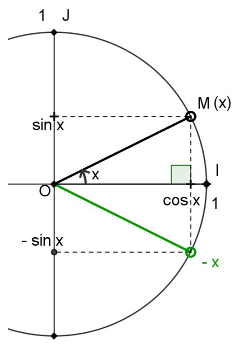
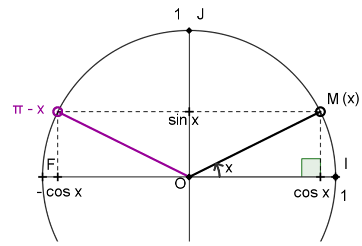
TD de trigonométrie : équations et périodicité

CORRECTION

1) Équations trigonométriques



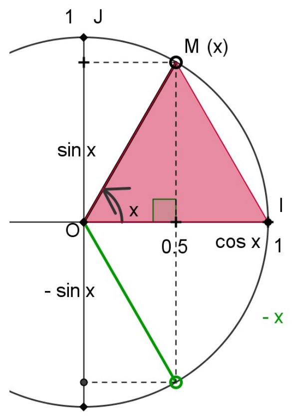
Rappels : Les *équations trigonométriques élémentaires* se ramènent à $\cos x = \cos\alpha$ ou $\sin x = \sin\alpha$, α étant un réel fixé.
L'équation $\cos x = \cos\alpha$ a pour solutions réelles $x = \pm\alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
L'équation $\sin x = \sin\alpha$ a pour solutions $x = \alpha + 2k\pi$ et $x = \pi - \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Illustrer chacune de ces deux situations sur le cercle trigonométrique ci-contre.
En haut, on a mis les deux angles qui ont un même cosinus : ils sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Leurs valeurs principales sont donc opposées. On obtient toutes les valeurs possibles en ajoutant ou retranchant un nombre entier de fois 2π, d'où la formule $k \in \mathbb{Z}, x = \pm\alpha + 2k\pi$.



En bas, on a mis les deux angles qui on un même sinus : ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, donc supplémentaires. Leurs valeurs principales sont donc égales à x et $\pi - x$. On obtient toutes les valeurs possibles en ajoutant ou retranchant un nombre entier de fois 2π, d'où la formule $k \in \mathbb{Z}, x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$.

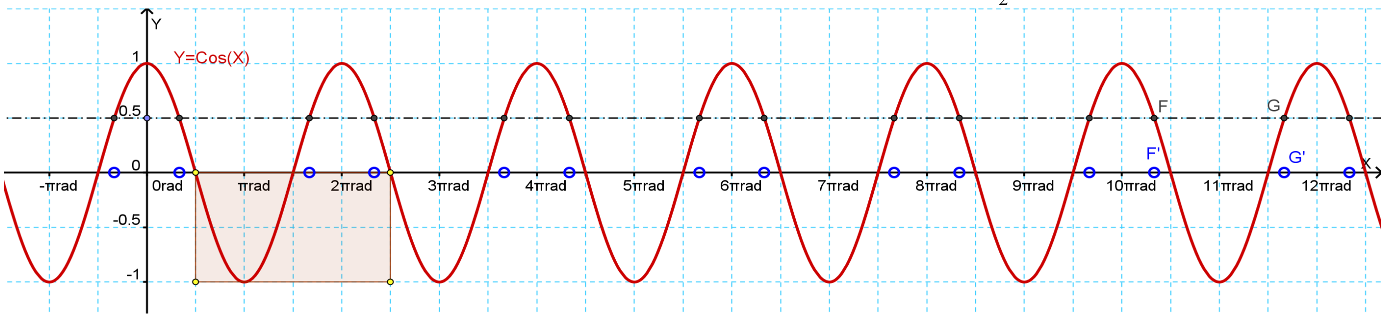
a) Première équation : $\cos x = \frac{1}{2}$

Écrire l'équation E_1 : $\cos x = \frac{1}{2}$ sous la forme $\cos x = \cos\alpha$ où α est un angle de $[0 ; \pi]$ à déterminer.
On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ (angle d'un triangle équilatéral),
donc l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ s'écrit $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.



