2 Exercices de géométrie

Table des matières

2.1 Énoncés

2.1.1 Vecteurs

Exercice 2.1 (Point fixe)
Soient A, B et C trois points fixes et M et N deux points variables tels que $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
Montrer que les droites (MN) passent toutes par un même point fixe P à préciser.

Exercice 2.2 (Pentagone par ses milieux)
Connaissant les milieux I, J, K, L et M d'un pentagone $ABCDE$, nous voulons construire les sommets de ce pentagone.

1. Sachant que I, J, K, L et M sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$ et $[EA]$, montrer que ces points vérifient l'égalité $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{LK}$
2. En déduire la méthode pour construire $ABCDE$ connaissant $IJKLM$

Exercice 2.3 (Points alignés)
Pour tout réel $\alpha \neq 0$ et tout triangle ABC, on définit les points P, Q et R par :
$\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CQ}=\alpha\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CR}=\alpha\overrightarrow{BC}$
Faire une figure dans le cas particulier $\alpha=\frac{3}{2}$ puis, dans le cas général :

1. Déterminer les coordonnées de P, Q et R dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$
2. Exprimer les coordonnées de $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$
3. Déterminer α pour que P, Q et R soient alignés et distincts.
   Montrer que, dans ce cas, Q est le milieu de $[PR]$ puis illustrer ce cas par une figure.

Exercice 2.4 (Quadrilatère dans parallélogramme)
Soit $ABDC$ un parallélogramme quelconque. On place E, F, G et H respectivement sur $[AC]$, $[AB]$, $[CD]$ et $[BD]$ de manière à inscrire le quadrilatère $EFHG$ dans le parallélogramme.
Partie 1 : $EFHG$ forme un trapèze de bases $[EF]$ et $[GH]$. Faire une figure sur Geogebra qui permette de déplacer les bases du trapèze ; observer sur quel lieu se déplace le point d'intersection de ses diagonales.
L'objectif des questions qui suivent est de prouver cette propriété.

1. Montrer que l'on traduit l'énoncé en choisissant des nombres e, f, g et h dans l'intervalle $[0;1]$ tels que, dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, les sommets du trapèze aient pour coordonnées $E(0;e)$, $F(f;0)$, $G(g;1)$ et $H(1;h)$, avec $f(h-1) = e(g-1)$
2. Déterminer les équations des droites (AD), (EH) et (FG).
3. Déterminer les points d'intersection $M_1 = (EH) \cap (AD)$ et $M_2 = (FG) \cap (AD)$
4. Prouver alors que M_1 et M_2, quand ils existent, sont confondus

Partie 2 : Les diagonales (EH) et (FG) du quadrilatère sont parallèles aux côtés du parallélogramme. Faire une figure sur Geogebra, puis montrer que les côtés (EG) et (FH) du quadrilatère sont

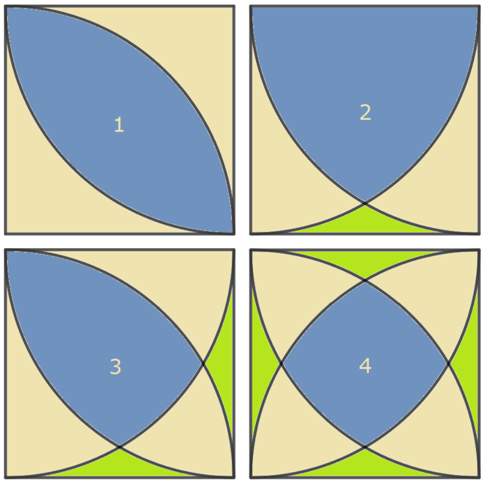
- soit parallèles entre eux et, dans ce cas, parallèles à la diagonale (AD)
- soit sécants et, dans ce cas, leur point d'intersection se trouve sur la diagonale (AD)

2.1.2 Angles

Exercice 2.5 (Périmètres et aires)
Estimer à l'œil le classement des 4 domaines bleus

- selon les aires croissantes
- selon les périmètres croissants

Calculer les périmètres et les aires de ces domaines (prendre les côtés des carrés égaux à 1), pour confirmer ou corriger les classements estimés.
Ajouter le(s) domaine(s) vert(s) d'un carré au domaine bleu modifie de quelle façon le classement des aires ?

