de conclure directement, le terme général étant écrit sous cette forme développée. Il faut mettre la plus grande puissance de l'indice en facteur et utiliser le volet « produit » de ce théorème. Ici, on écrira $u_n = n^3(-1 + \frac{3}{n} + \frac{-2}{n^2} + \frac{3}{n^3})$.
Le 1$^{\text{er}}$ facteur tend vers $+\infty$ tandis que le 2$^{\text{d}}$ tend vers -1, du fait de la limite de chacun des termes de la somme et du théorème sur la somme : $\lim -1 = -1$, $\lim \frac{3}{n} = 0$, $\lim \frac{-2}{n^2} = 0$ et $\lim \frac{3}{n^3} = 0$.

Ce n'est pas nécessaire de refaire ce travail à chaque fois qu'il se présente une suite dont le terme général a une forme polynomiale :

Méthode (Suite polynomiale)
Lorsque le terme général a une forme polynomiale de degré p : $u_n = \sum_{k=0}^{p} a_k n^k$, le terme dominant au voisinage de $+\infty$ est toujours celui de plus haut degré, donc ici $a_p n^p$. Les autres termes sont vite négligeables devant lui lorsque n devient très grand. La limite de u sera celle du terme dominant :

$$\lim \sum_{k=0}^{p} a_k n^k = \lim a_p n^p$$

L'expression « forme polynomiale » s'étend même ici aux puissances négatives de l'indice. La suite v définie par $v_n = -n^3 + 3n^2 - 2n + 1 - \frac{2}{n} + \frac{7}{n^2}$ aura le même comportement asymptotique que la suite u, au voisinage de $+\infty$, la différence $v_n - u_n$ ayant pour limite 0.

Théorème 1.7 (quotient de suites) Soient u et v deux suites ayant une limite, finie ou infinie. La suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ admet ou non une limite selon les différents cas exposés par le tableau ci-dessous :

$\lim u$ \ $\lim v$	l	$+\infty$	$-\infty$
$l \neq 0$	$\frac{l}{l'}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0		
$-\infty$	0		

Démonstration Ce théorème est admis.

Remarque :
Les cases hachurées indiquent, ici aussi, un cas d'indétermination : $\frac{\infty}{\infty}$. Dans le cas d'expressions polynomiales, selon le point méthode du théorème précédent, on ne conservera que les termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur. On simplifiera ensuite l'expression obtenue et on appliquera le théorème sur le quotient à ce moment.
Pour la suite u de terme général $u_n = \frac{-n^3+3n^2-2n+1}{5n^4+12n-7}$, on commence par dire que u a la même limite que la suite $(\frac{-n^3}{5n^4})$. L'expression du terme général se simplifiant en $\frac{-1}{5n}$, on applique le théorème sur le quotient : la limite est 0 (le numérateur est constant et le dénominateur tend vers $+\infty$).

Exemple 20 – Quelle est la limite de la suite u définie par $u_n = \frac{2^n-5}{3^n+1}$?
Le théorème 3.7 ne permet pas de conclure directement. En effet, nous avons au numérateur et au dénominateur des expressions qui tendent toutes les deux vers $+\infty$ (nous montrerons cela avec le théorème qui suit). Mais si on divise le numérateur et le dénominateur par $3^n > 0$, on obtient $u_n = \frac{(\frac{2}{3})^n - \frac{5}{3^n}}{1+\frac{1}{3^n}}$. Le numérateur tend maintenant vers 0 car les deux termes qui le composent tendent vers 0 (pour $\lim(\frac{2}{3})^n = 0$, voir le théorème suivant) ; le dénominateur, quant-à lui, tend vers 1.
Finalement, la suite u tend vers 0.

THÉORÈME 1.8 (MAJORATION) Soient u et v deux suites.
Si, à partir d'un certain rang N, on a $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. De même, si à partir d'un certain rang N, on a $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

DÉMONSTRATION Ce théorème est admis.

EXEMPLE 21 – Montrons que la suite u définie par $u_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2}$ a pour limite 0.
Pour cela montrons qu'il existe un rang N à partir duquel $u_n < \frac{2}{n}$.
n étant un entier, l'inégalité $n^2+1 < 4n^2$ est vraie si et seulement si $3n^2 > 1$, soit pour $n > \frac{1}{\sqrt{3}}$, la fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, à partir de $n = 1$, on a $n^2+1 < 4n^2$. En utilisant encore une fois la croissance de la fonction racine carrée, on en déduit que
$\forall n \geqslant 1,\ \ \sqrt{n^2+1} < \sqrt{4n^2}$, soit $\sqrt{n^2+1} < 2n$.
En divisant cette inégalité par n^2, on obtient le résultat cherché : à partir de $n = 1$, on a $u_n < \frac{2}{n}$.
Comme on l'a vu, la suite v, où $v_n = \frac{2}{n}$, a pour limite 0. D'après le théorème 3.8, la suite u a donc pour limite 0.