Déterminer ensuite l'expression générale des solutions de l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$, On en déduit que $k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pm\pi}{3} + 2k\pi$.
Déterminer enfin celles qui sont dans l'intervalle $[0 ; 12\pi]$.
Dans cet intervalle, les valeurs qui conviennent sont :
$\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} + 6\pi = \frac{19\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} + 8\pi = \frac{25\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} + 10\pi = \frac{31\pi}{3}$,
et $\frac{-\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{11\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3} + 6\pi = \frac{17\pi}{3}$; .
$\frac{-\pi}{3} + 8\pi = \frac{23\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3} + 10\pi = \frac{29\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3} + 12\pi = \frac{35\pi}{3}$
Mettons ces douze valeurs dans l'ordre :
$\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{11\pi}{3}$; $\frac{13\pi}{3}$; $\frac{17\pi}{3}$; $\frac{19\pi}{3}$; $\frac{23\pi}{3}$; $\frac{25\pi}{3}$; $\frac{29\pi}{3}$; $\frac{31\pi}{3}$; $\frac{35\pi}{3}$.

Retrouver sur la courbe de la fonction *cos* ci-dessous les solutions de $\cos x = \frac{1}{2}$ sur cet intervalle.



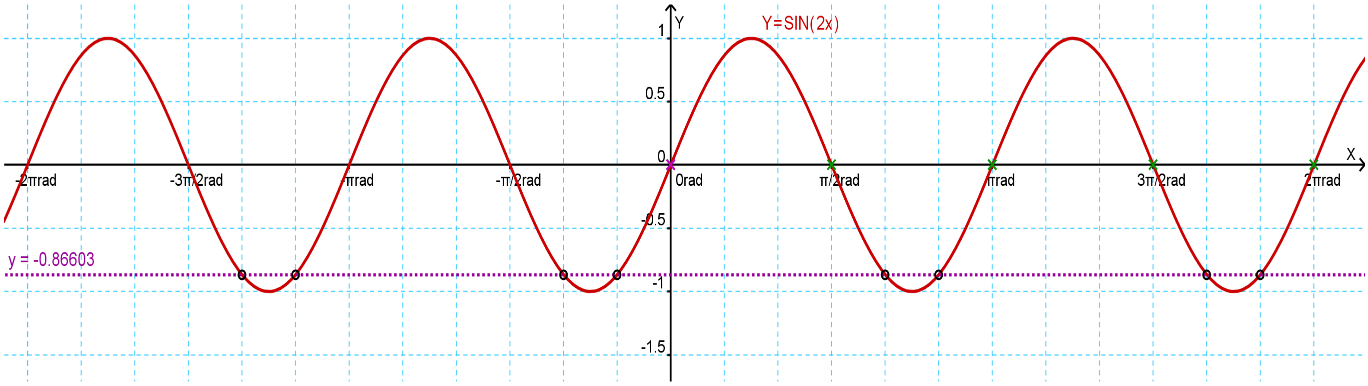
Sur la courbe ci-dessous nous avons mis les douze valeurs trouvées dans l'intervalle, ainsi qu'une supplémentaire avant ($\frac{-\pi}{3}$ <0) et une après ($\frac{37\pi}{3} > 12\pi$).

b) Deuxième équation $\sin(2x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

Écrire l'équation E_2 : $sin(2x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ sous la forme $\sin(2x) = \sin\alpha$ où α est un angle de $\left[\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ à déterminer.
Déterminer ensuite l'expression générale de $2x$; diviser par 2 (attention : diviser aussi le modulo) ; conclure.
On sait que $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (angle d'un triangle équilatéral) et donc que $\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.
L'équation $\sin X = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ s'écrit $\sin X = \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)$, ici on a $\sin(2x) = \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)$.
Le cercle trigonométrique précédent nous montre cet angle de $\frac{-\pi}{3}$ en vert.
On en déduit que $k \in \mathbb{Z}, 2x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = \pi - \left(\frac{-\pi}{3}\right) + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ et, en divisant par 2 et en