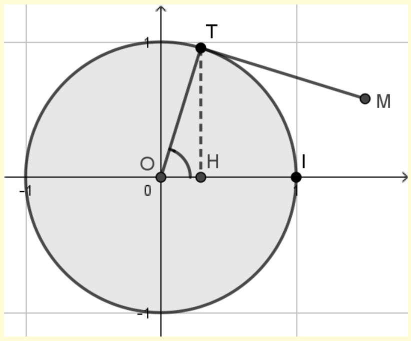


Exercice 2.6 (Triangles isocèles dans cercle)
Un cas particulier :
On considère les points A et B du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne $A(\frac{\pi}{4})$ et $B(\frac{2\pi}{3})$.
Faire une figure, puis trouver tous les points $C(\gamma)$ tels que ABC soit un triangle isocèle.
Préciser les abscisses curvilignes des différents points trouvés ainsi que les différents angles de ces triangles.

Le cas général :
Refaire cet exercice en prenant $A(0)$ et un point quelconque $B(\beta)$.
En déduire les résultats pour des points quelconques $A(\alpha)$ et $B(\beta)$.

Exercice 2.7 (Courbe 1)
Une ficelle de longueur 10 est enroulée autour d'un disque de rayon 1 dans le sens horaire. Son extrémité libre est notée M. On représentera cette situation par un cercle trigonométrique. Lorsque la ficelle est complètement enroulée, le point M coïncide avec le point $I(1;0)$ du cercle trigonométrique. On déroule progressivement la ficelle en veillant à toujours la maintenir tendue. Nommons T le point où la ficelle perd le contact avec le disque et notons λ l'abscisse curviligne de T (voir la figure). Dans cette situation, on s'interroge sur la courbe que va décrire le point M.

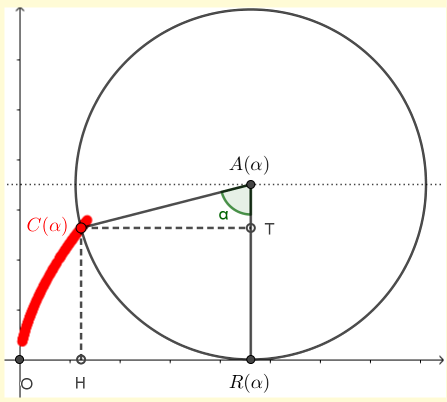
1. Faire une figure à la main sur laquelle seront placés les positions de M pour les valeurs suivantes de l'abscisse curviligne λ de T : $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ et 2π.
2. H étant le projeté orthogonal de T sur (OI), expliquer pourquoi $\widehat{MTH} = \widehat{TOH}$, puis déterminer les coordonnées du point M en fonction de λ.
3. Déterminer la position du point M lorsque la ficelle est complètement déroulée, puis tracer la courbe complète avec Geogebra (afficher la trace de M).



Exercice 2.8 (Courbe 2)
Un chewing-gum s'est collé sur la roue avant de mon vélo. Cette roue ayant un diamètre extérieur de $700mm$, on aimerait déterminer l'expression analytique des coordonnées du point C (comme chewing-gum) lorsque l'axe A de la roue se déplace d'une longueur x, la roue restant en contact avec la route en un point noté R.

On considèrera que le chewing-gum est en contact avec le sol (R et C sont alors confondus en un point noté O) lorsque $x = 0$ et on mesurera la rotation de la roue par un angle, noté α, égal à 0 lorsque R est en O.

1. Faire une figure avec Geogebra (afficher la trace de C) pour $x \in [0, 700\pi]$ où le point mobile est A (ou R).
2. H étant le projeté orthogonal de C sur (OR), et T celui de C sur (AR), déterminer les coordonnées du point C en fonction de α.
3. Déterminer la longueur approximative (à $1mm$ près) de la trajectoire parcourue par le chewing-gum pendant 1 tour de roue.



