2

Géométrie plane

Objectifs :

- Revoir la condition de colinéarité de deux vecteurs et les équations de droites
- Développer la notion d'angle orienté (mesure en radians) et la trigonométrie
- Étudier le produit scalaire de deux vecteurs et en voir des applications

Aperçu historique :

La géométrie analytique a commencé avec Fermat[1] *et Descartes qui définirent les systèmes de coordonnées pour étudier des problèmes géométriques, mais c'est Newton qui développera ces notions, son application en astronomie étant à l'origine du terme « vecteur ». Ce n'est qu'au XIX^e que Bolzano, puis Poncelet, Chasles et Bellavitis formalisèrent la notion de vecteur.*

Le mot « trigonométrie » vient du grec trigonos *(triangle) et de* metron *(mesurer). C'est la science qui traite des relations entre les distances et les angles dans un triangle. Ses origines sont très anciennes.*

- *L'astronome et mathématicien grec Hipparque de Nicée (2 siècles avant J.-C.) construisit les premières tables trigonométriques, mais c'est Ptolémée d'Alexandrie, 3 siècles plus tard, qui les fit connaître avec son « Almageste » où il établit les premières propriétés du sinus et du cosinus.*
- *Au V^e siècle, l'astronome et mathématicien indien Aryabhata définit le sinus dans son acception moderne. Au XI^e, Omar Khayyam utilise la trigonométrie pour résoudre des équations algébriques. Au XIV^e, Al-Kashi réalise des tables de fonctions trigonométriques lors de ses études en astronomie.*
- *En Europe, la trigonométrie se développe vers le milieu du XIV^e siècle, avec la traduction en latin des œuvres de Ptolémée. En 1579, dans son « Canon Mathematicus », Viète donne des tables d'une grande précision (11 à 12 chiffres) ainsi que des formules reliant entre elles les lignes trigonométriques. Le mathématicien Pitiscus publie un travail remarquable sur la trigonométrie en 1595, dont le titre – « Trigonometria » – a donné son nom à la discipline.*

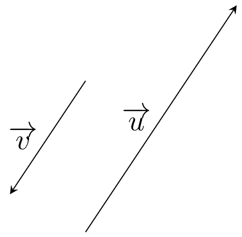
Un scalaire est un entier – ce nom vient du latin scolaris *(escalier, échelle)– et le produit scalaire est une opération entre vecteurs donnant un entier. Elle a été utilisée par Grassmann, Gibbs (notation du point) et Hamilton, au XIX^e siècle. Peano apporte sa contribution en reliant l'aire algébrique d'un parallélogramme au produit scalaire.*
En physique, Le produit scalaire $\vec{F} \cdot \vec{AB}$ permet de calculer le travail de la force $\vec{F}$ pendant le déplacement rectiligne de A vers B. On utilise également cette notion en hydrodynamique, en électromagnétisme,...

1. Quelques nom et dates, dans l'ordre des naissances : François Viète (1540-1603), Bartholomäus Pitiscus (1561-1613), René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), Isaac Newton (1643-1727), Bernard Bolzano (1781-1848), Jean-Victor Poncelet (1788-1867), Michel Chasles (1793-1880), Giusto Bellavitis (1803-1880), Hermann Günther Grassmann (1809-1877), William Rowan Hamilton (1805-1865), Josiah Willard Gibbs (1839-1903), Giuseppe Peano(1858-1932)

1. Vecteurs colinéaires

a. Définition

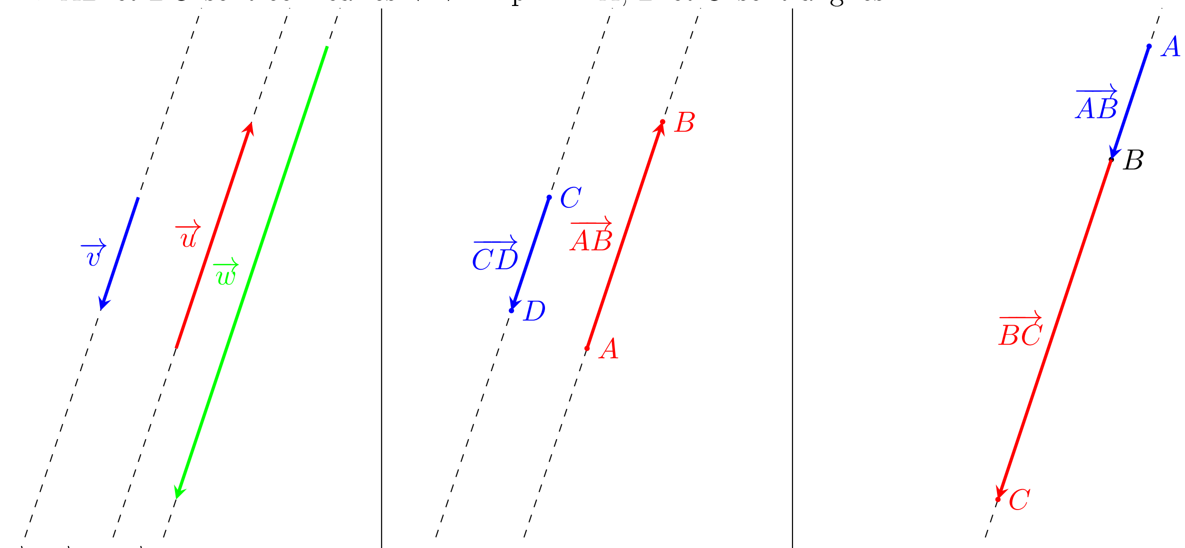
Définition 2.1 Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont dits colinéaires s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.



Convention : Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.

Colinéaire signifie « sur une même ligne ».
Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.
Traduction dans le langage des figures :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\Longleftrightarrow$ $(AB)//(CD)$
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires $\Longleftrightarrow$ les points A, B et C sont alignés



$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires | $(AB)//(CD)$ | A, B et C sont alignés

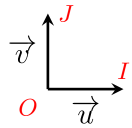
b. Caractérisation analytique

Pour ne pas le dire à chaque fois : ici, les points appartiennent à un même ensemble de points coplanaires (le plan) et les vecteurs à un même ensemble de vecteurs coplanaires (le plan vectoriel).

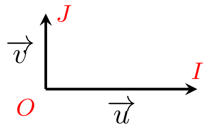
Définition 2.2 On appelle base tout couple $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de vecteurs non colinéaires. Un repère est un triplet $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où O est un point, appelé Origine, et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base.

Remarques :

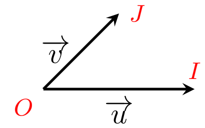
- Un triplet $(O; I; J)$ de points non alignés constitue le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ où la base associée est le couple de vecteurs $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$. Ce repère est noté indifféremment $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ ou $(O; I; J)$.
- Dire que la base $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ est normée signifie que $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont de même longueur. Ils sont de norme unitaire : $\|\overrightarrow{OI}\| = \|\overrightarrow{OJ}\| = 1$ (la notation $\|\overrightarrow{u}\|$ indique la longueur ou « norme » du vecteur $\overrightarrow{u}$).
- La base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est orthonormée si et seulement si elle est normée et orthogonale : $OI = OJ = 1$ et $(OI) \perp (OJ)$. Dans un repère orthonormé (la base associée est dite orthonormée), on peut calculer des distances.



base orthonormée



base orthogonale



base quelconque

THÉORÈME 2.1 Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base et O un point.

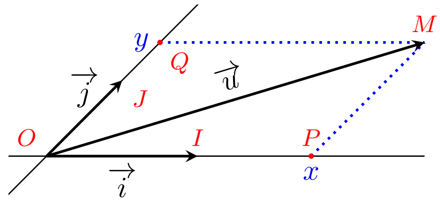
- Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple de réels $(x;y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
- Pour tout point M, il existe un unique couple de réels $(x;y)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Remarque : x et y sont les *coordonnées* du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et les *composantes* du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. On note ce couple indifféremment (x,y), $(x;y)$ ou $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

DÉMONSTRATION

Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base et $\vec{u}$ un vecteur. Montrons d'abord l'existence, puis l'unicité des composantes de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Existence : Soient O un point quelconque et I, J et M les points définis par $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.



$\vec{i}$ et $\vec{j}$ n'étant pas colinéaires, (OI) et (OJ) ne sont pas parallèles. La parallèle à (OJ) passant par M coupe la droite (OI) en un unique point P. De même, la parallèle à (OI) passant par M coupe la droite (OJ) en un unique point Q.

Par construction, $OPMQ$ est un parallélogramme (éventuellement aplati), donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ $(\star)$

Or $\overrightarrow{OP}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires. D'après la définition 2.1, il existe un réel x tel que $\overrightarrow{OP} = x\vec{i}$.

De même, il existe un réel y tel que $\overrightarrow{OQ} = y\vec{j}$. L'égalité $(\star)$ s'écrit : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

On a construit les réels x et y, ce qui assure leur existence.

Unicité : Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux couples distincts de réels (x,y) et (x',y') tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{u} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.

On a $x\vec{i} - x'\vec{i} = (\vec{u} - y\vec{j}) - (\vec{u} - y'\vec{j}) = -y\vec{j} + y'\vec{j}$, soit $(x - x')\vec{i} = (y' - y)\vec{j}$.

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ n'étant pas colinéaires, cette égalité ne peut être vérifiée que si $(x - x')$ et $(y' - y)$ sont nuls :

$$\begin{cases} x - x' = 0 \\ y' - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' \\ y' = y \end{cases} \quad \text{ce qui contredit le fait que } (x,y) \text{ et } (x',y') \text{ soient distincts.}$$

La décomposition $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est donc bien unique.

EXEMPLE 1 – Médiane : Soient ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$.

Montrons que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

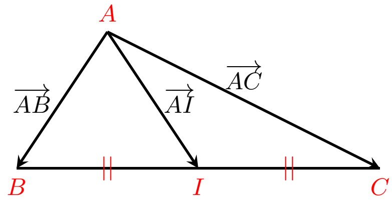
En appliquant la relation de Chasles, on a :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}) = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} (\star)$.

I étant le milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IC}$ et donc $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$(\star)$ devient : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} + \vec{0} = 2\overrightarrow{AI}$.

En divisant par 2 les membres de cette égalité, on obtient l'égalité annoncée qui caractérise le milieu de $[BC]$.



ABC étant un triangle, on peut penser que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et forment une base du plan. Dans ce cas, les composantes de $\overrightarrow{AI}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. Mais la relation vectorielle obtenue reste vraie, même lorsque A, B et C sont alignés et ne forment donc pas une base.

Propriété 2.1 Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère et deux points, $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $(x_B - x_A, y_B - y_A)$
2. Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$

Démonstration Ces relations traduisent avec des coordonnées, les relations vectorielles :

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, relation « soustractive » de Chasles
2. $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, relation caractéristique obtenue dans l'exemple 1 (en changeant les noms de points)

D'après le théorème 2.1, $\overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$ et $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$.
On obtient donc, après réduction de la relation 1 : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$.
De même pour la relation 2 : $\overrightarrow{OI} = \frac{x_A+x_B}{2}\vec{i} + \frac{y_A+y_B}{2}\vec{j}$.

Propriété 2.2 (Condition de colinéarité) $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ sont colinéaires si et seulement si le déterminant des deux vecteurs est nul, soit si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y = 0$.

Démonstration Traduisons la définition 2.1 avec des coordonnées :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} &\iff \exists k \in \mathbb{R},\ \vec{u} = k\vec{v} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{R},\ x\vec{i} + y\vec{j} = k(x'\vec{i} + y'\vec{j}) \\
&\iff \exists k \in \mathbb{R},\ (x - kx')\vec{i} + (y - ky')\vec{j} = \vec{0}
\end{aligned}$$

Comme précédemment, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ n'étant pas colinéaires, cette égalité implique :

$$\begin{cases} x - kx' = 0 \\ y - ky' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases} \quad \text{ce qui signifie que } xy' - yx' = kx'y' - ky'x' = 0$$

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ sont colinéaires, les composantes de ces deux vecteurs vérifient $xy' - yx' = 0$.
Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors la relation $xy' - yx' = 0$ est aussi vérifiée, quel que soit $\vec{v}$; de même si $\vec{v} = \vec{0}$.