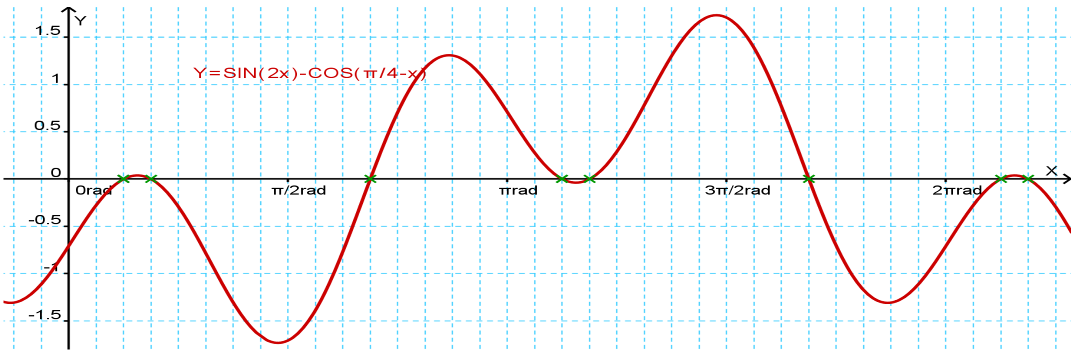
simplifiant, on obtient $k \in \mathbb{Z}, x=\frac{-\pi}{6}+k\pi$ ou $x=\frac{2\pi}{3}+k\pi$.
Donner enfin les solutions qui sont dans l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$.
Dans cet intervalle, les valeurs qui conviennent sont :
$\frac{-\pi}{6}-\pi=\frac{-7\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11\pi}{6}$, et
$\frac{2\pi}{3}-2\pi=\frac{-4\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}-\pi=\frac{-\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}+\pi=\frac{5\pi}{3}$.
Mettons ces huit valeurs dans l'ordre :
$\frac{-4\pi}{3}$; $\frac{-7\pi}{6}$; $\frac{-\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{11\pi}{6}$.

La courbe ci-dessous représente la fonction $f : x \mapsto \sin 2x$ sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$.
On voit mieux les valeurs des solutions lorsque la grille est découpée en multiples de $\frac{\pi}{6}$
Retrouver les solutions de l'équation $\sin 2x=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ sur cette courbe.



c) <u>Troisième équation</u> : $\sin 3x=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$
Déterminer, les solutions de l'équation E_3 : $\sin 3x=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.
Remplaçons le sinus par un cosinus comme indiqué, l'équation devient $\sin 3x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.
Déduisons-en que, selon l'équation élémentaire, $\frac{\pi}{2}-3x=\pm\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+2k\pi$.
Cela conduit à, d'une part $\frac{\pi}{2}-3x=\frac{\pi}{4}-x+2k\pi$, soit $-2x=\frac{-\pi}{4}+2k\pi$. En divisant par -2 on trouve $x=\frac{\pi}{8}+(-k)\pi$ et en posant $k'=-k$, $x=\frac{\pi}{8}+k'\pi$. Comme k et k' sont des entiers indéterminés, on peut aussi bien noter cela $x=\frac{\pi}{8}+k\pi$.
D'autre part, on peut avoir $\frac{\pi}{2}-3x=-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+2k\pi$ et donc $-4x=\frac{-3\pi}{4}+2k\pi$. En divisant par -4 et en simplifiant, on trouve $x=\frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}$ (comme précédemment on a changé $-k$ en k', puis k' en k).
Il y a donc deux familles de solutions : les unes se suivent tous les π , les autres tous les $\frac{\pi}{2}$.
D'une part, il y a $\frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi}{8}+\pi=\frac{9\pi}{8}$; $\frac{\pi}{8}+2\pi=\frac{17\pi}{8}$; etc. ,
et d'autre part, il y a $\frac{3\pi}{16}$; $\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi}{2}=\frac{11\pi}{16}$; $\frac{3\pi}{16}+\frac{2\pi}{2}=\frac{19\pi}{16}$; $\frac{27\pi}{16}$; $\frac{35\pi}{16}$; etc.
Mettons ces valeurs dans l'ordre :
$\frac{\pi}{8}$; $\frac{3\pi}{16}$; $\frac{11\pi}{16}$; $\frac{9\pi}{8}$; $\frac{19\pi}{16}$; $\frac{27\pi}{16}$; $\frac{17\pi}{8}$; $\frac{35\pi}{16}$; etc.