Utiliser pour cela un programme qui subdivise l'intervalle $[0, 2\pi]$ en n parties égales et détermine la longueur de la trajectoire entre deux positions voisines de C en estimant que celle-ci peut être assimilée au segment de droite reliant ces deux points. Lorsque n est grand, la somme de ces longueurs s'approche de la longueur cherchée. Jusqu'à quelle valeur de n faut il aller pour obtenir une estimation précise à $1mm$ près ?

2.1.3 Produit scalaire

Exercice 2.9 (Carrés sur triangle)
On construit extérieurement au triangle ABC deux carrés $ACDE$ et $BAFG$. Montrer que la médiane issue de A dans le triangle ABC est la hauteur issue de A dans le triangle AEF.

Exercice 2.10 (Puissance d'un point)
On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r et un point $M \notin \mathscr{C}$.
Une droite passant par M coupe $\mathscr{C}$ en deux points A et B, montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ ne dépend pas de A et B. En déduire que 4 points distincts A, B, C et D tels que les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point M sont cocycliques si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$.
Applications :

1. Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles sécants en A et B, et soit M un point de (AB).
   Deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ passant par M sont telles que $\mathscr{D}$ coupe $\mathscr{C}$ en P et Q alors que $\mathscr{D}'$ coupe $\mathscr{C}'$ en P' et Q'. Prouver que P, Q, P' et Q' sont cocycliques.
2. Soient $\mathscr{C}$ un cercle et C un point intérieur à $\mathscr{C}$. On trace deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ passant par C. La droite $\mathscr{D}$ coupe $\mathscr{C}$ en A et D alors que la droite $\mathscr{D}'$ coupe $\mathscr{C}$ en B et D. Montrer que la médiane issue de C dans le triangle ABC est la hauteur issue de C dans le triangle CDE.

Exercice 2.11 (Rectangles)
$ABCD$ est un rectangle de longueur $AB = L$ et de largeur $AD = l < L$. Soient I et J les milieux de $[AB]$ et $[AD]$

1. Les segments $[CJ]$ et $[DI]$ se coupent en N.
   Déterminer l'angle $\widehat{CNI}$ en exprimant le produit scalaire $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{JC}$ en fonction de L et l.
   Application numérique : déterminer $\widehat{CNI}$ lorsque $L = 4$ et $l = 2$.
2. Les segments $[AC]$ et $[DI]$ se coupent en L. Déterminer l'angle $\widehat{CLI}$ en fonction de L et l.
   Application numérique : montrer que $\widehat{CLI} = \frac{\pi}{2}$ lorsque $L = \sqrt{2}l$.
   Vérifier que les feuilles des photocopies — au format $A4$ — possèdent cette propriété.

Exercice 2.12 (Orthocentre)
Les points $A(-3, 1)$, $B(1, 5)$ et $C(3, -3)$ sont donnés par leurs coordonnées dans le repère orthonormé $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Faire une figure sur laquelle seront placés les constructions suivantes afin de vérifier les résultats obtenus par le calcul.

1. Écrire une équation de chacune des hauteurs du triangle ABC.
   Retrouver que ces hauteurs sont concourantes en un point H, nommé « orthocentre » du triangle, dont on déterminera les coordonnées.
2. Écrire une équation de chacune des médiatrices du triangle ABC.
   Retrouver que ces médiatrices sont concourantes en un point O, nommé « centre du cercle circonscrit », dont on déterminera les coordonnées.
3. Déterminer les coordonnées du point G, isobarycentre de $\{A, B, C\}$, puis montrer que les points O, G et H sont alignés sur une droite appelée « droite de Euler » du triangle.
4. Écrire une équation du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC, puis montrer que les points suivants appartiennent au cercle $\mathscr{C}$:
   - $H_{[BC]}$, $H_{[AC]}$ et $H_{[AB]}$, les symétriques de H par rapport aux côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$
   - $H_{A'}$, $H_{B'}$ et $H_{C'}$, les symétriques de H par rapport aux milieux A', B' et C' de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$
5. Soit E le milieu du segment $[HO]$. Montrer que E est le centre du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ puis que ce cercle contient aussi les points suivants. Ce cercle est appelé « cercle de Euler » ou « cercle des 9 points » du triangle.