Réciproquement, montrons que la condition $xy' - x'y = 0$ implique la colinéarité.
Supposons donc que $xy' - x'y = 0$.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\vec{u}$ est colinéaire à tous les vecteurs donc il est colinéaire à $\vec{v}$; de même si $\vec{v} = \vec{0}$
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors l'une de ses coordonnées au moins n'est pas nulle. Supposons que $x \neq 0$, alors $xy' - x'y = 0 \Longrightarrow y' = \frac{x'}{x}y$ et donc on a trouvé un réel $k = \frac{x'}{x}$ tel que $y' = ky$. De plus, $x' = \frac{x'}{x}x$, donc on a aussi $x' = ky$. Finalement, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Si on avait $y \neq 0$ au lieu de $x \neq 0$, on procèderait de la même manière et obtiendrait la même conclusion.

Les deux propositions « $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ sont colinéaires » et « $xy' - x'y = 0$ » sont donc équivalentes.

Remarques :

- Si deux vecteurs non nuls $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ sont colinéaires, leurs composantes (x, y) et (x', y') sont proportionnelles. Mais, si un des deux vecteurs est nul, la colinéarité n'implique pas la proportionnalité des composantes : l'autre vecteur peut ne pas être nul.
- Le déterminant $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$ est souvent noté sous forme matricielle :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Exemple 2 – Soit α un réel. Les vecteurs $\overrightarrow{u}(\alpha+2;8)$ et $\overrightarrow{v}(2;\alpha-2)$ peuvent-ils être colinéaires ? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de α ? On a $xy'-x'y=(\alpha+2)\times(\alpha-2)-2\times 8$. Écrivons la condition de colinéarité :

$$\begin{aligned} xy'-x'y=0 &\iff (\alpha+2)\times(\alpha-2)-2\times 8=0 \\ &\iff \alpha^2-4-16=0 \\ &\iff \alpha^2=20 \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\alpha=2\sqrt{5}$ ou $\alpha=-2\sqrt{5}$.

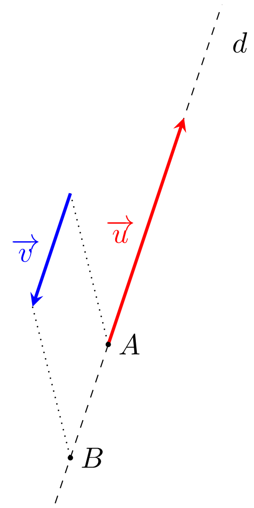
c. Équations cartésiennes d'une droite

Vecteurs directeurs d'une droite

Définition 2.3 (Vecteur directeur) Soit d une droite.
On appelle vecteur directeur de d tout vecteur non nul ayant la même direction que d.

Remarques :

- Une droite possède une infinité de vecteurs directeurs qui sont tous colinéaires entre eux, puisque de même direction
- Si A et B sont deux points distincts de la droite d, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d
- On peut définir une droite par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur. La notation $d(A,\overrightarrow{v})$ désigne la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$.
  Ici, comme $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$, la droite $d(A,\overrightarrow{v})$ est confondue avec $d=(AB)$
- $M\in d \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.



Équations cartésiennes d'une droite

Théorème 2.2 Toute droite d admet une équation de la forme $ax+by+c=0$, avec $(a,b)\neq(0;0)$. Une telle équation est appelée équation cartésienne de d. Réciproquement, si a ou b n'est pas nul, $ax+by+c=0$ est l'équation d'une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-b,a)$.

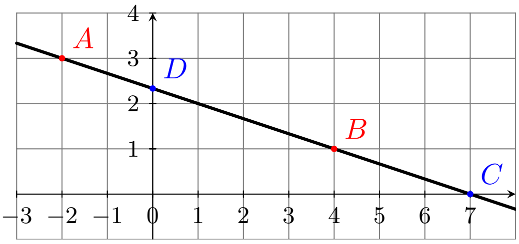
Démonstration Soient d une droite, $A(x_A;y_A)\in d$, et $\overrightarrow{v}(\alpha;\beta)\neq(0;0)$ un vecteur directeur de d.
On a : $M(x,y)\in d \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires $\iff x_{\overrightarrow{AM}}\times y_{\overrightarrow{v}}-y_{\overrightarrow{AM}}\times x_{\overrightarrow{v}}=0$
Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\ y-y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, on a donc :
$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires $\iff (x-x_A)\times\beta-(y-y_A)\times\alpha=0 \iff \beta x-\alpha y+(-\beta x_A+\alpha y_A)=0$
En posant $a=\beta$, $b=-\alpha$, et $c=(-\beta x_A+\alpha y_A)$, la droite d admet bien une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$; le vecteur directeur $\overrightarrow{v}(\alpha,\beta)$ étant non nul et égal au vecteur $\overrightarrow{u}(-b,a)$, les réels a et b ne sont pas tous les deux nuls.

Réciproquement, supposons que $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ appartiennent à une droite d'équation $ax+by+c=0$ où a et b ne sont pas nuls tous les deux. En soustrayant membre à membre les égalités $ax_A+by_A+c=0$ et $ax_B+by_B+c=0$, on obtient $a(x_B-x_A)+b(y_B-y_A)=0$. Comme $a(x_B-x_A)+b(y_B-y_A)=det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u})$, ce déterminant étant nul indique que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires. La droite d'équation $ax+by+c=0$ est donc bien dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(-b,a)$.

Remarques :

- La droite d possède une infinité d'équations cartésiennes ; si $ax+by+c=0$ est une équation de d alors $\forall k \in \mathbb{R}^*,\ \ kax+kby+kc=0$ en est une autre. Si on prend en particulier $k=\frac{-1}{c}$, on obtient l'équation $\frac{-a}{c}x+\frac{-b}{c}y=1$ qui s'écrit aussi, en posant $\alpha=\frac{-c}{a}$ et $\beta=\frac{-c}{b}$, $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$. Les points $A(\alpha,0)$ et $B(0,\beta)$ sont les points d'intersection de d avec les axes de coordonnées.
- Si $a=0$ la droite d'équation $by+c=0$ avec $b\neq 0$, soit $y=\frac{-c}{b}$, est « horizontale »
Si $b=0$ la droite d'équation $ax+c=0$ avec $a\neq 0$, soit $x=\frac{-c}{a}$, est « verticale ».
- L'équation réduite de forme $y=mx+p$, n'est possible que si $b\neq 0$. On a alors $m=\frac{-a}{b}$ et $p=\frac{-c}{b}$. Toutes les droites n'ont pas une équation réduite de cette forme mais celles qui sont concernées n'en ont qu'une : l'équation réduite est unique. Le vecteur directeur associé à cette forme réduite a pour composantes $(1,m)$, d'où le terme de « coefficient directeur » pour m. Les autres droites, celles qui sont verticales, ont une équation réduite unique aussi, de la forme $x=k$ (avec $k=\frac{-c}{a}$, on l'a dit) et un vecteur directeur associé de composantes $(0,1)$.

Exemple 3 –
Soient $A(-2;3)$ et $B(4;1)$.
Déterminons une équation cartésienne de la droite (AB).
$\overrightarrow{AB}(6,-2)$ est un vecteur directeur de (AB).
On va donc poser $-b=6$ et $a=-2$.
La droite (AB) admet l'équation cartésienne :
$-2x-6y+c=0$.
Comme $A(-2,3)\in(AB)$ on a :



$$-2x_A-6y_A+c=0 \iff -2\times(-2)-6\times 3+c=0 \iff 4-18+c=0 \iff c=14$$

Une équation cartésienne de (AB) est donc $-2x-6y+14=0$.
En divisant les deux membres par -2, on en obtient une autre : $x+3y-7=0$ qui est associée au vecteur directeur $\vec{v}(-3,1)$.
En posant $\alpha=\frac{-c}{a}=7$ et $\beta=\frac{-c}{b}=\frac{7}{3}$, les points $C(\alpha,0)$ et $D(0,\beta)$ sont les intersections de (AB) avec les axes de coordonnées, et on peut donner l'équation $\frac{x}{7}+\frac{3y}{7}=1$ sur laquelle les coordonnées de ces points sont visibles.
L'équation réduite (unique) de (AB) est : $y=\frac{-1}{3}x+\frac{7}{3}$. Cette équation est associée au vecteur directeur $\vec{w}(1,\frac{-1}{3})$.

Caractérisation des droites parallèles

Propriété 2.3 Soient (a,b) et (a',b') deux couples de réels différents de $(0,0)$.
Les droites $d: ax+by+c=0$ et $\delta: a'x+b'y+c=0$ sont parallèles si et seulement si $ab'-a'b=0$.

Démonstration $d//\delta$ si et seulement si les vecteurs directeurs de ces droites, $\vec{u}(-b,a)$ et $\vec{v}(-b',a')$, sont colinéaires. D'après la propriété 2.2, cela est réalisé si et seulement si $ab'-a'b=0$.

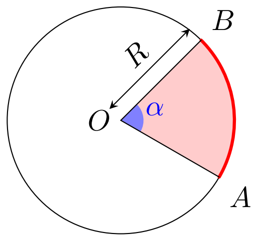
Exemple 4 – On donne les équations de deux droites $d: 3x+2y+1=0$ et $\delta: 6x+4y-3=0$.
Sont-elles parallèles ? $3\times 4-6\times 2=12-12=0$ donc oui, ces droites sont parallèles.
Déterminons une équation de Δ, la parallèle à d passant par $I(1,0)$. L'équation de Δ est de la forme $3x+2y+c=0$, où seul le réel c est à déterminer. Comme $I\in\Delta$, on doit avoir $3x_I+2y_I+c=0$, soit $3+c=0 \iff c=-3$. Une équation de Δ est $3x+2y-3=0$.
La droite D d'équation réduite $y=m\sqrt{2}x+2m^2-1$ est parallèle à d. Quelle est l'équation de D ?
Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux. Celui de D est $m\sqrt{2}$ tandis que celui de d est $\frac{-3}{2}$. On doit avoir $m\sqrt{2}=\frac{-3}{2}$, donc $m=\frac{-3}{2\sqrt{2}}=\frac{-3\sqrt{2}}{4}$. L'équation de D est $y=\frac{-3(\sqrt{2})^2}{4}x+2(\frac{-3}{2\sqrt{2}})^2-1=\frac{-3}{2}x+\frac{5}{4}$.
Ordonnons ce faisceau : $\Delta: y=\frac{-3}{2}x+\frac{3}{2}$, $D: y=\frac{-3}{2}x+\frac{5}{4}$, $\delta: y=\frac{-3}{2}x+\frac{3}{4}$ et $d: y=\frac{-3}{2}x-\frac{1}{2}$.

2. Angles orientés

a. Cercle trigonométrique

Définition 2.4 (Radian) Le radian (abrev :rad) est une unité de mesure des angles qui est proportionnelle au degré : π rad $= 180°$.

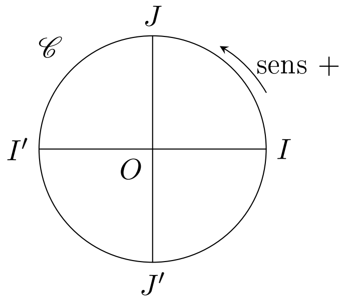
- Un angle de mesure α radians, au centre d'un cercle de rayon R, intercepte un arc $\overset{\frown}{AB}$ de longueur $R\alpha$.
- Un secteur circulaire d'angle α radians et de rayon R a une aire égale à $\frac{R^2\alpha}{2}$.



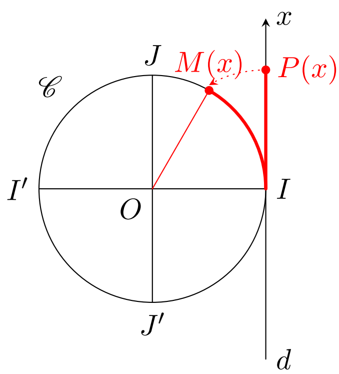
Mesures d'angles en radians et mesures correspondantes en degrés :

mesure en degrés	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$360°$	$\approx 57°$	$x°$	$\frac{180y}{\pi}°$
mesure en radians	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	2π rad	1 rad	$\frac{x\pi}{180}$ rad	y rad

Définition 2.5 (Cercle trigonométrique) Le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ est un cercle de rayon 1, orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, appelé sens « positif », sur lequel on choisit un point de départ I. Le centre de $\mathscr{C}$ est noté O.