Déterminer les solutions de cette équation dans l'intervalle $]0 ; 2\pi]$.
Les deux dernières solutions sont en dehors de cet intervalle.
Voyons ce que cela donne sur une représentation graphique : nous avons choisi de tracer la courbe



d'équation $y=\sin 3x-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, les solutions apparaissent alors comme les abscisses des points d'intersection de cette courbe avec l'axe des abscisses. Pour plus de lisibilité, nous avons gradué l'axe des abscisses en seizièmes de π.

d) <u>D'autres équations</u>

- Résoudre dans $\mathbb{R}$: E$_4$: $\cos x = \sin(\frac{\pi}{5})$

Remplaçons le sinus par un cosinus, l'équation devient $\cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5})$. Déduisons-en que, selon l'équation élémentaire, $x = \pm(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}) + 2k\pi = \pm(\frac{3\pi}{10}) + 2k\pi$. Cela conduit à, d'une part $x = \frac{3\pi}{10} + 2k\pi$, et d'autre part $x = \frac{-3\pi}{10} + 2k\pi$. Nous avons donc d'une part $\frac{3\pi}{10}$, $\frac{3\pi}{10} + 2\pi = \frac{23\pi}{10}$, $\frac{3\pi}{10} + 4\pi = \frac{43\pi}{10}$, etc. et d'autre part $\frac{-3\pi}{10}$, $\frac{-3\pi}{10} + 2\pi = \frac{17\pi}{10}$, $\frac{-3\pi}{10} + 4\pi = \frac{37\pi}{10}$, etc. Il y a deux solutions par tour, entre 0 et 2π il n'y a que $\frac{3\pi}{10}$ et $\frac{17\pi}{10}$.

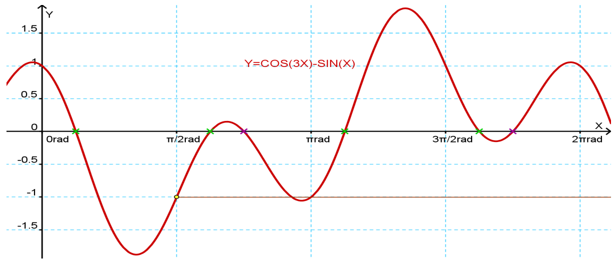
- Résoudre dans $\mathbb{R}$: E$_5$: $\cos 3x = \sin x$

Remplaçons encore une fois le sinus par un cosinus, l'équation devient $\cos 3x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$. On a donc $3x = \pm(\frac{\pi}{2} - x) + 2k\pi$. Cela conduit à, d'une part $4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, et d'autre part $2x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$. Nous avons donc d'une part $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, et d'autre part $x = \frac{-\pi}{4} + k\pi$.

Cela conduit à écrire les solutions $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2} = \frac{13\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8} + 2\pi = \frac{17\pi}{8}$ etc. et d'autre part $\frac{-\pi}{4}$, $\frac{-\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$, $\frac{-\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$, etc.

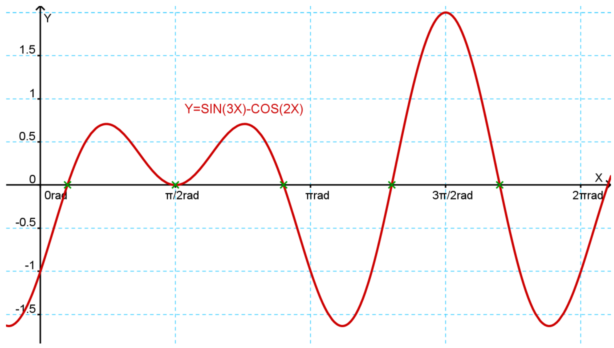
Il y a 4+2=6 solutions par tour, entre 0 et 2π il y a $\frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{9\pi}{8}$, $\frac{13\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$.

Traçons la courbe de la fonction $h : x\ \alpha\ \cos 3x - \sin x$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$. Faisons figurer les solutions de l'équation sur cette courbe (en vert les quatre premières et en violet les deux dernières).