EXEMPLE 22 – Montrons que la suite u définie par $u_n = 2^n$ diverge vers $+\infty$.
Le terme général 2^n est supérieur à n pour toutes les valeurs de n car, d'après la relation écrite pour démontrer la propriété 3.5, on a : $2^n - 1 = (2-1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^1 + 2^0)$, et comme
$\forall k \geqslant 0,\ \ 2^k \geqslant 1$, on a $2^n = 1 + (2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^1 + 1) \geqslant n+1$.
Comme la suite v définie par $v_n = n+1$ diverge vers $+\infty$ et que $\forall n \geqslant 1,\ \ v_n < u_n$, d'après le théorème 3.8, la suite u diverge vers $+\infty$.

MÉTHODE

➲ Limites des suites géométriques

Ce que nous venons de faire avec la suite (2^n) se généralise à toutes les suites (a^n) où $a \geqslant 1$.

L'inégalité préliminaire que l'on obtient s'appelle « inégalité de Bernouilli » :
$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^1 + a^0)$, et comme $\forall k \geqslant 0,\ \ a \geqslant 1 \iff a^k \geqslant 1$, on a $\forall n \geqslant 0,\ \ a^n = 1 + (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^1 + a) \geqslant n(a-1)+1$.

- Pour $a > 1$, d'après le théorème 3.8, la suite (a^n) diverge vers $+\infty$ car $a^n \geqslant n(a-1)+1$ et que $\forall a > 1,\ \ \lim n(a-1)+1 = +\infty$.
- Pour $a = 1$, la suite (1^n) est constante. Elle converge vers 1.
- Pour $0 < a < 1$, la suite (a^n) converge vers 0. En effet, $a^n = \frac{1}{(\frac{1}{a})^n}$ et, comme $\frac{1}{a} > 1$, la suite de terme général $(\frac{1}{a})^n$ tend vers $+\infty$. Par application du théorème 3.7, la suite (a^n) étant obtenu par quotient d'une constante 1 par une expression tendant vers $+\infty$ tend vers 0.
- Pour $-1 < a < 0$, les termes de la suite sont alternativement positifs et négatifs, mais globalement la suite (a^n) tend vers 0.
- Pour $a < -1$, les termes de la suite sont alternativement positifs et négatifs, leur valeur absolue tend vers $+\infty$, mais la suite (a^n) diverge sans admettre de limite.

Comportement asymptotique d'une suite géométrique u de raison a et de premier terme u_0 :

a	$]-\infty;-1]$	$]-1;1[$	1	$]1;+\infty[$
$u_0 > 0$	pas de limite	0	u_0	$+\infty$
$u_0 < 0$	pas de limite	0	u_0	$-\infty$

Pour ce qui est de la somme S des termes d'une suite géométrique :

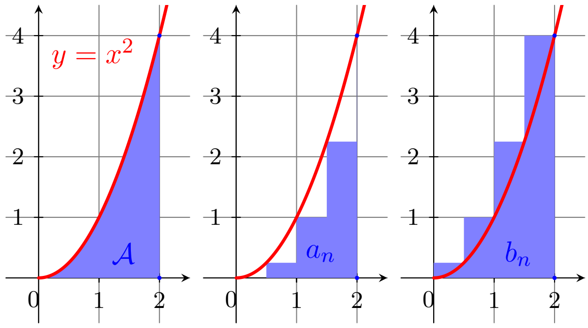
- Si $a > 1$, S diverge vers $\pm\infty$
- Si $|a| < 1$, la formule $S = u_0 \times \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ montre que, $1 - a^{n+1}$ tendant vers 1, $\lim S = \frac{1}{1-a}$.

Théorème 1.9 (gendarmes) Soient u, v et w trois suites. Si, à partir d'un certain rang N, on a $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Démonstration Ce théorème est admis.

Exemple 23 – Montrons que la suite u définie par $u_n = \frac{\sin n}{n}$ a pour limite 0.
Nous savons que $\forall n \geqslant 0$ on a $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$.
On en déduit l'encadrement, valable pour tout entier $n \geqslant 0$: $\frac{-1}{n} \leqslant \frac{\sin n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = 0$. D'après le théorème 3.9, la suite u converge donc vers 0.