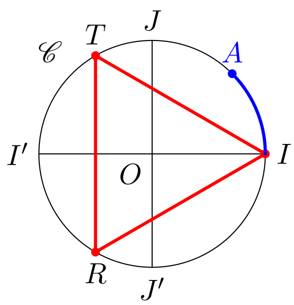


Définition 2.6 (Enroulement de l'axe réel) Soient (O, I, J) un repère orthonormé du plan et $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.
La parallèle d à (OJ) passant par I, étant munie d'un repère $(I, \overrightarrow{OJ})$, est un axe gradué contenant tous les réels. L'enroulement de cet axe autour du cercle trigonométrique conduit à associer un réel x de d à un point M de $\mathscr{C}$.
Dans la notation $M(x)$ qui traduit cette association, le réel x est appelé « abscisse curviligne » de M sur $\mathscr{C}$.

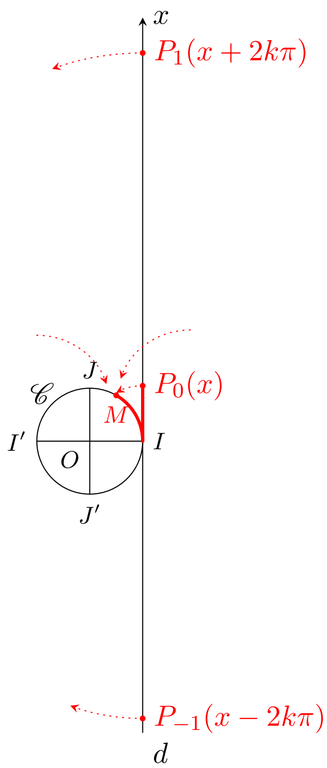


Exemple 5 –

- Les points I, J, I' et J' du cercle trigonométrique ont pour abscisses curvilignes les réels 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.
  Le réel associé au milieu A du petit arc $\overset{\frown}{IJ}$ est $\frac{\pi}{4}$.
  Les sommets T et R du triangle équilatéral TRI ont des abscisses curvilignes égales à $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.
- L'enroulement de l'axe des réels autour du cercle trigonométrique ne se limitant pas à faire un seul tour dans le sens direct, les abscisses curvilignes associées à un de ces points sont en nombre infini. Le point I, par exemple, est associé aux réels $\dots$, -4π, -2π, 0, 2π, 4π, $\dots$ soit aux nombres de la forme $2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.



PROPRIÉTÉ 2.4 (ABSCISSES CURVILIGNES D'UN POINT) Soient x un réel, et M le point du cercle trigonométrique associé à x. Alors M est aussi associé à tous les réels de la forme $x + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.



DÉMONSTRATION Ajouter 2π à une abscisse curviligne quelconque revient à faire un tour supplémentaire autour du cercle trigonométrique. De même, retrancher 2π revient à faire un tour dans le sens négatif. Dans tous les cas ajouter $2k\pi$, k étant un entier relatif quelconque, ne modifie pas la position sur le cercle.

Dans l'exemple 5 , les abscisses curvilignes des points I, J, I', J', A, T et R peuvent être données pour un entier relatif k quelconque :

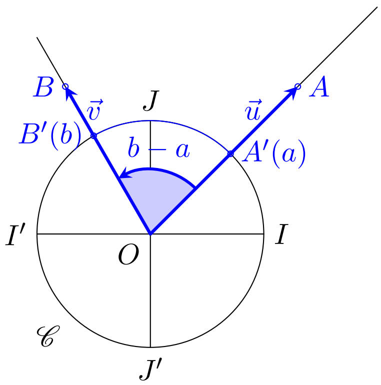
$I(0+2k\pi)$ $J(\frac{\pi}{2}+2k\pi)$ $I'(\pi+2k\pi)$ $J'(\frac{-\pi}{2}+2k\pi)$

$A(\frac{\pi}{4}+2k\pi)$ $T(\frac{2\pi}{3}+2k\pi)$ $R(\frac{-2\pi}{3}+2k\pi)$

Les valeurs privilégiées ici sont les mesures des plus petits arcs orientés (les mesures principales). Par exemple, on a écrit $J'(\frac{-\pi}{2}+2k\pi)$, privilégiant l'abscisse négative $\frac{-\pi}{2}$ car les autres abscisses possibles ($\frac{3\pi}{2}$, $\frac{-5\pi}{2}$, etc.) ont une plus grande valeur absolue. En faisant ainsi, on privilégie toujours la mesure du plus petit arc orienté. La seule exception est pour le point I' qui a deux abscisses curvilignes (π et $-\pi$) de plus petite valeur absolue égales, puisque $\widehat{II'}$ est un demi-cercle.

b. Angle orienté

DÉFINITION 2.7 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls,
A et B deux points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$,
A' et B' les intersections respectives des demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ avec le cercle trigonométrique.
L'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est égal à l'angle orienté des vecteurs unitaires $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'})$. Sa mesure est celle de l'arc orienté $\widehat{A'B'}$.
Si les abscisses curvilignes de A' et B' sont a et b, alors la mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est égale à $b - a$.



Remarques :

- Comme A' est associé aux réels $a + 2k\pi$, et B' aux réels $b + 2k'\pi$ (k et k' appartenant à $\mathbb{Z}$), un angle orienté admet une infinité de mesures : $b - a + 2k''\pi$, avec $k'' \in \mathbb{Z}$.
- Pour traduire que le réel α est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$,

  les écriture suivantes sont équivalentes : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{cases} \alpha + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \alpha \text{ modulo } 2\pi \\ \alpha \ [2\pi] \end{cases}$

Convention : on notera indifféremment $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ pour l'angle orienté et ses mesures en radians.

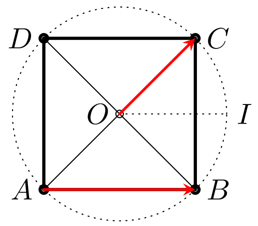
DÉFINITION 2.8 (MESURE PRINCIPALE) La mesure principale d'un angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est, parmi toutes les mesures, la seule qui appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

Remarque :
La valeur absolue de la mesure principale de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est la mesure de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.

Exemple 6 – Avec les points de l'exemple 5, on a $(\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OJ'}) = \frac{-\pi}{2} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$.
Le nombre trouvé ($\frac{\pi}{6}$rad) est la mesure principale car il appartient à $]-\pi, \pi]$.
Par contre, $(\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OT}) = \frac{2\pi}{3} - \left(\frac{-2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}[2\pi]$.
La mesure trouvée $\frac{4\pi}{3}$ dépassant π, la mesure principale est égale à $\frac{4\pi}{3} - 2\pi = \frac{-2\pi}{3}$.

✧✧✧

Dans le carré $ABCD$ de sens direct et de centre O,
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$
Pour cela, on a tracé un cercle trigonométrique de centre O, en prenant pour point de départ le point I tel que $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires. L'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC})$ est positif car on tourne bien dans le sens positif pour aller de I vers C, et sa mesure principale vaut $\frac{\pi}{4}$rad car on sait que dans le carré, l'angle géométrique entre un côté et une diagonale est $\widehat{BAC} = \widehat{IOC} = \frac{\pi}{4}$rad.



c. Propriétés des angles orientés

Propriété 2.5 (Vecteurs colinéaires) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

(i) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires et de même sens $\iff (\vec{u}, \vec{v}) = 0 + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

(ii) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires et de sens contraires $\iff (\vec{u}, \vec{v}) = \pi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

Remarques :
- En particulier, si $\vec{u}$ est un vecteur non nul, on a $(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \ [2\pi]$ et $(\vec{u}, \vec{-u}) = \pi \ [2\pi]$.
- Conséquence immédiate : soient A, B, C trois points distincts.
  A, B, C sont alignés si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \ [2\pi]$ ou $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pi \ [2\pi]$, soit $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0[\pi]$.

Propriété 2.6 (Relation de Chasles) Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a
$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{v})$$

Démonstration D'après la définition 2.7, si $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ sont des points du cercle trigonométrique tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$, alors modulo π :
$(\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{v}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = (c - a) + (b - c) = b - a = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\vec{u}, \vec{v})$

Conséquences immédiates :

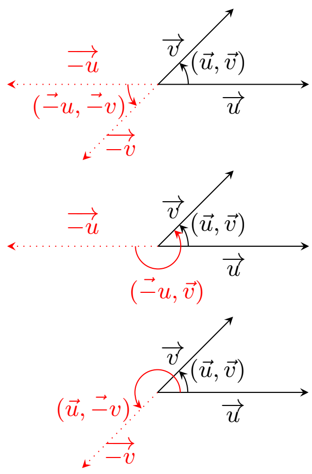
1. $(\vec{u}, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = 0 \ [2\pi]$, on a donc $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u}) \ [2\pi]$.
2. $(-\vec{u}, \vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v})$. Or $(-\vec{u}, \vec{u}) = \pi \ [2\pi]$. On a donc $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \ [2\pi]$.
3. $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, -\vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v}) + \pi = (\vec{u}, \vec{v}) \ [2\pi]$.

Exemple 7 – Montrons que la somme des angles orientés d'un triangle est égale à πrad.

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) && \text{d'après la conséquence 3 de 2.6} \\
&= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) && \text{d'après la propriété 2.6} \\
&= \pi \ [2\pi] && \text{d'après la propriété 2.5}
\end{aligned}$$

Propriété 2.7 (Angles orientés associés) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et k et k' deux réels non nuls.

- $(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})\ [2\pi]$ si k et k' sont de même signe, et en particulier $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})\ [2\pi]$
- $(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi\ [2\pi]$ si k et k' sont de signes contraires, et en particulier $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, -\vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v})\ [2\pi]$

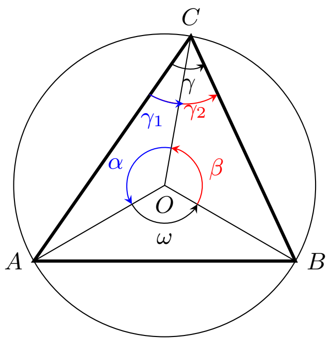


Démonstration Pour les cas particuliers, ils ont déjà été montrés dans les conséquences de la propriété 2.6. Pour la généralisation, il suffit de revenir à la définition 2.7 de l'angle orienté de deux vecteurs non unitaires, et d'appliquer les propriétés particulières, relativement aux vecteurs unitaires.

Exemple 8 – Pour conclure, en guise d'exemple, prouvons le théorème de l'angle inscrit :

Théorème 2.3 (Angle inscrit) Si A, B et C sont trois points distincts d'un cercle de centre O et si γ et ω sont des réels tels que $\gamma = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ et $\omega = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, alors $2\gamma = \omega\ [2\pi]$.

Démonstration En plus de γ et δ, introduisons :
$\alpha = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})$, $\beta = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, $\gamma_1 = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO})$ et $\gamma_2 = (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CB})$.
D'après la propriété 2.6 : $\alpha + \beta + \omega = 0\ [2\pi] \iff \alpha + \beta = -\omega\ [2\pi]$ et $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma\ [2\pi]$.
Par ailleurs, O étant le centre du cercle circonscrit à ABC, les triangles AOC et COB sont isocèles en O, ce qui amène : $2\gamma_1 + \alpha = \pi\ [2\pi]$ et $2\gamma_2 + \beta = \pi\ [2\pi]$.
Par addition, on trouve : $2(\gamma_1 + \gamma_2) + \alpha + \beta = 0\ [2\pi]$, d'où $2\gamma = \omega\ [2\pi]$.



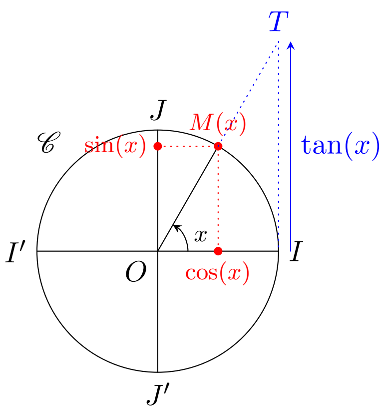
3. Trigonométrie

a. Lignes trigonométriques

Une *ligne trigonométrique* est une expression désignant une des fonctions trigonométriques : cosinus, sinus ou tangente.