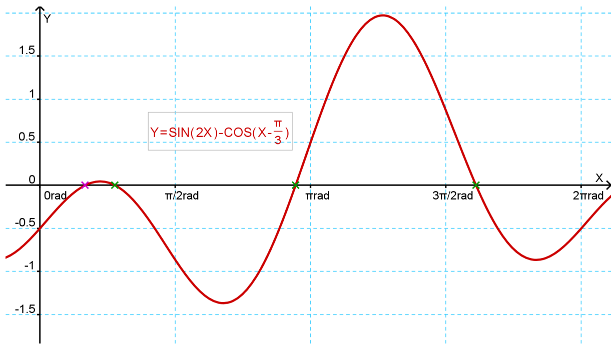
- Résoudre dans $\mathbb{R}$: E$_6$: $\sin 3x = \cos 2x$

Suivant le même principe, l'équation devient $\cos(\frac{\pi}{2} - 3x) = \cos 2x$. On a donc $\frac{\pi}{2} - 3x = \pm 2x + 2k\pi$. Cela conduit à, d'une part $-5x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$, et d'autre part $-x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$. Nous avons donc d'une part $x = \frac{\pi}{10} - 2k\frac{\pi}{5}$, et d'autre part $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Remarquons que $x = \frac{\pi}{10} - 2k\frac{\pi}{5}$ ou $x = \frac{\pi}{10} + 2k'\frac{\pi}{5}$ revient au même, puisque k ou $k' = -k$ sont des entiers relatifs. Cela conduit à écrire les solutions $\frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{10} + 2\frac{\pi}{5} = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{10} + 4\frac{\pi}{5} = \frac{9\pi}{10}$, $\frac{\pi}{10} + 6\frac{\pi}{5} = \frac{13\pi}{10}$, $\frac{\pi}{10} + 8\frac{\pi}{5} = \frac{17\pi}{10}$, etc. et d'autre part $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$, etc. Ces valeurs données par la 2$^{\text{ème}}$ égalité sont redondantes (en double). Il n'y a donc que cinq solutions par tour (entre 0 et 2π) comme on peut le voir sur cet extrait de la courbe d'équation $y = \sin 3x - \cos 2x$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.



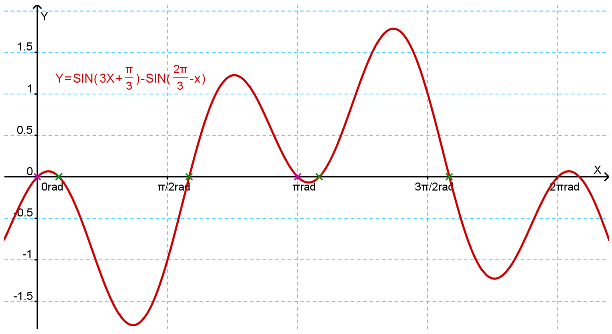
- Résoudre dans $[0; 2\pi[$: E$_7$: $\sin 2x = \cos(x - \frac{\pi}{3})$

L'équation s'écrit $\cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$. On a donc $\frac{\pi}{2} - 2x = \pm(x - \frac{\pi}{3}) + 2k\pi$. Cela conduit à, d'une part $-3x = \frac{-\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi$, et d'autre part $-x = \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$. Nous avons donc d'une part $x = \frac{5\pi}{18} + 2k'\frac{\pi}{3}$, et d'autre part $x = \frac{\pi}{6} + 2k'\pi$. Comme expliqué plus haut, on a écrit dans ces deux égalités, directement $k' = -k$. Cela conduit à écrire les trois solutions entre 0 et 2π de la 1$^{\text{ère}}$ égalité : $\frac{5\pi}{18}$, $\frac{5\pi}{18} + 2\frac{\pi}{3} = \frac{17\pi}{18}$ et $\frac{5\pi}{18} + 4\frac{\pi}{3} = \frac{29\pi}{18}$, la seule solution donnée par la 2$^{\text{ème}}$ égalité est $\frac{\pi}{6}$, elle n'est pas redondante, il y a donc quatre solutions par tour comme on peut le voir sur cet extrait de la courbe d'équation $y = \sin 2x - \cos(x - \frac{\pi}{3})$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ où la dernière solution est marquée en violet (c'est la plus petite de l'intervalle).



- Résoudre dans $[0; 2\pi[$: E$_8$: $\sin(3x + \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{2\pi}{3} - x)$

Pour une fois, on va rester avec l'égalité des sinus. On a donc, soit $3x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}-x+2k\pi$, soit $3x+\frac{\pi}{3}=\pi-(\frac{2\pi}{3}-x)+2k\pi$. Cela se transforme en, soit $4x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, soit $2x=0+2k\pi$. Cela conduit à, d'une part $x=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}$, et d'autre part $x=k\pi$. Cela conduit à écrire les quatre solutions entre 0 et 2π de la 1ère égalité : $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}=\frac{7\pi}{12}$, $\frac{\pi}{12}+\pi=\frac{13\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{12}+3\frac{\pi}{2}=\frac{19\pi}{12}$, les deux solutions données par la 2ème égalité sont 0 et π, il y a donc six solutions par tour comme on peut le voir sur cet extrait de la courbe d'équation $y=\sin(3x+\frac{\pi}{3})-\sin(\frac{2\pi}{3}-x)$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.



