3 Exercices sur les suites

Table des matières

3.1 Énoncés

3.1.1 Comportement des suites

Exercice 3.1 (Définition explicite)
1. On désigne par d_n le n$^{\text{e}}$ chiffre de la partie décimale de $\frac{2018}{19}$.
Étudier la périodicité de la suite (d_n) et donner une définition explicite de d_n.
Donner en particulier la valeur de d_{2019}.
2. Mêmes questions si d_n est le n$^{\text{e}}$ chiffre de la partie décimale de $\frac{2018}{2019}$.
Indication : Pour cette dernière partie, on peut écrire un programme qui affiche la suite des chiffres d'un quotient jusqu'au retour d'un reste déjà obtenu.

Exercice 3.2 (Comparaison)
On se propose de comparer les suites de termes généraux $1,5^n$ et $100n^2$.
Pour cela on pose $u_n = 1,5^n - 100n^2$.

1. Á l'aide de la calculatrice, montrer que $u_{28} > 0$
2. Établir que (u_n) est croissante à partir d'un rang que l'on précisera
3. En déduire que, pour $n \geqslant 28$, on a $1,5^n \geqslant 100n^2$. Vérifier cela graphiquement

Exercice 3.3 (Monotonie)
Étudier la monotonie des suites (u_n) dans les cas suivants :

$$u_n = 2n + \frac{1}{5^n} \qquad u_n = 0,99^n + \frac{n}{100}$$

$$u_n = (1-a)^n + (1+a)^n \text{ avec } a \in]0;1[$$

$$u_n = \frac{3^n}{n+1} \qquad u_n = \frac{2^n\sqrt{n}}{3^n}$$

Indication : on pourra calculer $u_{n+1} - u_n$ pour les 3 premières et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour les suivantes, après s'être assuré que $u_n > 0$ pour tout n.

Exercice 3.4 (Somme du carré des chiffres d'un entier)
On considère la fonction f qui associe à tout entier la somme du carré de ses chiffres.
Par exemple $f(123) = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$

La suite (u_n) associée à un nombre entier $a \neq 0$ est définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_n = f(u_{n-1}) \end{cases}$.

Partie 1 : Nombres à 2 chiffres

1. Expliciter la suite (u_n) associée à l'entier $a = 13$
2. Étudier la périodicité de la suite (u_n) associée à l'entier $a = 4$
3. Montrer que pour tous les nombres entiers $a \neq 0$ à 1 ou 2 chiffres, on se retrouve, à partir d'un certain rang N, dans l'un des deux cas précédents. Pour cela, on peut écrire un petit programme qui effectue le travail en partant de a et en s'arrêtant lorsque l'une des conditions d'arrêt est atteinte

Partie 2 : Nombres à 3 chiffres
Soit $x = 100c + 10d + u$ un nombre à 3 chiffres $c \neq 0, d, u$.
Calculer $x - f(x)$ en fonction de c, d, u puis montrer que $x - f(x) \geqslant 99 + u - u^2 > 0$.
En déduire que $f(x) \leqslant x - 1$, puis que la suite (u_n) associée à un entier a qui s'écrit avec 3 chiffres est telle que $u_n \leqslant 99$ à partir d'un certain rang N. Conclure.

Partie 3 : Nombres à plus de 3 chiffres
Montrer, en étudiant la monotonie de la suite $n \longmapsto 10^{n-1} - 81n$, que pour $p > 3$ on a $81p < 10^{p-1}$.
En déduire que si u_n s'écrit avec $p > 3$ chiffres alors $u_{n+1} = f(u_n)$ s'écrit avec au plus $p-1$ chiffres, puis que la suite (u_n) associée à un entier a qui s'écrit avec plus de 3 chiffres est telle que $u_n \leqslant 999$ à partir d'un certain rang N. Conclure.

3.1.2 Formules explicites

Exercice 3.5 (Fraction continue)
Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$ et $u_0 = 2$.

1. Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5
2. On souhaite définir les suites (a_n) et (b_n) de manière à ce que $\frac{a_n}{b_n}$ soit l'écriture rationnelle irréductible de u_n. On suppose pour cela que a_n et b_n sont des entiers et que $(a_0, b_0) = (2, 1)$. Déterminer (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4) et (a_5, b_5).
3. Déterminer les formules qui donnent a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n. Programmer ces formules sur votre calculatrice, puis donner les couples (a_n, b_n) pour $6 \geqslant n \geqslant 15$.
4. Représenter graphiquement les points de coordonnées $(n, \frac{a_n}{b_n})$ pour $0 \leqslant n \leqslant 15$.
   Quel semble être le comportement de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini ?
5. Résoudre l'équation $x = 2 + \frac{1}{x}$ et en déduire que la solution positive de cette équation peut s'écrire sous forme de « fraction continue » :
   $$2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}}$$
   Expliquer alors pourquoi la limite de la suite u est égale à ce nombre
6. Montrer que l'expression $f(n) = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$ vérifie l'égalité $f(n+1) = 2f(n) + f(n-1)$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Montrer ensuite que $a_0 = f(2)$ et $a_1 = f(3)$ et en déduire une expression explicite de a_n puis de u_n.

Exercice 3.6 (Sommes)
1. Rappeler pourquoi la somme des n premiers entiers est $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Démontrer par récurrence sur l'entier n que
   - la somme des n premiers carrés est $C_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   - la somme des n premiers cubes est $K_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
3. Développer et regrouper les termes de ces sommes pour les exprimer explicitement :
   - $u_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n \times (n+1)$
   - $v_n = 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \cdots + n \times (n+1) \times (n+2)$
   - $w_n = 1 \times 3 \times 5 + 2 \times 4 \times 6 + 3 \times 5 \times 7 + \cdots + n \times (n+2) \times (n+4)$
4. Vérifier les formules obtenues en écrivant un petit programme pour chacune (une légère modification suffit pour passer de l'un à l'autre) et en comparant les résultats du programme et de la formule pour un entier donné (par exemple pour $n = 100$).

3.1.3 Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 3.7 (Suite auxiliaire géométrique)
1. Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = 2u_n + 5$ et $u_0 = 1$.
Montrer que u n'est ni arithmétique, ni géométrique.
On pose $v_n = u_n + 5$ pour tout entier $n \geqslant 0$; montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. En déduire l'expression l'explicite de v_n, puis de u_n.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = -3u_n + 8$ et $u_0 = 6$.
Montrer que u n'est ni arithmétique, ni géométrique.
On pose $v_n = u_n - 2$ pour tout entier $n \geqslant 0$; montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. En déduire l'expression l'explicite de v_n, puis de u_n.
3. *Généralisation :* Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = au_n + b$ et $u_0 = c$.
Á quelles conditions u n'est ni arithmétique, ni géométrique ?
Dans ces conditions, on pose $v_n = u_n - \alpha$ de manière à ce que (v_n) soit une suite géométrique. Déterminer α en fonction de a et b (chercher l'unique réel α solution de l'équation $x = ax + b$), préciser le premier terme et la raison de la suite v, en déduire l'expression explicite de v_n et de u_n. Vérifier les résultats des questions 1 et 2 puis déterminer l'expression explicite de u_n sachant que $u_{n+1} = \frac{u_n}{3} - \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{6}$.

Exercice 3.8 (Suite auxiliaire arithmétique)
1. Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$ et $u_0 = 2$.
On admet que $u_n \neq 0$ pour tout entier n.
On pose $v_n = \frac{1}{u_n}$ pour tout entier n ; montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison. En déduire l'expression l'explicite de v_n, puis de u_n. Vérifier alors que $u_n \neq 0$ pour tout entier n.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = \frac{10u_n}{10+u_n}$ et $u_0 = 5$.
On admet que $u_n \neq 0$ pour tout entier n.
On pose $v_n = \frac{5}{u_n}$ pour tout entier n ; montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison. En déduire l'expression l'explicite de v_n, puis de u_n. Vérifier alors que $u_n \neq 0$ pour tout entier n.
3. *Généralisation :* Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+au_n}$ et $u_0 = b$.
On admet que $u_n \neq 0$ pour tout entier n.
Dans ces conditions, on pose $v_n = \frac{\alpha}{u_n}$ de manière à ce que (v_n) soit une suite arithmétique. Y a t'il une condition pour α ? Préciser le premier terme et la raison de la suite v, puis déduire l'expression explicite de v_n et de u_n. Vérifier alors que $u_n \neq 0$ pour tout entier n. Vérifier les résultats des questions 1 et 2 puis déterminer l'expression explicite de u_n sachant que $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2-u_n}$ et $u_0 = 6$.