Définition 2.9 Soient $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ un repère orthonormé du plan, x un réel et M le point du cercle trigonométrique associé à x.

- Le cosinus de x est le réel noté $\cos(x)$ égal à l'abscisse de M.
- Le sinus de x est le réel noté $\sin(x)$ égal à l'ordonnée de M.
- Si $x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, la tangente de x est le réel noté $\tan(x)$ égal au coefficient directeur de la droite (OM), soit au rapport $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.



T étant le point d'intersection de la demi-droite $[OM)$ et de la droite $d(I, \overrightarrow{OJ})$, l'abscisse de T dans le repère $(I, \overrightarrow{OJ})$ est égale à $\tan(x)$.

Propriétés immédiates des fonctions sin et cos :

Propriété 2.8 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ on a :

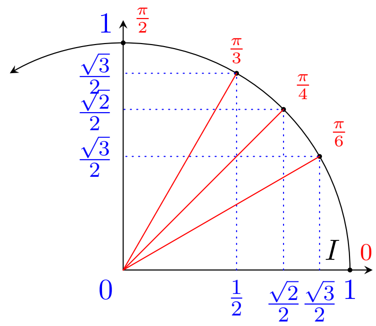
$$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \quad ; \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad ; \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$$
$$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \quad ; \quad \quad ; \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$$

Démonstration D'après la définition 2.9, $(\cos(x), \sin(x))$ sont les coordonnées, dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, d'un point du cercle de centre O et de rayon 1. On en déduit :

1. $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont donc compris entre -1 et 1. Les fonctions cos et sin sont bornées.
2. $OM = 1$ car c'est un rayon du cercle. Or, on a :
   $OM = ||\overrightarrow{OM}|| = (x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2 = OM^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$.
3. Pour différentes valeurs entières de k, les réels $x + 2k\pi$ sont les abscisses curvilignes d'un même point du cercle trigonométrique. Comme ce point ne peut avoir différentes coordonnées, on a $(\cos(x + 2k\pi), \sin(x + 2k\pi)) = (\cos(x), \sin(x))$. Les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π.

Quelques valeurs particulières :

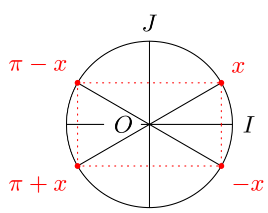
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	



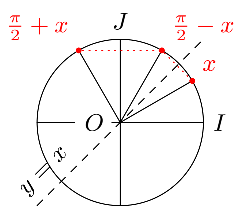
Propriété 2.9 (Angles associés) Soit x un réel. On a :

$\cos(-x) = \cos(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

Démonstration Les images des réels x, $\pi - x$, $\pi + x$ et $-x$ sur le cercle trigonométrique sont, dans cet ordre, les sommets d'un rectangle de centre O symétrique par rapport aux axes du repère. La symétrie s'exerce donc aussi sur les coordonnées.



Les images des réels x et $\frac{\pi}{2} - x$ sur le cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Les images sur le cercle trigonométrique des réels $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$ sont symétriques par rapport à l'axe (OJ).



Propriétés de la fonction tan :

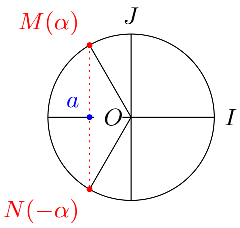
PROPRIÉTÉ 2.10 Pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]\}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ on a :

$\tan(x + k\pi) = \tan(x)$; $\tan(-x) = -\tan(x)$; $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$; $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan(x)}$

b. Équations trigonométriques

➪ Résolution de l'équation $\boxed{\cos x = a}$:

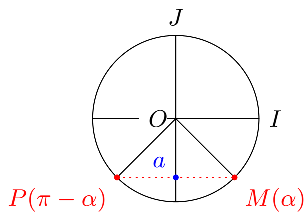
- si $|a| > 1$, l'équation n'a pas de solution car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\cos x| \leqslant 1$
- si $|a| = 1$, l'équation a une solution dans $]-\pi, \pi]$ et dans $\mathbb{R}$: si $a = 1$, $x = 0\ [2\pi]$ et si $a = -1$, $x = \pi\ [2\pi]$
- si $|a| < 1$, il existe deux points du cercle trigonométrique qui ont pour abscisse a : les points M et N images des réels α et $-\alpha$. L'équation a deux solutions dans $]-\pi, \pi[$, et dans $\mathbb{R}$: $x = \alpha + 2k\pi$ ou $-\alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$



EXEMPLE 9 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) = -\frac{1}{2}$.
On sait que $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.
On en déduit $\cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$.
Les solutions de l'équation sont donc les réels $x = \pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

➪ Résolution de l'équation $\boxed{\sin x = a}$:

- si $|a| > 1$, l'équation n'a pas de solution car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin x| \leqslant 1$
- si $|a| = 1$, l'équation a une solution dans $]-\pi, \pi]$, et dans $\mathbb{R}$: si $a = 1$, $x = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et si $a = -1$, $x = \frac{-\pi}{2}\ [2\pi]$
- si $|a| < 1$, il existe deux points du cercle trigonométrique qui ont pour ordonnée a : les points M et P images des réels α et $\pi - \alpha$. L'équation a deux solutions dans $]-\pi, \pi]$, et dans $\mathbb{R}$: $x = \alpha + 2k\pi$ ou $\pi - \alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$



EXEMPLE 10 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
On sait que $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
On en déduit que $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Les solutions de l'équation sont donc les réels $x = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}\ [2\pi]$.

Utilisation de la calculatrice :
Commencer par vérifier que la calculatrice est bien en mode « radians ».

- Quand on cherche la mesure x d'un angle dont on connait le cosinus : disons que $\cos x = a$ et $a \in [-1, 1]$; taper $\cos^{-1} a$ donne x_0, une valeur qui appartient toujours à l'intervalle $[0, \pi]$. Les valeurs réelles possibles pour x sont donc $x = x_0\ [2\pi]$ ou $x = -x_0\ [2\pi]$.
- Quand on cherche la mesure x d'un angle dont on connait le sinus : disons que $\sin x = a$ et $a \in [-1, 1]$; taper $\sin^{-1} a$ donne x_0, une valeur qui appartient toujours à l'intervalle $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Les valeurs réelles possibles pour x sont donc $x = x_0\ [2\pi]$ ou $x = \pi - x_0\ [2\pi]$.
- Quand on cherche la mesure x d'un angle dont on connait la tangente : disons que $\tan x = a$ et $a \in \mathbb{R}$; taper $\tan^{-1} a$ donne x_0, une valeur qui appartient toujours à l'intervalle $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Les valeurs réelles possibles pour x sont donc $x = x_0\ [\pi]$.

Imaginons que l'on cherche un angle α dans $[0, 2\pi]$ et qu'on sache $\sin \alpha = -0,3$. La calculatrice donne $\sin^{-1}(-0,3) \approx -0,304692654$. Combien peut valoir α ? La valeur x_0 donnée appartient à $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit que les deux solutions qui conviennent sont :
$\pi - x_0 \approx 3,446285308$rad et $2\pi + x_0 \approx 5,978492653$rad, soit environ 197° et 343°.

Propriété 2.11 On sait résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations de types cos − cos, sin − sin et cos − sin :

- $\cos x = \cos y \iff x = \pm y + 2k\pi$
- $\sin x = \sin y \iff x = y + 2k\pi$ ou $x = \pi - y + 2k\pi$
- $\sin x = \cos y \iff \frac{\pi}{2} - x = \pm y + 2k\pi$

Démonstration Pour les deux premières, considérer les figures de référence données plus haut et qui découlent de la propriété 2.9. Pour la dernière, on transforme $\sin x$ en $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$. L'égalité $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos y$ est alors du type cos − cos.

Exemple 11 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ d'abord, puis dans $]-\pi, \pi]$, l'équation $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{3} + 2x)$.
➩ Résolution dans $\mathbb{R}$:
En utilisant la propriété 2.9, on remarque que $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.
L'équation est donc équivalente à $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(\frac{\pi}{3} + 2x)$.
Les solutions vérifient donc $\frac{\pi}{2} - x = \pm(\frac{\pi}{3} + 2x) + 2k\pi$.
On doit distinguer les deux formes : $\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{3} + 2x + 2k\pi$ et $\frac{\pi}{2} - x = -\frac{\pi}{3} - 2x + 2k\pi$.
On obtient alors : $-3x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.
Divisons la 1re par -3. On obtient finalement, k étant un entier relatif quelconque :

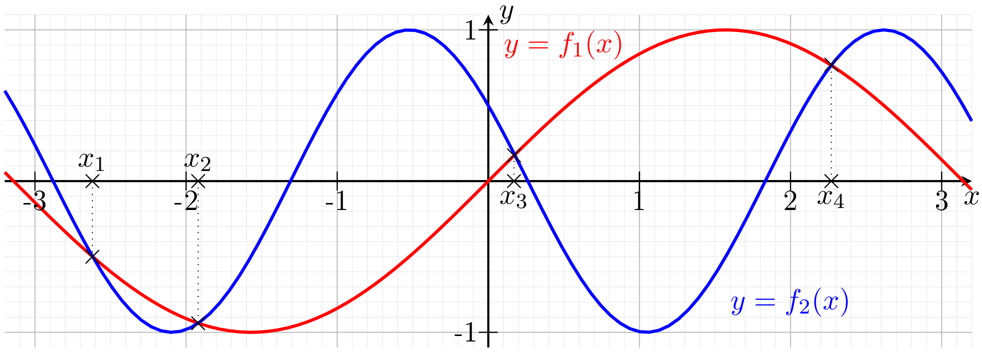
$$x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \text{ et } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

➩ Résolution dans $]-\pi, \pi]$:

Faisons varier k de manière à rester dans l'intervalle considéré.
Les solutions du 1er type étant obtenues modulo $\frac{2\pi}{3}$, il y en aura trois dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ d'amplitude 2π.
On peut chercher la plus petite valeur à donner à k en résolvant une inéquation :
$\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} > -\pi \iff k > (-\pi - \frac{\pi}{18}) \times \frac{3}{2\pi} \iff k > -\frac{19\pi \times 3}{18 \times 2\pi} \iff k > -\frac{19}{12}$
On en déduit que la 1re valeur de k à considérer est -1.
Donnons alors les solutions de cette équation.

k	-1	0	1
de la forme $\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$	$x_2 = -\frac{11\pi}{18} \approx -1,92$rad	$x_3 = \frac{\pi}{18} \approx 0,17$rad	$x_4 = \frac{13\pi}{18} \approx 2,27$rad
de la forme $-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$		$x_1 = -\frac{5\pi}{6} \approx -2,62$rad	

Illustration graphique :
Traçons les courbes des fonctions $f_1 : x \mapsto \sin(x)$ et $f_2 : x \mapsto \cos(\frac{\pi}{3} + 2x)$, avec x variant dans $[-\pi, \pi]$. Les deux courbes se coupent en quatre points sur cet intervalle, les abscisses de ces points étant les solutions de l'équation.



Remarque :
Il n'y a pas de méthode trigonométrique pour résoudre une équation telle que $\cos x = x$. On pourra alors utiliser une méthode algorithmique (dichotomie) ou toute autre méthode approximative, par exemple un graphique. Ici, la seule solution est environ égale à $0,739$rad.

c. Périodicité

DÉFINITION 2.10 Une fonction F définie sur $\mathbb{R}$ est périodique de période $T > 0$ si $\forall x \in \mathbb{R}, F(x+T) = F(x)$ où T est le plus petit réel positif non nul vérifiant cette égalité.