Exemple 24 (Calcul d'aire) –



Pour finir, donnons un exemple d'application des suites à l'évaluation d'une aire ou d'un volume : calculons l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par la parabole d'équation $y = x^2$, la droite d'équation $x = 2$ et l'axe des abscisses.
➩ Pour cela, encadrons cette aire par deux aires a_n et b_n, plus faciles à calculer car constituées de rectangles (sur notre illustration $n = 4$).

- L'aire a_n est obtenue en additionnant les aires de n rectangles de largeur $\frac{2}{n}$; les hauteurs de ces rectangles constituent la suite h : $h_0 = 0$, $h_1 = (1\frac{2}{n})^2$, $h_2 = (2\frac{2}{n})^2$, $\cdots$, $h_{n-1} = ((n-1)\frac{2}{n})^2$.
- L'aire b_n est obtenue en additionnant les aires de n rectangles de largeur $\frac{2}{n}$; les hauteurs de ces rectangles constituent la suite H : $H_0 = (1\frac{2}{n})^2$, $H_1 = (2\frac{2}{n})^2$, $H_2 = (3\frac{2}{n})^2$,$\cdots$,$H_{n-1} = (n\frac{2}{n})^2$.

Ainsi, on a $a_n = h_0 \times \frac{2}{n} + h_1 \times \frac{2}{n} + \cdots + h_{n-1} \times \frac{2}{n}$, soit
$a_n = \frac{2}{n} \times (h_0 + h_1 + \cdots + h_{n-1}) = \frac{2}{n} \times [(0 + (1\frac{2}{n})^2 + \cdots + ((n-1)\frac{2}{n})^2]$.
En mettant $(\frac{2}{n})^2$ en facteur, il reste $a_n = (\frac{2}{n})^3 \times [0 + (1)^2 + (2)^2 + \cdots + (n-1)^2]$.
De même, l'aire b_n se transforme pour s'écrire $b_n = (\frac{2}{n})^3 \times [(1)^2 + (2)^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2]$.
L'encadrement se précise car $\forall n \geqslant 0, \quad a_n < \mathcal{A} < b_n$.
Il ne reste plus qu'à déterminer $\lim a_n$ et $\lim b_n$.

➩ Pour cela, il serait bien de disposer d'une identité donnant la somme S des n premiers carrés.
Calculons de deux manières différentes la quantité $Q = \sum_{k=1}^{n} [k^3 - (k-1)^3]$:

1. on sépare en deux la somme $Q = \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^3$. De cette façon, les termes s'annulent deux à deux sauf le plus grand ; il reste donc $Q = n^3$.
2. on simplifie l'expression dans les parenthèses
$Q = \sum_{k=1}^{n} [k^3 - (k^3 - 3k^2 + 3k - 1)] = \sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1)$.
De cette façon, en séparant en trois la somme, cela s'écrit
$Q = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 3S - 3P + n$, où P est la somme des n premiers entiers.

On en déduit que $n^3 = 3S - 3P + n$, soit $S = \frac{n^3+3P-n}{3}$. Remplaçons P par sa valeur $P = \frac{n(n+1)}{2}$, il vient $S = \frac{2n^3+3n(n+1)-2n}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$. On remarque que, pour $n = -1$ le polynôme $2n^2 + 3n + 1$ s'annule, ce qui conduit à la factorisation finale : $S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Remarque : on aurait pu, connaissant la formule, la démontrer par récurrence (c'est plus facile).

➩ Utilisons la formule pour simplifier a_n : $(\frac{2}{n})^3 \times (\frac{(n+1)(n)[2(n-1)+1]}{6}) = (\frac{2}{n})^3 \times (\frac{n(n+1)(2n-1)}{6})$.
De même, simplifions b_n : $(\frac{2}{n})^3 \times ((1)^2 + (2)^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2) = (\frac{2}{n})^3 \times (\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})$.
Déterminons les limites de a et b :

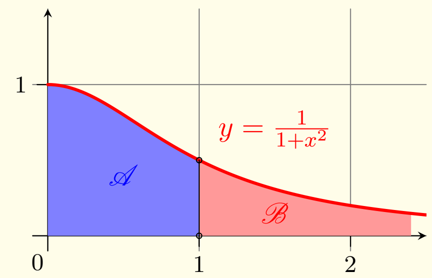
- $\lim a_n = \lim \frac{2^3 \times n(n+1)(2n-1)}{6n^3} = \lim \frac{2^3 \times 2n^3}{6n^3} = \frac{2^4}{6} = \frac{8}{3}$
- $\lim b_n = \lim \frac{2^3 \times n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim \frac{2^3 \times 2n^3}{6n^3} = \frac{2^4}{6} = \frac{8}{3}$

Ces deux suites encadrent $\mathcal{A}$ et convergent vers $\frac{4}{3}$; par application du théorème 3.9, $\mathcal{A} = \frac{8}{3}$.