3.1.4 Limites des suites

Exercice 3.9 (Suite logistique)
On considère une suite (x_n) définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n),\ x_0 \in [0;1]$ où μ est un paramètre qui appartient à l'intervalle $[0;4]$. L'objectif est d'étudier le comportement de cette suite selon les valeurs de μ.

1. Tracer sur Geogebra la parabole d'équation $y = \mu x(1-x)$ pour une valeur $\mu < 1$, par exemple pour $\mu = 0,8$. Placer le point de coordonnées $(x_0;0)$ avec $x_0 \in [0;1]$ (on pourra faire varier la valeur de x_0). Construire le point de coordonnées $(x_1;0)$ en utilisant la parabole et la droite d'équation $y = x$. Procéder de même pour construire les points de coordonnées $(x_2;0)$ et $(x_3;0)$. Conjecturer le comportement et la limite de la suite (x_n).
2. Utiliser un tableur pour obtenir les valeurs de x_n pour $0 \leqslant n \leqslant 50$.
   La conjecture est-elle mise en défaut ?
3. Expliquer pourquoi, si la suite converge vers une limite l, celle-ci doit être solution de l'équation $x = \mu x(1-x)$. En déduire les deux valeurs potentielles de la limite.
4. Montrer que, dans le cas où $\mu < 1$, la suite est décroissante (montrer que $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$) et minorée. En déduire qu'elle converge vers une limite l que vous préciserez.

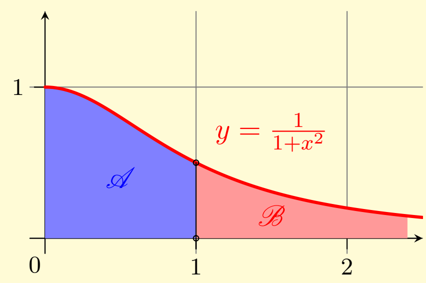
On veut maintenant explorer les autres situations qui correspondent à d'autres valeurs de la constante μ. Reprendre les deux premiers points en les adaptant au comportement rencontré. On ne cherchera pas ici à prouver les comportements observés.

- $1 < \mu < 3$(on pourra subdiviser cet intervalle en deux morceaux : avant et après $\mu = 2$).
- $3 < \mu < 4$ (on pourra subdiviser cet intervalle en différents morceaux correspondants à des comportements différents. En particulier, on observera la différence entre ce qui se passe avant et après $\mu = 3,57$)

3.1.5 le coin du chercheur

Exercice 3.10
On se propose de déterminer une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine limité par la courbe d'équation $y = \frac{1}{1+x^2}$, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ et l'axe des abscisses.

➩ Pour cela, on découpe l'intervalle $[0;1]$ en n tranches et on considère l'aire des rectangles intérieurs au domaine, la somme de ces rectangles constituant une valeur approchée par défaut de $\mathscr{A}$ que l'on note s_n (comme dans l'exemple 63 du cours). Une fois que l'on a obtenu une expression qui en permet le calcul algorithmiquement, déterminer s_{10}, s_{100}, s_{1000}, etc. jusqu'à reconnaître les décimales d'un irrationnel célèbre.
Indication : c'est plutôt le quadruple de $\mathscr{A}$ qui est célèbre...
Jusqu'à quelle valeur de n faut-il aller pour que $4s_n$ nous donne les 4 bonnes premières décimales de cet irrationnel ?



➩ Question d'intuition : à votre avis l'aire sous la courbe à partir de $x = 1$ jusqu'à $+\infty$, notée $\mathscr{B}$, est-elle plus ou moins grande que $\mathscr{A}$? Si la réponse est plus, cette aire est-elle finie ou infinie ?