- H_a, H_b et H_c, les pieds des hauteurs issues de A, B et C
- H_A, H_B et H_C, les milieux des segments $[HA]$, $[HB]$ et $[HC]$

2.1.4 Trigonométrie

Exercice 2.13 (Pentagone régulier)

Partie 1 :

x étant un réel quelconque, exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\sin x$.
Déterminer, en utilisant 2 méthodes différentes, l'ensemble des valeurs de x telles que $\sin(5x) = 0$.
En déduire les valeurs de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
Déterminer ensuite $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Partie 2 :

Soit $\mathscr{C}$, un cercle de centre O et de rayon r.
Effectuer la construction suivante :

1. Tracer deux diamètres perpendiculaires $[AA']$ et $[HH']$
2. Placer le point I milieu de $[OH]$ et le point J tel que $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA'}$.
3. Tracer le cercle de centre J passant par I. Ce cercle coupe le diamètre $[AA']$ en K et L, L étant celui qui appartient à $[OA]$.
4. Tracer les perpendiculaires à $[AA']$ qui passent pas K et L. Ces droites coupent le cercle $\mathscr{C}$ en 4 points B, C, D et E qui forment avec le point A un pentagone régulier.

Pour justifier cette construction :
Déterminer les longueurs IJ, puis OK et OL.
En déduire que $\overrightarrow{OL} = \cos\frac{2\pi}{5}\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OK} = \cos\frac{4\pi}{5}\overrightarrow{OA}$.

Partie 3 :

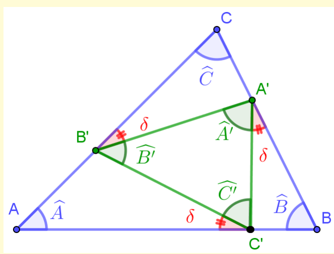
Il y a bien d'autres manières de déterminer $\cos\left(\frac{n\pi}{5}\right)$ avec $n \in \{1, 2, 3, 4\}$: la plus simple peut-être est la suivante :

1. Montrer que $\sin\frac{\pi}{5}\left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5}\right) = 0$. Pour cela, on peut utiliser la propriété suivante (à vérifier) : $2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.
2. En déduire que $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$ sont les solutions de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
3. Résoudre cette équation et conclure.

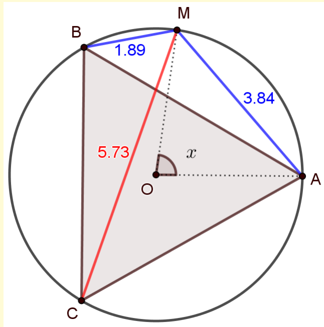
Exercice 2.14 (Triangle)

Dans un triangle ABC on en inscrit un autre $A'B'C'$ tel que $\widehat{BA'C'} = \widehat{CB'A'} = \widehat{AC'B'}$, cet angle commun étant noté δ.

1. Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont les mêmes angles, comme il est noté sur la figure ci-contre.
2. Déterminer le rapport d'agrandissement k entre ces deux triangles semblables en fonction de $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ et δ (*indication : on pourra utiliser la loi des sinus dans deux triangles, en cherchant à décomposer un côté de* ABC *comme la somme de deux longueurs, par exemple* $BC = BA' + A'C$).
3. Montrer que ce rapport peut s'écrire sous la forme symétrique $k = \cos\delta + \sin\delta \times \frac{1+\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}}{\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}}$
4. Expliciter k lorsque $\delta = \frac{\pi}{2}$; faire une figure dans ce cas.

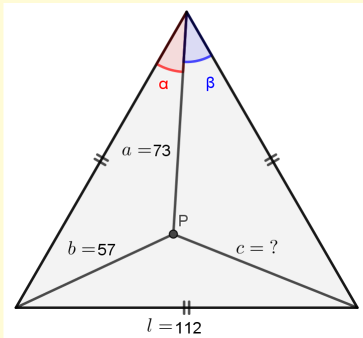


EXERCICE 2.15 (TRIANGLE ÉQUILATÉRAL)
Soit ABC un triangle équilatéral direct inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r.
On veut démontrer que pour tout point M appartenant au petit arc $\widehat{AB}$ on a $MA+MB=MC$.