Remarques :

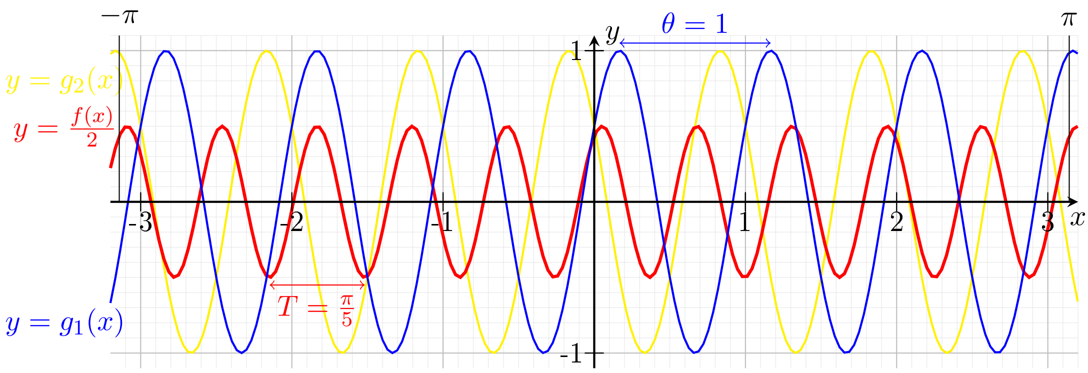
- Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ peut être périodique, comme sin et cos et une multitude d'autres fonctions fabriquées à partir de celles-ci. Mais il y a aussi des fonctions périodiques définies sur la réunion d'intervalles de la forme $]a + kT, a + (k+1)T[$ où k décrit $\mathbb{Z}$. C'est le cas de la fonction tan où $a = \frac{-\pi}{2}$ et $T = \pi$.
- Si $\forall x \in \mathbb{R}, F(x+T) = F(x)$, alors on a évidemment aussi $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, F(x+kT) = F(x)$. Comme sin est périodique de période 2π, on a $\sin(x) = \sin(x+2\pi) = \sin(x+4\pi) = \cdots = \sin(x-2\pi) = \ldots$.
- Du fait de leur définition sur le cercle trigonométrique, sin et cos sont des fonctions périodiques de période 2π ; comme $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ et $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, on en déduit que $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$, soit tan est une fonction périodique de période π.

PROPRIÉTÉ 2.12 Les réels $a \neq 0$ et b étant fixés, les fonctions $S_{a,b}$ et $C_{a,b}$ définies sur $\mathbb{R}$ par $S_{a,b}(x) = \sin(ax+b)$ et $C_{a,b}(x) = \cos(ax+b)$ sont périodiques de période $T = \frac{2\pi}{a}$.

DÉMONSTRATION $a \neq 0$ étant fixé, le nombre $\frac{2\pi}{a}$ est bien défini et différent de 0.
$S_{a,b}(x + \frac{2\pi}{a}) = \sin[a(x + \frac{2\pi}{a}) + b] = \sin(ax + 2\pi + b) = \sin(ax+b) = S_{a,b}(x)$,
donc $S_{a,b}$ est périodique de période $T = \frac{2\pi}{a}$.
De même pour $C_{a,b}$.

EXEMPLE 12 – La fonction $f = S_{10,\frac{\pi}{3}}$ est une fonction de période $T = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$.
Pour tout réel x, on a $f(x) = \sin(10x + \frac{\pi}{3})$.
Tout intervalle d'amplitude 2π contient 10 périodes complètes de cette fonction.
$f(0) = f(\frac{\pi}{5}) = f(\frac{2\pi}{5}) = f(\frac{3\pi}{5}) = f(\frac{4\pi}{5}) = f(\pi) = f(\frac{6\pi}{5}) = \cdots = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

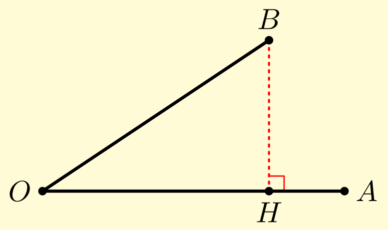
Quels seraient les valeurs des coefficients $a \neq 0$ et b d'une fonction $g = S_{a,b}$ de période θ telle que $g(0) = \frac{1}{2}$ et $\theta = 1$?
On doit avoir $\frac{2\pi}{a} = 1$, il faut donc prendre $a = 2\pi$.
On a donc $g(x) = \sin(2\pi x + b)$ avec $g(0) = \frac{1}{2}$. Le coefficient b vérifie donc $\sin(b) = \frac{1}{2}$.
Or, on sait que $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, donc $b = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $b = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.
Finalement, les fonctions g_1 et g_2 définies par $g_1(x) = \sin(2\pi x + \frac{\pi}{6})$ et $g_2(x) = \sin(2\pi x + \frac{\pi}{6})$ vérifient les contraintes ; leurs courbes sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
La figure ci-dessous montre les variations de $\frac{f}{2}$, g_1 et g_2 sur $[-\pi, \pi]$.

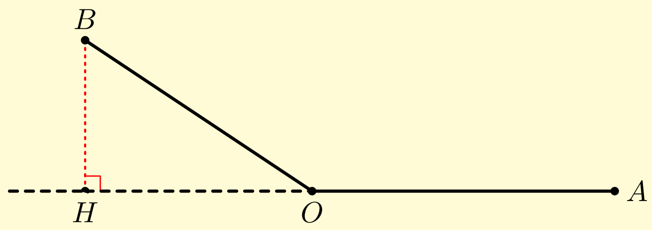


4. Produit scalaire

a. Produit scalaire de deux vecteurs

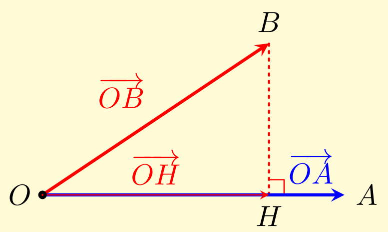
DÉFINITION 2.11 [Projection orthogonale] Soient O, A et B trois points non-alignés du plan. Le projeté orthogonal de B sur la droite (OA) est le point d'intersection de (OA) et la perpendiculaire à (OA) passant par B.
Sur les figures ci-dessous, H est le projeté orthogonal de B sur (OA) :



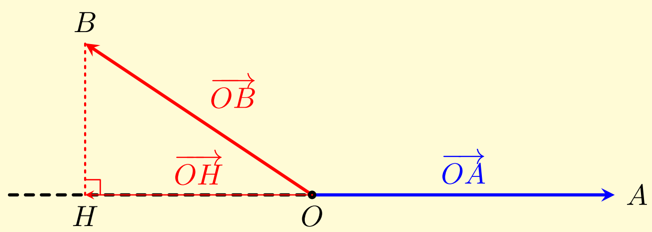


DÉFINITION 2.12 (PRODUIT SCALAIRE) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et O un point.
On note A et B les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, tel que :

- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- si $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$ alors, en notant H le projeté orthogonal de B sur (OA),
  - si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de même sens alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OH$
  - si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de sens contraire alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OH$



$\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OH$

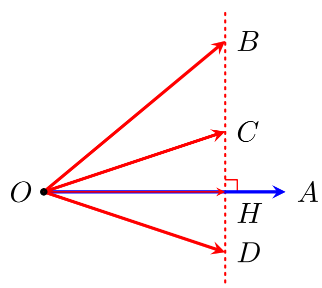


$\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OH$

Remarques :

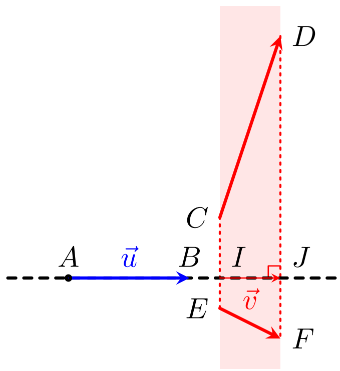
- En notant θ l'angle (géométrique) formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on remarque que si θ est aigu, le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est positif et si θ est obtus, le produit scalaire est négatif.
- Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par lui-même est noté $\vec{u}^2$.
  Il est égal à $||\vec{u}||^2$ (le carré de la norme) et on l'appelle *carré scalaire* de $\vec{u}$.
  Dans un repère orthonormé $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$ (le carré de la longueur).

PROPRIÉTÉ 2.13 Si deux vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ se projettent orthogonalement de la même façon sur la direction d'un vecteur $\vec{u}$, alors les produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v_1}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v_2}$ sont égaux.



Sur l'illustration, on a :
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = OA \times OH$
Attention : si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, on ne peut pas conclure que $\vec{v} = \vec{w}$!

PROPRIÉTÉ 2.14 Soient A, B, I et J quatre points alignés et les droites D_1 et D_2, perpendiculaires à (AB) passant par I et J. Tout vecteur $\vec{v}$ pouvant être représenté dans la bande limitée par D_1 et D_2, avec son point d'application sur D_1 et son point d'arrivée sur D_2, détermine avec le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ un même produit scalaire.



Sur notre illustration, les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ se projetant en $\overrightarrow{IJ}$, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ}$.
Avec la généralité de la propriété 2.14, selon la définition 2.12, on a :
- $\vec{u}.\vec{v} = AB \times IJ$, si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont dans le même sens
- $\vec{u}.\vec{v} = -AB \times IJ$, si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont de sens contraire

DÉFINITION 2.13 (VECTEURS ORTHOGONAUX) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux*, et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$, si une des situations suivantes est réalisée :
- $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$
- En notant O, A et B des points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, $(OA) \perp (OB)$

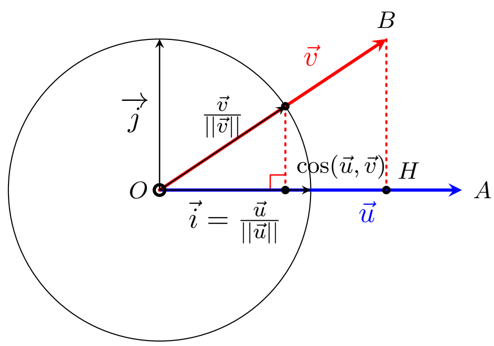
PROPRIÉTÉ 2.15 Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

DÉMONSTRATION Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux, on a deux cas :
- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors le produit scalaire est évidemment nul
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non-nuls, avec les notations de la définition 2.12, on a $(OA) \perp (OB)$, le projeté orthogonal de B sur (OA) est O donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OO = 0$

Réciproquement, soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Comme $\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm OA \times OH$,
- soit $OA = 0$ c'est-à-dire que $\vec{u} = \vec{0}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux
- soit $OH = 0$ c'est-à-dire que $\vec{v} = \vec{0}$ ou B appartient à la perpendiculaire à (OA) passant par O donc dans les deux cas, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

b. Autres expressions du produit scalaire

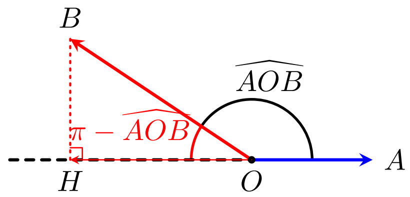
PROPRIÉTÉ 2.16 (VECTORIELLEMENT) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan alors
$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$



DÉMONSTRATION Soient O, A et B des points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Le cercle trigonométrique de centre O est associé, comme dans la définition 2.9, aux vecteurs unitaires $\vec{i} = \overrightarrow{OI} = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$ et $\vec{j}$ tels que $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
Les angles $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}, \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||})$ sont égaux d'après la définition 2.7 et donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}, \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||})$.
La projection orthogonale de B sur (OA) étant notée H, on a $\overrightarrow{OH} = ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \times \vec{i}$ et donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{OH}$ vaut $||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Le cosinus de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ conserve l'information sur le sens des vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OA}$: s'ils ont même sens, le cosinus est positif et dans le cas contraire, le cosinus est négatif.

Propriété 2.17 (Géométriquement) Si O, A et B sont trois points du plan, alors
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{AOB})$$



Démonstration En conservant les notations de la démonstration précédente, selon la valeur de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$, on distingue :

1. $\widehat{AOB} \in [0, \frac{\pi}{2}]$

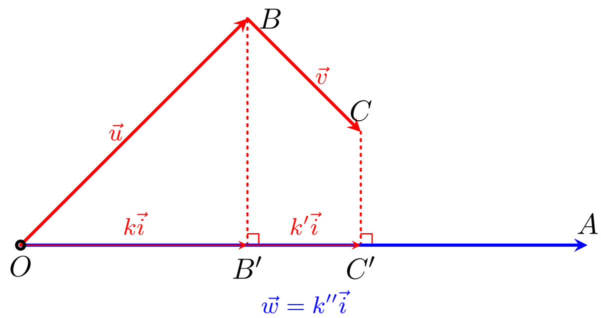
   Dans le triangle OBH rectangle en H on a $OH = OB\cos(\widehat{AOB})$ et donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA \times OB\cos(\widehat{AOB})$
2. $\widehat{AOB} \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

   Dans le triangle OBH rectangle en H on a $OH = OB\cos(\pi - \widehat{AOB}) = -OB\cos(\widehat{AOB})$ et donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = -OA \times [-OB\cos(\widehat{AOB})] = OA \times OB\cos(\widehat{AOB})$

Propriété 2.18 (Propriétés algébriques) Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et k un réel.
On a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$; $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$; $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$

Démonstration Les trois égalités se déduisent plus ou moins aisément de ce qui précède.