- Résoudre dans $[0;2\pi[$: E₉ : $\cos^2 x=\sin^2 2x$

On peut commencer par écrire $\cos^2 x-\sin^2 2x=(\cos x-\sin 2x)(\cos x+\sin 2x)=0$, chacun des facteurs pouvant s'annuler, on a

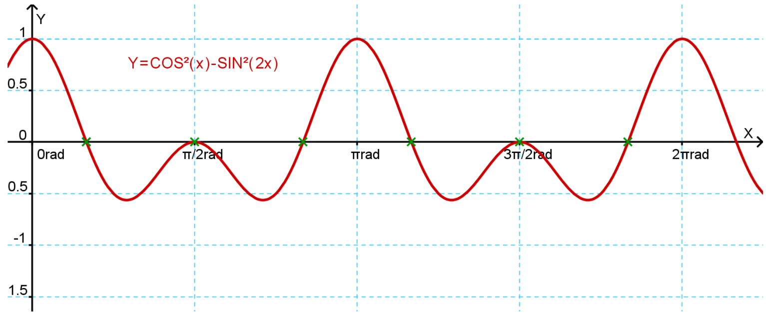
soit $\cos x-\sin 2x=0$ c'est-à-dire $\cos x=\sin 2x=\cos(\frac{\pi}{2}-2x)$,

soit $\cos x+\sin 2x=0$ c'est-à-dire $\cos x=-\sin 2x=-\cos(\frac{\pi}{2}-2x)=\cos(\pi-(\frac{\pi}{2}-2x))=\cos(\frac{\pi}{2}+2x)$.

Remarquez l'utilisation dans cette dernière égalité de l'angle associé $\pi-x$ qui change le signe du cosinus. On obtient donc les solutions en écrivant d'abord $x=\pm(\frac{\pi}{2}-2x)+2k\pi$ et $x=\pm(\frac{\pi}{2}+2x)+2k\pi$, puis $3x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $-x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$, $x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$ et $3x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$.

Finalement, on obtient $x=\frac{\pi}{6}+2k\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{2}+2k'\pi$, $x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$ et $x=\frac{-\pi}{6}+2k'\frac{\pi}{3}$.

Combien de solutions sur l'intervalle $[0; 2\pi]$? Faites les calculs et vérifiez sur la courbe qu'il y a les six nombres suivants : $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $5\frac{\pi}{6}$, $7\frac{\pi}{6}$, $3\frac{\pi}{2}$ et $9\frac{\pi}{6}$.



2) Périodicité

a) Quelles sont les périodes des fonctions définies par $F_1(x)=sin(3x+1)$ et $F_2(x)=cos(5x-3)$?

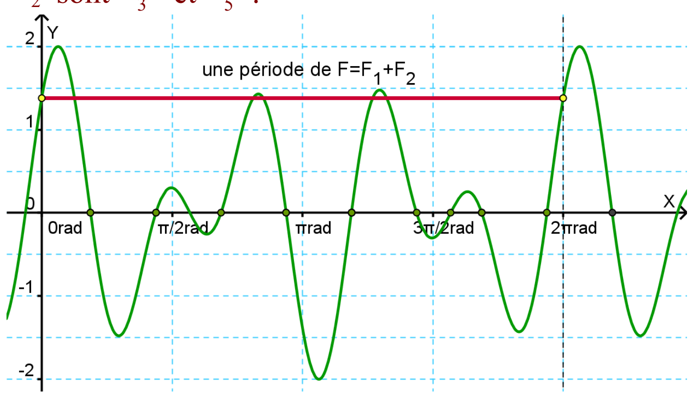
En déduire la période de la fonction F définie par $F(x)=F_1(x)+F_2(x)$.

D'après ce qu'on a vu en cours, les périodes de F_1 et F_2 sont $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{5}$.