1. On note x la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$. Exprimer $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OM})$ en fonction de x.
2. Exprimer les distances MA, MB et MC en fonction de x et r (*indication : utiliser le théorème d'Al-Kashi*).
3. Montrer que la propriété se réduit alors à prouver que $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
4. Prouver cette dernière égalité et conclure.

EXERCICE 2.16 (PROBLÈME D'ARITHMÉTIQUE)
Existe t'il un triangle équilatéral de côté l et un point P intérieur au triangle dont les distances aux sommets soient a, b et c tels que les nombres a, b, c et l soient des entiers ?



1. Une réponse à ce problème a été donné dans la figure ci-contre mais il manque le nombre c. Pour le déterminer, commencer par calculer $\cos(\alpha)$ puis $\sin(\alpha)$. Montrer ensuite que $\sin(\alpha)=\frac{p}{q}\sqrt{3}$ avec p et q entiers. En déduire $\cos(\beta)$ puis c.
2. La méthode entrevue ici peut servir à chercher d'autres solutions à ce problème. Montrer que c doit être égal à $\sqrt{\frac{l^2+a^2+b^2-\sqrt{3((2al)^2-(l^2+a^2-b^2)^2)}}{2}}$ (on ne cherchera pas à simplifier cette expression)

3. Préciser l'ensemble des contraintes portant sur a, b, c et l pour un point P à l'intérieur du triangle, puis programmer la recherche de tous les quadruplets (a,b,c,l) avec $l<120$, qui satisfont l'ensemble de ces contraintes.

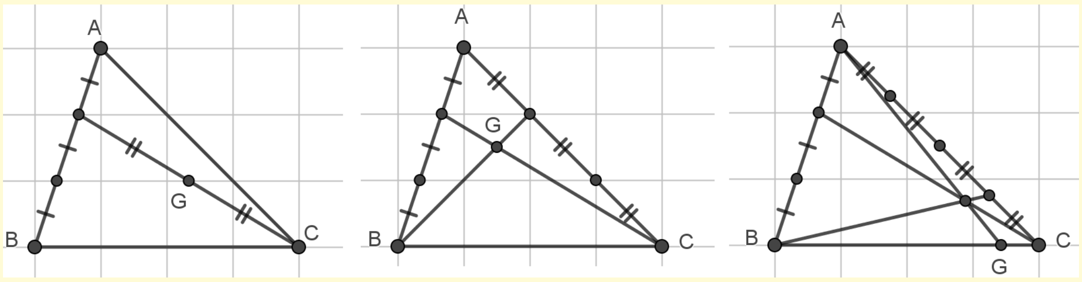
2.1.5 Barycentres

EXERCICE 2.17 (TRAPÈZE)
Le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze dont les côtés parallèles sont $[AB]$ et $[CD]$. On appelle I l'intersection des côtés sécants, J l'intersection des diagonales, K le milieu de $[AB]$ et L le milieu de $[CD]$. On veut montrer que I, J, K et L sont alignés à l'aide de barycentres.

1. Montrer que l'on peut choisir convenablement des coefficients α et β de manière à ce que $I=\mathscr{B}\{(A,\alpha),(B,\alpha),(C,\beta),(D,\beta)\}$, puis en déduire que I, K et L sont alignés.
2. Faire de même pour montrer que J, K et L sont alignés, puis conclure

Exercice 2.18 (Figures de base)

1. I étant le milieu de $[AB]$, deux points distincts, écrire comme barycentre de A et B :
   - le symétrique A' de A par rapport à B et B' le symétrique de B par rapport à A.
   - le symétrique A'' de I par rapport à A et B'' le symétrique de I par rapport à B.
2. Soit G le barycentre de (A, α) et (B, β) avec $\alpha + \beta \neq 0$ et soit G' le symétrique G par rapport à I.
   Exprimer G' comme barycentre de A et B.
3. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Écrire D comme barycentre de A, B et C.
4. Soit G le barycentre de (A, α),(B, β) et (C, γ) avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Montrer que :
   - si $\alpha = \beta$, alors G peut s'écrire comme le barycentre de C et I (le milieu de $[AB]$)
   - si $\alpha + \beta = 0$, alors G appartient à la parallèle à (AB) passant par C
5. Écrire G barycentre de A,B et C dans les 3 cas ci-dessous :



Exercice 2.19 (Lignes de niveau)

On suppose que les points A et B sont distincts.