- La première se montre aisément à partir de la définition 2.12 car $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \cos(\vec{v},\vec{u})$.
- La deuxième découle naturellement de la propriété 2.16 car $||k\vec{u}|| = |k| \times ||\vec{u}||$ et $\cos(k\vec{u},\vec{v}) = \cos(\pm\vec{u},\vec{v})$ selon le signe de k.
  — Si $k < 0$, comme d'après la propriété 2.7 $\cos(-\vec{u},\vec{v}) = \cos(\pi + (\vec{u},\vec{v})) = -\cos(\vec{u},\vec{v})$, on a $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = |k| \times ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times [-\cos(\vec{u},\vec{v})] = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$ car alors $|k| = -k$.
  — Si $k > 0$, $k = |k|$ et $\cos(k\vec{u},\vec{v}) = \cos(\vec{u},\vec{v})$, il n'y a pas de problème de signe.
- Pour la troisième : soit O un point du plan, on note A, B et C les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{w}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ (voir la figure). En notant $\vec{i}$ le vecteur unitaire égal à $\frac{\vec{w}}{||\vec{w}||}$, les projections de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sur $\vec{w}$ sont égales à $k\vec{i}$ et $k'\vec{i}$, où $k = ||\vec{u}|| \times \cos(\vec{i},\vec{u})$ et $k' = ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{i},\vec{v})$. De plus, on a $\vec{w} = k''\vec{i}$, où $k'' = ||\vec{w}||$.



  — $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = (k\vec{i} + k'\vec{i})\cdot k''\vec{i} = (k+k')\vec{i}\cdot k''\vec{i} = (k+k') \times k''$
  — $\vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w} = k\vec{i}\cdot k''\vec{i} + k'\vec{i}\cdot k''\vec{i} = k \times k'' + k' \times k''$

  La propriété traduit finalement la distributivité de la multiplication des réels sur l'addition.

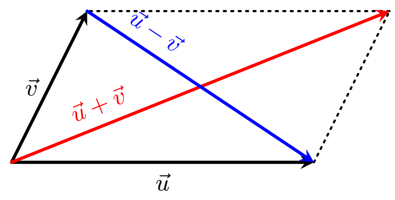
<u>**Remarques**</u> : Avec ces propriétés, nous allons pouvoir effectuer des calculs vectoriels comme on le fait avec les réels. Par exemple, on a $(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} - \vec{v}\cdot\vec{w}$ ou encore $\vec{u}\cdot(2\vec{u}+3\vec{v}) = 2||\vec{u}||^2 + 3\vec{u}\cdot\vec{v}$.

On a aussi l'équivalent des identités remarquables : $\begin{cases} (\vec{u}+\vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} \\ (\vec{u}-\vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} \\ (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 \end{cases}$

Propriété 2.19 (Avec les normes) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2\right) = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right) = \frac{1}{4}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2\right)$$

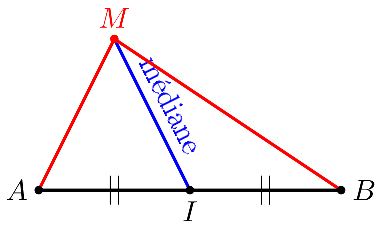
Démonstration Cela découle des identités ci-dessus. On pourra utiliser ces égalités en notant que $||\vec{u}+\vec{v}||$ et $||\vec{u}-\vec{v}||$ sont les normes des vecteurs construits sur les diagonales du parallélogramme défini par $(\vec{u},\vec{v})$.



<ins>**Application**</ins> : Dans un triangle ABC, selon la 1re expression, on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$.

Théorème 2.4 (Médiane) Soient A et B deux points et I leur milieu. Pour tout point M, on a :

- $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$
- $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$
- $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$



Démonstration Développons le produit $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ en introduisant le point I :
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM})\cdot(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} + IM^2 - \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IM}$
Mais $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = -IA^2 = -\frac{AB^2}{4}$ car I est le milieu de $[AB]$
Et on a aussi $-\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IM} = (\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI})\cdot\overrightarrow{IM} = \vec{0}\cdot\overrightarrow{IM} = 0$ pour la même raison.
On obtient donc $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = IM^2 - \frac{AB^2}{4}$

Calculons maintenant $\begin{cases} MA^2 = (\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM})^2 = IA^2 + IM^2 - 2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IM} \\ MB^2 = (\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM})^2 = IB^2 + IM^2 - 2\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IM} \end{cases}$

Par soustraction, membre à membre, on obtient :
$MA^2 - MB^2 = IA^2 - IB^2 - 2(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB})\cdot\overrightarrow{IM} = -2(\overrightarrow{BA})\cdot\overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$
Et par addition, membre à membre, on obtient :
$MA^2 + MB^2 = IA^2 + IB^2 + 2IM^2 - 2(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})\cdot\overrightarrow{IM} = 2(\frac{AB^2}{2})^2 + 2IM^2 = \frac{AB^2}{2} + 2IM^2$

<ins>**Exemple**</ins> 13 (Lignes de niveau) – A et B sont deux points quelconques et k un réel fixé.
➪ Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$?
En appliquant le théorème 2.4, les points M vérifient $MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k$, soit $MI^2 = \frac{AB^2}{4} + k$.
La discussion porte donc sur la valeur de k

- Si $k \geqslant -\frac{AB^2}{4}$, les points M forment un cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{AB^2}{4}+k}$.
- Si $k < -\frac{AB^2}{4}$, alors aucun point M ne vérifie la relation.

➪ Quel est l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$?
L'égalité se transforme ici en $2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = k$, soit $MI^2 = \frac{2k-AB^2}{4}$. Si $\frac{2k-AB^2}{4} > 0$, soit $k > \frac{AB^2}{2}$.
Les lignes de niveau k sont des cercles, de rayon $\sqrt{\frac{2k-AB^2}{4}}$.
➪ Quel est l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = k$?
L'égalité se transforme en $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{k}{2}$. Introduisons le point J de (AB) vérifiant $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{k}{2}$, soit $IJ \times AB = \pm\frac{k}{2}$, selon le signe de k, J étant plus proche de B quand $k > 0$ et plus proche de A sinon.
On a alors $(\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JM})\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{k}{2}$, qui se réduit en $\overrightarrow{JM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ du fait du choix de J.
Les lignes de niveau k sont donc des droites perpendiculaires à (AB) passant par J.

Propriété 2.20 (Analytiquement) Si, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour composantes $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Démonstration Écrivons les décompositions de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ selon les vecteurs de la base $(\vec{i}, \vec{j})$:
$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$, puis développons le produit scalaire à l'aide de la propriété 2.18 :
$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = x\vec{i} \cdot x'\vec{i} + x\vec{i} \cdot y'\vec{j} + y\vec{j} \cdot x'\vec{j} + y\vec{j} \cdot y'\vec{j} = xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + (xy' + x'y)\vec{i} \cdot \vec{j} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j}$
Quand on est dans un repère orthonormé, en appliquant la propriété 2.17, on a :

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{i} = ||\vec{i}||^2 \cos(0) = 1 \text{ (car le repère est normé)} \\ \vec{j} \cdot \vec{j} = ||\vec{j}||^2 \cos(0) = 1 \text{ (car le repère est normé)} \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = ||\vec{i}|| \times ||\vec{j}|| \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ (car le repère est orthogonal)} \end{cases}$$

Du coup, l'expression de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ se simplifie en $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Remarques :

- Si, dans une base orthonormée, le vecteur $\vec{u}$ a pour composantes $\vec{u}(x, y)$, alors cette propriété nous donne sa norme : $||\vec{u}||^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$, d'où $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$ car $||\vec{u}|| \geqslant 0$.
- Si, dans un repère orthonormé, les points A et B ont pour coordonnées $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, alors $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$ et cette propriété nous donne la distance AB : $AB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$, d'où $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Définition 2.14 (Vecteur normal) La droite $\mathscr{D}$ étant donnée, tout vecteur non nul, orthogonal à un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est appelé vecteur normal à $\mathscr{D}$.

Le théorème 2.2 énonce que l'équation $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est l'équation cartésienne d'une droite $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}(-b, a)$.
Vérifions alors que le vecteur $\vec{n}(a, b)$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$:
la condition analytique d'orthogonalité est vérifiée car $\vec{u} \cdot \vec{n} = (-b) \times a + a \times b = 0$.
Par conséquent $\vec{u} \perp \vec{n}$, $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{D}$.

Propriété 2.21 (Droite de vecteur normal) Le plan étant muni d'un repère orthonormé, un couple de réels $(a, b) \neq (0, 0)$ et un point $A(x_A, y_A)$ étant donnés, la droite passant par A de vecteur normal $\vec{n}(a, b)$ a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$, où $c = -(ax_A + by_A)$.
Réciproquement, toute droite d'équation $ax + by + c = 0$ admet $\vec{n}(a, b)$ comme vecteur normal.

Démonstration Commençons par la réciproque : $(a, b) \neq (0, 0)$, le vecteur $\vec{u}(-b, a)$ n'est pas le vecteur nul. Comme on l'a vu, on a alors $\vec{u} \perp \vec{n}$. La droite $d(A, \vec{u})$ admet donc comme vecteur normal le vecteur $\vec{n}$.
Soit $\mathscr{D}$ la droite normale à $\vec{n}$ passant par M.
$M \in \mathscr{D} \iff \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
Comme $\overrightarrow{AM}(x - x_A, y - y_A)$, $M \in \mathscr{D} \iff a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \iff ax + by - (ax_A + by_A) = 0$,
et, en notant $c = -(ax_A + by_A)$, on obtient l'égalité $ax + by + c = 0$.

Exemple 14 (Médiatrice) – A et B étant deux points distincts, quelle est l'équation de Δ la médiatrice de $[AB]$?
La médiatrice de $[AB]$ est une droite normale à $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$ passant par le milieu I de $[AB]$.
Or, $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$ et $I(\frac{x_B + x_A}{2}, \frac{y_B + y_A}{2})$.
D'après la propriété 2.21, l'équation de Δ est :
$(x_B - x_A)x + (y_B - y_A)y - [(x_B - x_A)\frac{x_B + x_A}{2} + (y_B - y_A)\frac{y_B + y_A}{2}] = 0$.
Cette équation se simplifie en $\Delta : (x_B - x_A)x + (y_B - y_A)y + \frac{(x_A^2 + y_A^2) - (x_B^2 + y_B^2)}{2} = 0$

Propriété 2.22 (Cercle) Le plan étant muni d'un repère orthonormé, le cercle de centre Ω et de rayon R a pour équation cartésienne :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$

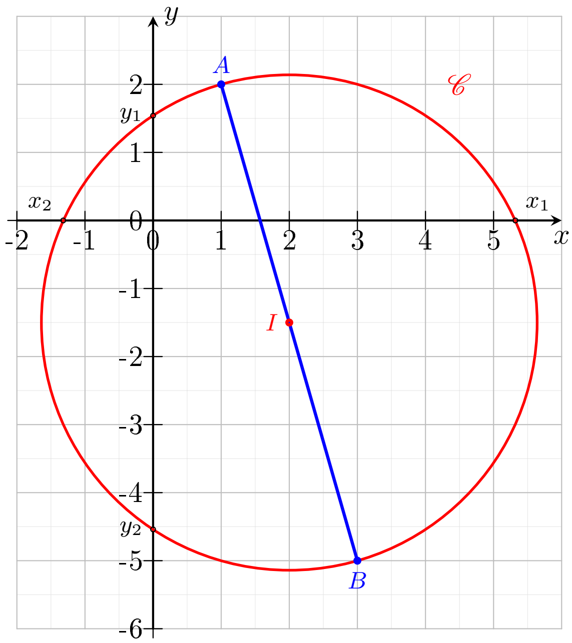
Démonstration Un point $M(x, y)$ appartient au cercle de centre Ω et de rayon R, noté $\mathscr{C}(\Omega, R)$, si et seulement si $\Omega M = R$. Cette relation, élevée au carré, s'écrit $AM^2 = R^2$.
D'après la propriété 2.20, $AM^2 = (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2$.