Le coin du chercheur

✳ On se propose de déterminer une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine limité par la courbe d'équation $y = \frac{1}{1+x^2}$, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ et l'axe des abscisses.

➩ Pour cela, on découpe l'intervalle $[0; 1]$ en n tranches et on considère l'aire des rectangles intérieurs au domaine, la somme de ces rectangles constituant une valeur approchée par défaut de $\mathscr{A}$ que l'on note s_n (comme dans l'exemple 63). Une fois que l'on a obtenu une expression qui en permet le calcul algorithmiquement, déterminer s_{10}, s_{100}, s_{1000}, etc. jusqu'à reconnaître les décimales d'un irrationnel célèbre.
Indication : c'est plutôt le quadruple de $\mathscr{A}$ qui est célèbre...
Jusqu'à quelle valeur de n faut-il aller pour que $4s_n$ nous donne les 4 bonnes premières décimales de cet irrationnel ?



➩ Question d'intuition : à votre avis, l'aire sous la courbe à partir de $x = 1$ jusqu'à $+\infty$, notée $\mathscr{B}$, est-elle plus ou moins grande que $\mathscr{A}$? Si la réponse est plus, cette aire est-elle finie ou infinie ?

Méthode (Fiche de révision)

Définitions et propriétés à connaître par ♥

➲ Définitions	
Suite u	fonction $\forall n \geqslant n_0,\ u(n) = u_n \in \mathbb{R}$; notée aussi $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ ou (u_n)
terme général	u_n : un terme de rang indéterminé (n) de la suite
rang	place dans la suite : $\text{rang}(u_{n_0}){=}1 \Longrightarrow \text{rang}(u_n){=}n+1-n_0$
déf. par récurrence	u_n est défini par une relation avec u_{n-1} et un terme initial u_0
déf. explicite	u_n est connu directement en fonction de n
constante	à partir d'un certain rang $N \geqslant n_0$, on a $\forall n \geqslant N,\ u_{n+1} = u_n$
croissante	à partir d'un certain rang $N \geqslant n_0$, on a $\forall n \geqslant N,\ u_{n+1} \geqslant u_n$
majorée	à partir d'un certain rang $N \geqslant n_0$, $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant M$
monotone, bornée	monotone : croissante ou décroissante ; bornée : majorée et minorée
périodique	$\exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_{n+p} = u_n$; p : période
convergente	admet une limite l quand n tend vers$+\infty$
divergente	n'admet pas de limite finie quand n tend vers$+\infty$
limite	admet une limite finie ou infinie
arithmétique	différence $u_{n+1} - u_n$ constante (raison r) ; suite définie par u_0 et r
géométrique	quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ constant (raison q) ; suite définie par u_0 et q
➲ Propriétés	
croissante	$u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ou, u_n restant positif, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$
convergente	suite croissante et majorée ou décroissante et minorée
	gendarmes : $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n,\ \lim v_n = \lim w_n = l \Longrightarrow \lim u_n = l$.
	références : $(\frac{1}{\sqrt{n}}),\ (\frac{1}{n}),\ (\frac{1}{n^2})$, etc. convergent vers 0
divergente vers $+\infty$	suite croissante et non majorée ou décroissante et non minorée
	$u_n \geqslant v_n,\ \lim v_n = +\infty \Longrightarrow \lim u_n = +\infty$
	références : $(\sqrt{n}),\ (n),\ (n^2)$, etc. divergent vers $+\infty$
arithmétique	terme général : $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_p + (n-p)r$
	somme : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = (n+1) \times \frac{2u_0+nr}{2}$ ou $\sum\limits_{k=p}^{p+n-1} u_k = n \times \frac{u_p+u_{p+n-1}}{2}$
	a, b et c consécutifs d'une suite arithm. $\Longleftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$
géométrique	terme général : $u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_p \times q^{n-p}$
	somme : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ou $\sum\limits_{k=p}^{p+n-1} u_k = n \times \frac{1-q^n}{1-q}$
	a, b et c consécutifs d'une suite géom. $\Longleftrightarrow b^2 = ac$