Partie 1 : Droites

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\left(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = k$, pour $k = 0$ et $k = 1$.
   Représenter ces lignes de niveau 0 et 1 avec $AB = 2cm$.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = -AB^2$.
3. Le triangle ABC est rectangle en A.
   Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = AB^2$.
4. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = k$ selon les valeurs de k. Si cela arrive, à quelle condition les points A et B se retrouvent-ils sur une même ligne de niveau ?

Partie 2 : Cercles

1. Montrer que les points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ sont cocycliques sous certaines conditions à préciser.
2. Montrer que sous certaines conditions les points M vérifiant $\frac{MA}{MB} = k$ sont cocycliques. Montrer que si l'on considère un triangle ABC tel que $\frac{CA}{CB} = k \neq 1$, la ligne de niveau k est le cercle de diamètre $[IJ]$, où I et J sont les pieds des bissectrices issues de C dans le triangle ABC.
3. Montrer que les points M vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \alpha$ sont cocycliques. Préciser les ensembles solutions dans les cas où ces égalités sont vraies modulo 2π et modulo π.
4. Soit ABC un triangle isocèle tel que $AB = AC$, $BC = 2a$ et $AI = 4a$ où a est un réel positif et I le milieu de $[BC]$. Déterminer et représenter l'ensemble des points M tels que $\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$.
   Même chose pour les points M tels que $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 22a^2$.

2.1.6 le coin du chercheur

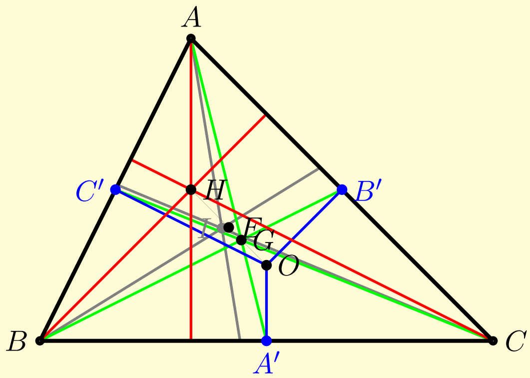
EXERCICE 2.20

Tout point du plan peut apparaître comme le barycentre de trois points distincts et non alignés du plan. Cette constatation est à la base d'une géométrie analytique à base de coefficients barycentriques, complémentaire mais toute aussi riche que celle qu'on utilise avec les coordonnées.

➩ Pour s'en convaincre, prenons un point M de coordonnées (x, y) dans un repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et cherchons les coefficients barycentriques (α, β, γ) de M par rapport au triplet (A, B, C), c'est-à-dire que l'on doit avoir $M = \mathscr{B}\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$.

➩ Appliquons cette constatation aux principaux points du triangle ABC :

avec les notations $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\widehat{CAB} = \alpha$, $\widehat{BCA} = \gamma$ et $\widehat{ABC} = \beta$, montrer que



$$\begin{cases} G & \text{: Centre de Gravité}(\quad 1, \quad 1, \quad 1) \\ I & \text{: Centre du cercle Inscrit}(\quad \sin(\alpha), \quad \sin(\beta), \quad \sin(\gamma)) \\ H & \text{: Orthocentre}(\quad \tan(\alpha), \quad \tan(\beta), \quad \tan(\gamma)) \\ O & \text{: Centre du cercle Circonscrit}(\quad \sin(2\alpha), \quad \sin(2\beta), \quad \sin(2\gamma)) \end{cases}$$

➩ En déduire que O, G et H sont alignés (droite d'Euler) et, plus précisément que le segment $[HO]$ a pour milieu un point E, G étant, quant-à lui, un point à préciser du segment $[EO]$.