Remarques : Un cercle est donné de différentes manières :

- Si on connait le centre Ω et un point A du cercle, le rayon est ΩA. On obtient alors l'équation du cercle $\mathscr{C}(\Omega, \Omega A)$ en remplaçant R^2 par $(x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2$.
- Si on connait un diamètre, c'est-à-dire les extrémités A et B d'un cercle, on peut appliquer l'une ou l'autre des méthodes suivantes :
  — Le centre est le milieu I de $[AB]$ de coordonnées $I(\frac{x_B+x_A}{2}, \frac{y_B+y_A}{2})$, le rayon est ΩI.
  L'équation cherchée est celle du cercle $\mathscr{C}(I, IA)$:
  $(x - \frac{x_B+x_A}{2})^2 + (y - \frac{x_B+x_A}{2})^2 = \frac{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}{4}$.
  — Ainsi qu'on l'a vu dans l'exemple 13, k étant un réel supérieur à $-\frac{AB^2}{4}$, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ est un cercle de centre I (milieu de $[AB]$) et de rayon $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$. Lorsque $k = 0$, le rayon est égal à $\frac{AB}{2}$; le cercle est donc le cercle diamètre $[AB]$. L'équation du cercle de diamètre $[AB]$ est donc obtenue en écrivant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
  Il suffit donc de développer l'expression : $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$.
- On a remarqué qu'une équation développée de cercle s'écrivait $x^2 + \alpha x + y^2 + \beta y + \gamma = 0$. Cependant, toutes les équations de ce type ne sont pas des équations de cercle ! En essayant de factoriser pour obtenir la forme standard $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$, on est conduit à écrire $(x + \frac{\alpha}{2})^2 + (y + \frac{\beta}{2})^2 - (\frac{\alpha}{2})^2 - (\frac{\beta}{2})^2 + \gamma = 0$. L'existence du cercle est conditionnée par le signe de $\delta = (\frac{\alpha}{2})^2 + (\frac{\beta}{2})^2 - \gamma$: si $\delta \geqslant 0$, le cercle existe et a pour rayon $\sqrt{\delta}$; sinon, le cercle n'existe pas.

Exemple 15 – Appliquons sur un exemple numérique les deux méthodes indiquées dans le cas où le diamètre est connu :
Soient $A(1, 2)$ et $B(3, -5)$. Déterminons l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$:

- I a pour coordonnées $I(\frac{1+3}{2}, \frac{2-5}{2})$.
  Le rayon IA mesure
  $\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(1-3)^2+(2+5)^2}}{2}$, soit $\frac{\sqrt{53}}{2}$.
  Le cercle $\mathscr{C}(I, IA)$ a pour équation :
  $(x - 2)^2 + (y + 1,5)^2 = \frac{53}{4}$
  $\iff x^2 - 4x + 4 + y^2 + 3y + 2,25 = 13,25$
  $\iff x^2 - 4x + y^2 + 3y - 7 = 0$
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ s'écrit ici
  $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$
  $\iff (x - 1)(x - 3) + (y - 2)(y + 5) = 0$
  $\iff x^2 - 4x + 3 + y^2 + 3y - 10 = 0$
  $\iff x^2 - 4x + y^2 + 3y - 7 = 0$



Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées ?
Les points de $\mathscr{C} \cap (Ox)$ vérifient $x^2 - 4x - 7 = 0$, on trouve $x = 2 \pm \sqrt{11}$ soit $x_1 \approx 5,32$ et $x_2 \approx -1,32$.
Les points de $\mathscr{C} \cap (Oy)$ vérifient $y^2 + 3y - 7 = 0$, on trouve $y = \frac{-3\pm\sqrt{37}}{2}$ soit $y_1 \approx 1,54$ et $y_2 \approx -4,54$.

c. Applications du produit scalaire en trigonométrie

PROPRIÉTÉ 2.23 (FORMULES D'ADDITION) Quels que soient les réels a et b, on a :

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$; $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$; $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

DÉMONSTRATION

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique associé et a et b deux réels. On note A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses curvilignes a et b. Leurs coordonnées sont :

$$A(\cos(a), \sin(a)) \text{ et } B(\cos(b), \sin(b)).$$

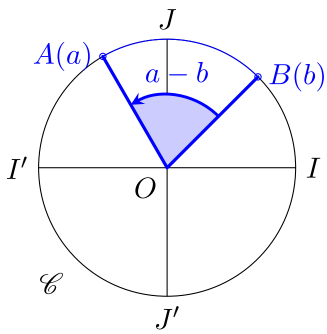
Calculons, de deux façons différentes, le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$:

➪ La propriété 2.17 nous donne :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(a-b) = \cos(a-b).$$

➪ La propriété 2.20 nous donne :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$



Par identification de ces deux expressions, on obtient $(\star)$: $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
Avec $b' = -b$ dans $(\star)$: $\cos(a+b') = \cos(a)\cos(-b') + \sin(a)\sin(-b') = \cos(a)\cos(b') - \sin(a)\sin(b')$.
Ensuite, pour calculer $\sin(a+b)$, on utilise l'égalité $\sin(a+b) = \cos[\frac{\pi}{2} - (a+b)]$. On obtient :

$$\sin(a+b) = \cos[(\tfrac{\pi}{2} - a) - b] = \cos(\tfrac{\pi}{2} - a)\cos(b) + \sin(\tfrac{\pi}{2} - a)\sin(b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

Finalement, en posant $b' = -b$ dans cette troisième égalité, on obtient la dernière.

Exemple d'application : Calculons les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{12}$:
Pour cela, remarquons que $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ et appliquons les formules.

$$\cos(\tfrac{\pi}{12}) = \cos(\tfrac{\pi}{3})\cos(\tfrac{\pi}{4}) + \sin(\tfrac{\pi}{3})\sin(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} \times \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

$$\sin(\tfrac{\pi}{12}) = \sin(\tfrac{\pi}{3})\cos(\tfrac{\pi}{4}) - \cos(\tfrac{\pi}{3})\sin(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \times \tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{1}{2} \times \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1).$$

PROPRIÉTÉ 2.24 (FORMULES DE DUPLICATION) Si a est un réel, alors on a :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \quad ; \quad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

DÉMONSTRATION il suffit d'appliquer les formules de $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$ en prenant $b = a$.
Pour $\cos(2a)$, on obtient $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$.
En utilisant alors la relation $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, on obtient les deux autre formules :
$\cos(2a) = \cos^2(a) - [1 - \cos^2(a)] = 2\cos^2(a) - 1$ et $\cos(2a) = [1 - \sin^2(a)] - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a)$.

Ces dernières égalités permettent d'exprimer $\cos^2(a)$ et $\sin^2(a)$ en fonction de $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$:

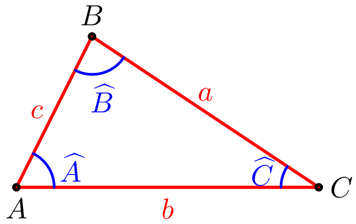
PROPRIÉTÉ 2.25 (FORMULES DE LINÉARISATION) Si a est un réel, alors on a

$$\cos^2(a) = \frac{\cos(2a)+1}{2} \quad ; \quad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

Exemple d'application : Calculons les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{8}$:
Avec $a = \frac{\pi}{8}$, on a $2a = \frac{\pi}{4}$ et

$$\begin{cases} \cos^2(\frac{\pi}{8}) = \frac{\cos(\frac{\pi}{4})+1}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \text{ d'où, comme } \cos(\frac{\pi}{8}) > 0, \ \cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin^2(\frac{\pi}{8}) = \frac{1-\sin(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \text{ d'où, comme } \sin(\frac{\pi}{8}) > 0, \ \sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

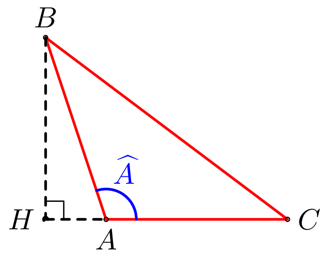
Théorème 2.5 (Loi des cosinus) Soit ABC un triangle quelconque. En notant $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, on a :
$\cos(\widehat{A}) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $\cos(\widehat{B}) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$; $\cos(\widehat{C}) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$



Démonstration Pour la première de ces égalités, il suffit d'écrire :
$a^2 = BC^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = b^2 + c^2 - 2||\overrightarrow{AC}|| \times ||\overrightarrow{AB}|| \times \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$.
D'où on tire $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$, que l'on transforme en $\cos(\widehat{A}) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.
Pour les deux autres, il n'y a qu'à permuter les points.

Remarque : Ce théorème porte plusieurs noms. Le nom choisi « loi des cosinus » souligne la complémentarité avec le théorème suivant (loi des sinus). L'appellation « Théorème d'Al-Kashi [2] est répandue depuis peu, essentiellement en France. Le théorème porte, de façon plus ancienne, le nom de « théorème de Pythagore généralisé » car il étend effectivement la portée du théorème de Pythagore aux triangles non rectangles. Le triangle est rectangle si et seulement si un des cosinus est nul.

La généralisation du théorème de Pythagore est très ancienne puisqu'elle est déjà présente dans l'œuvre d'Euclide (Livre II, propositions 12 et 13).
Pour un triangle obtusangle, l'angle $\widehat{A}$ étant obtus :
$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AH \times AC$.
Dans cette expression, le terme $2AH \times AC$ s'écrit plutôt aujourd'hui $-2AB \times AC \times \cos(\widehat{CAB})$, mais comme $AH = AB \times \cos(\widehat{HAB})$ et $\cos(\widehat{HAB}) = \cos(\pi - \widehat{CAB}) = -\cos(\widehat{CAB})$, il s'agit bien de la même loi.

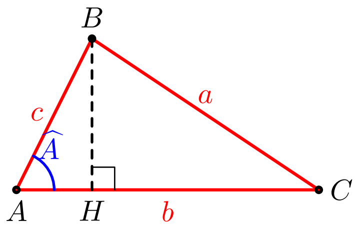


Exemple d'application : Ce théorème permet, en triangulation [3], de résoudre un triangle.

1. Lorsqu'on connait les trois côtés a, b et c d'un triangle, on peut déterminer les angles de ce triangle. Avec les notations ci-dessus, si $a = 11$, $b = 7$ et $c = 5$, le triangle ABC a pour angles :
$\widehat{A} = \cos^{-1}(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}) = \cos^{-1}(\frac{49+25-121}{70}) = \cos^{-1}(\frac{-47}{70}) \approx 2,3069\text{rad}$, soit environ 132°.
$\widehat{B} = \cos^{-1}(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}) = \cos^{-1}(\frac{121+25-49}{110}) = \cos^{-1}(\frac{97}{110}) \approx 0,4911\text{rad}$, soit environ 28°.
$\widehat{C} = \cos^{-1}(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}) = \cos^{-1}(\frac{121+49-25}{77}) = \cos^{-1}(\frac{145}{154}) \approx 0,3436\text{rad}$, soit environ 20°.
2. Lorsqu'on connait un angle et les deux côtés adjacents, par exemple $\widehat{A}$ et b et c, on peut déterminer le 3e côté et en déduire les deux autres angles.
Si on a $\widehat{A} = \frac{\pi}{5}$, $b = 1$ et $c = 2$, on en déduit :
$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})} = \sqrt{5 - 4\cos(\frac{\pi}{5})} \approx \sqrt{1,763932} \approx 1,328$.

Propriété 2.26 (Aire) Soit ABC un triangle et $\mathscr{S}$ son aire. Avec les notations précédentes, on a :

$$\mathscr{S} = \frac{bc\sin(\widehat{A})}{2} = \frac{ac\sin(\widehat{B})}{2} = \frac{ab\sin(\widehat{C})}{2}$$



2. Ghiyath Al-Kashi(1380-1429) » est un mathématicien perse, 1er astronome de l'observatoire de Samarcande.
3. Technique permettant de déterminer la position d'un point en mesurant les angles entre ce point et d'autres points

DÉMONSTRATION Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC).
Alors $\mathscr{S} = \frac{AC\times BH}{2} = \frac{b\times BH}{2}$, or $BH = c\sin(\widehat{A})$ si $\widehat{A}$ est aigu comme sur la figure.
Si $\widehat{A}$ est obtus, comme sur la figure précédente, la propriété du sinus : $\sin(\pi-\widehat{A}) = \sin(\widehat{A})$ entraîne le même résultat $BH = c\sin(\pi-\widehat{A}) = c\sin(\widehat{A})$. Dans tous les cas, on a donc $\mathscr{S} = \frac{bc\sin(\widehat{A})}{2}$.
Les autres expressions de $\mathscr{S}$ s'obtiennent en permutant les points.

EXEMPLE 16 – En guise d'exemple, établissons la belle formule de Héron [4] :

PROPRIÉTÉ 2.27 (FORMULE DE HÉRON) Soit ABC un triangle.
Avec les notations précédentes, en ajoutant p pour le demi-périmètre du triangle, soit $p = \frac{a+b+c}{2}$, on a :

$$\mathscr{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

DÉMONSTRATION Partant de $\mathscr{S} = \frac{ab\sin(\widehat{C})}{2}$, de la loi des cosinus $\cos(\widehat{C}) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, et de la relation $\cos^2(\widehat{C}) + \sin^2(\widehat{C}) = 1$, on commence par écrire que $\sin(\widehat{C}) = \sqrt{1-\cos^2(\widehat{C})}$ et on obtient :

$$\mathscr{S} = \frac{2ab\sqrt{[1-\cos(\widehat{C})][1+\cos(\widehat{C})]}}{4} = \frac{\sqrt{[2ab-2ab\cos(\widehat{C})][2ab+2ab\cos(\widehat{C})]}}{4}$$

C'est ici que la loi des cosinus intervient, remplaçant $2ab\cos(\widehat{C})$ par $a^2+b^2-c^2$:

$$\mathscr{S} = \frac{\sqrt{[2ab-a^2-b^2+c^2][2ab+a^2+b^2-c^2]}}{4}$$

Intervient alors une factorisation en deux étapes :

$$\mathscr{S} = \frac{\sqrt{[c^2-(a-b)^2][(a+b)^2-c^2]}}{4} = \frac{\sqrt{[c-(a-b)][c+(a-b)][(a+b)-c][(a+b)+c]}}{4} = \sqrt{\frac{c-a+b}{2}\frac{c+a-b}{2}\frac{a+b-c}{2}\frac{a+b+c}{2}}$$

C'est ici que l'on introduit p car $\frac{c-a+b}{2} = \frac{2p-2a}{2} = p-a$, et de même, $\frac{c+a-b}{2} = p-b$ et $\frac{a+b-c}{2} = p-c$:

$$\mathscr{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Application numérique : $a = 11$, $b = 7$ et $c = 5$. Le demi-périmètre est $p = \frac{23}{2} = 11,5$ et l'aire du triangle $\mathscr{S} = \sqrt{11,5\times 0,5\times 4,5\times 6,5} = \sqrt{168,1875} \approx 12,969$.

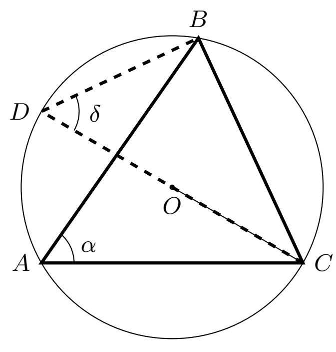
THÉORÈME 2.6 (LOI DES SINUS) Soit ABC un triangle.
Avec les notations précédentes, en ajoutant R pour le rayon du cercle circonscrit au triangle, on a :

$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})} = \frac{abc}{2\mathscr{S}} = 2R$$

DÉMONSTRATION On divise chaque membre des égalités de la propriété 2.26 par $\frac{abc}{2}$:

$$\frac{2\mathscr{S}}{abc} = \frac{\sin(\widehat{A})}{a} = \frac{\sin(\widehat{B})}{b} = \frac{\sin(\widehat{C})}{c}$$

Pour compléter la série d'égalités, on applique le théorème 2.3 à la configuration ci-contre, où le point D est le symétrique de C par rapport à O. Les angles α et δ étant égaux ou supplémentaires (si D et C ne sont pas sur le même arc $\overset{\frown}{BC}$, i.e. s'ils sont de part et d'autre de $[BC]$), leurs sinus sont toujours égaux. Or, comme $\widehat{DBC}$ est droit, $\sin(\delta) = \frac{BC}{DC} = \frac{a}{2R}$.
On en déduit que $\frac{2\mathscr{S}}{abc} = \frac{\sin(\widehat{A})}{a} = \frac{\sin(\delta)}{a} = \frac{a}{a\times 2R} = \frac{1}{2R}$.
Par passage à l'inverse, on obtient les résultats annoncés.



4. Héron d'Alexandrie est un ingénieur, mécanicien et mathématicien grec du I^{er} siècle après J.-C.

LE COIN DU CHERCHEUR

❊ Quelques formules de trigonométrie, possiblement utiles pour la suite, à démontrer :

- $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
- $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\times\tan\beta})$

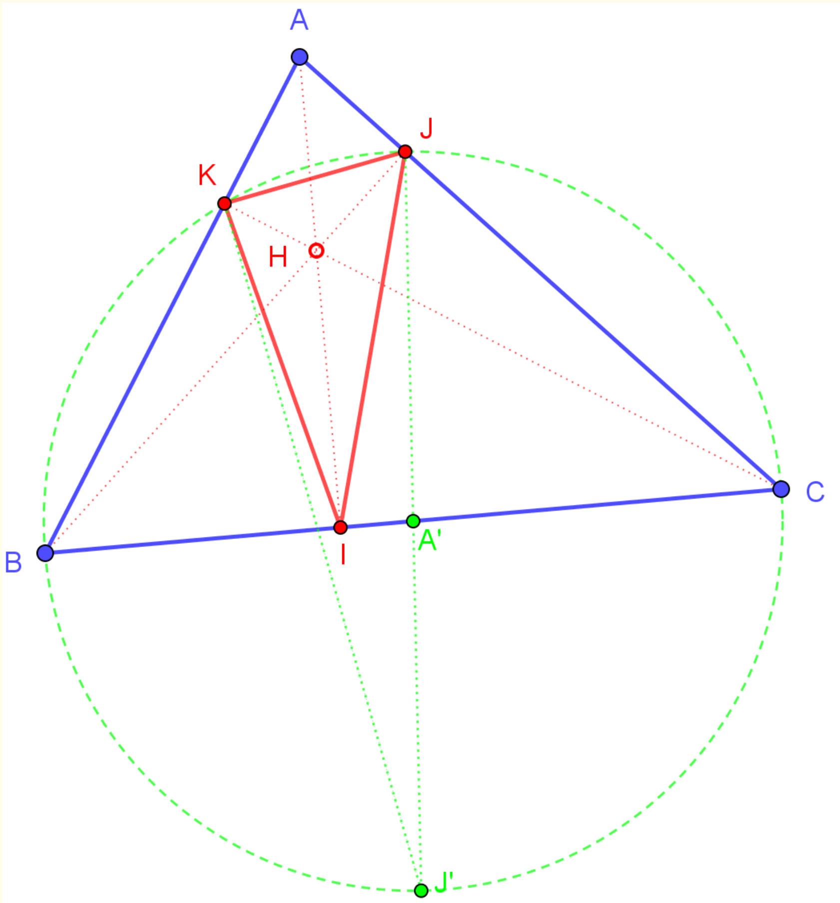
❊ Relations trigonométriques dans un triangle ABC

Établir, pour tout triangle ABC, les relations suivantes qui utilisent les notations habituelles : $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $p = \frac{a+b+c}{2}$

$\mathscr{S}$: aire du triangle ABC, R : rayon du cercle circonscrit au triangle ABC

- $\sin(2\widehat{A}) + \sin(2\widehat{B}) + \sin(2\widehat{C}) = 4\sin(\widehat{A})\sin(\widehat{B})\sin(\widehat{C})$
- $\sin(\widehat{A}) + \sin(\widehat{B}) + \sin(\widehat{C}) = 4\cos(\frac{\widehat{A}}{2})\cos(\frac{\widehat{B}}{2})\cos(\frac{\widehat{C}}{2})$
- $\sin(\widehat{A}) + \sin(\widehat{B}) + \sin(\widehat{C}) = \frac{p}{R}$
- $\sin(\widehat{A}) \times \sin(\widehat{B}) \times \sin(\widehat{C}) = \frac{S}{2R^2}$
- $a\cos(\widehat{A}) + b\cos(\widehat{B}) + c\cos(\widehat{C}) = \frac{abc}{2R^2} = \frac{8\mathscr{S}^2}{abc} = \frac{2\mathscr{S}}{R}$

➩ Dans le cas d'un triangle acutangle (trois angles aigus), la dernière relation donne le périmètre du triangle orthique (ses sommets I, J et K sont les pieds des hauteurs issues de A, B et C). On peut montrer cela aussi en prouvant, par exemple, que $IJ = a\cos(\widehat{A})$ (utiliser le point J', symétrique de J par rapport à A', le milieu de $[BC]$).



❊ Démontrer que si le triangle ABC n'est pas rectangle, on a :
$\tan(\widehat{A}) + \tan(\widehat{B}) + \tan(\widehat{C}) = \tan(\widehat{A}) \times \tan(\widehat{B}) \times \tan(\widehat{C})$

Méthode (Fiche de révision)

Un condensé non exhaustif des notions importantes du chapitre

➲ Vecteurs	composantes dans une base : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$
colinéarité	$\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$ colinéaires $\Longleftrightarrow xy' - x'y = 0$
droite	cartésiennes : $ax + by + c = 0$; réduite : $y = mx + p$ ou $x = k$
	vecteur directeur : $\overrightarrow{u}(-b, a)$; vecteur normal : $\overrightarrow{n}(a, b)$
produit scalaire	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \lvert\lvert\vec{u}\rvert\rvert \times \lvert\lvert\vec{v}\rvert\rvert \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$, en particulier : $\vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
	$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$, en particulier : $\lvert\lvert\vec{u}\rvert\rvert^2 = x^2 + y^2$
	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\lvert\lvert\vec{u} + \vec{v}\rvert\rvert^2 - \lvert\lvert\vec{u}\rvert\rvert^2 - \lvert\lvert\vec{v}\rvert\rvert^2\right) = \frac{1}{2}\left(\lvert\lvert\vec{u}\rvert\rvert^2 + \lvert\lvert\vec{v}\rvert\rvert^2 - \lvert\lvert\vec{u} - \vec{v}\rvert\rvert^2\right)$
propriétés	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$; $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
médiane	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$; $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$
	$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$; $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$
angles orientés	Relation de Chasles : $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{v})$
	$(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \ [2\pi]$; $(\vec{u}, \vec{-u}) = \pi \ [2\pi]$; $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$
	$(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \ [2\pi]$; $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) \ [2\pi]$
cercle	$M(x, y) \in \mathscr{C}(\Omega, R) \Longleftrightarrow \Omega M = R$
	équation de $\mathscr{C}$: $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$
	équation du cercle de diamètre $[AB]$: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
aire du triangle	formule de Heron $\mathscr{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ avec $p = \frac{a+b+c}{2}$
	$\mathscr{S} = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}ac\sin(\widehat{B}) = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C})$
➲ Trigonom.	$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$;$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
périodicité	période 2π : cos et sin ; période π : tan
angles associés	$\cos(-x) = \cos x$; $\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\cos(\pi + x) = -\cos x$
	$\sin(-x) = -\sin x$; $\sin(\pi - x) = \sin x$; $\sin(\pi + x) = -\sin x$
	$\cos(x + 2\pi) = \cos x$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
	$\sin(x + 2\pi) = \sin x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
équations	$\cos x = \cos y \Longleftrightarrow x = \pm y \ [2\pi]$
	$\sin x = \sin y \Longleftrightarrow x = y$ ou $x = \pi - y \ [2\pi]$
	$\sin x = \cos y \Longleftrightarrow \frac{\pi}{2} - x = \pm y \ [2\pi]$
addition	$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$; $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
	$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$; $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
duplication	$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$; $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
linéarisation	$\cos^2(a) = \frac{\cos(2a)+1}{2}$; $\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$
loi des cosinus	$\cos(\widehat{A}) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $\cos(\widehat{B}) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$; $\cos(\widehat{C}) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
loi des sinus	$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})} = \frac{abc}{2\mathscr{S}} = 2R$