Pour trouver la période de la fonction F, somme de F_1 et F_2, il faut trouver le premier multiple commun de $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{5}$. On doit donc chercher parmi $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{6\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{10\pi}{3}$, etc. (les multiples de $\frac{2\pi}{3}$) et parmi $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$, $\frac{8\pi}{5}$, $\frac{10\pi}{5}$, etc. (les multiples de $\frac{2\pi}{5}$) lequel est le premier dans les deux listes.

C'est $\frac{6\pi}{3}=\frac{10\pi}{5}=2\pi$, donc la période de F est 2π.

Si on trace la courbe de F, on s'aperçoit de cela.



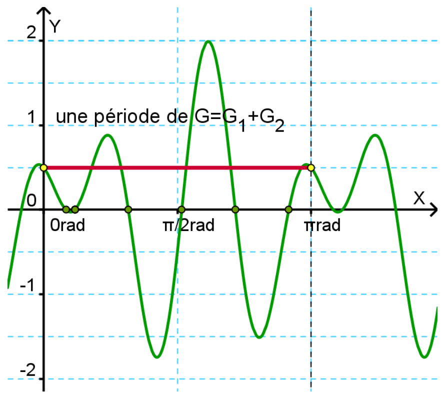
De même, quelle est la période de $G(x)=cos(4x-\frac{\pi}{2})+cos(6x+\frac{\pi}{3})$?

En notant $G(x)=G_1(x)+G_2(x)$, les périodes de G_1 et G_2 sont $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ et $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

Pour trouver la période de la fonction G, somme de G_1 et G_2, il faut trouver le premier multiple commun de $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{3}$. On doit donc chercher

- parmi $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{2}=\pi$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{4\pi}{2}=2\pi$, etc.
- et parmi $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{3}=\pi$, $\frac{4\pi}{3}$, etc.

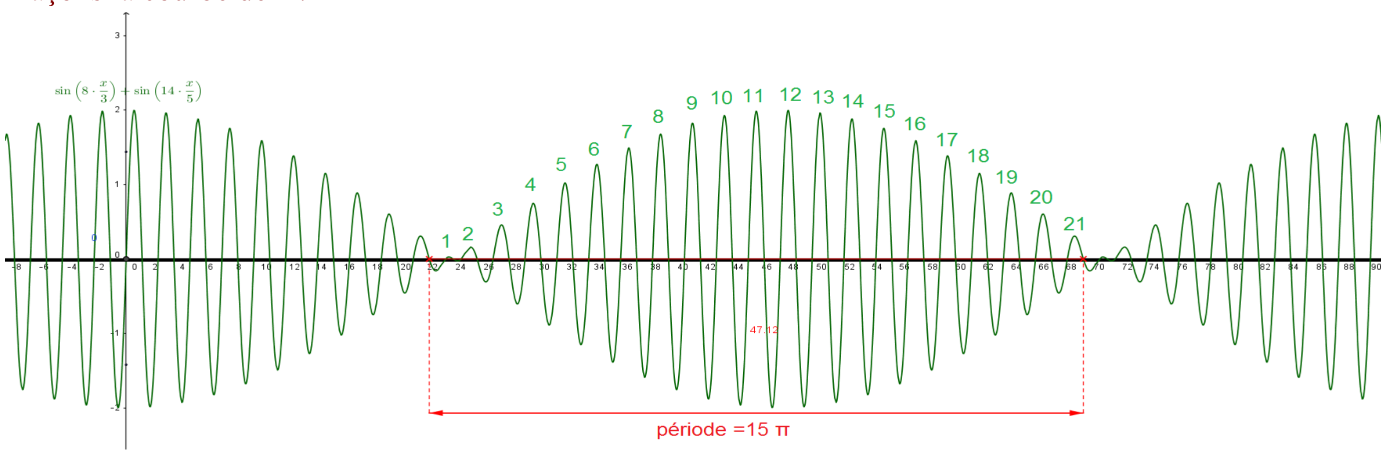
lequel est le premier dans les deux listes.
C'est évidemment π , donc la période de G est π .
Si on trace la courbe de G, on s'aperçoit de cela.



Remarque : Nous avons mis sur la courbe, les points d'intersection avec l'axe des abscisse (en vert) pour montrer le nombre de solutions de l'équation $G(x)=0$ sur l'intervalle [0 ; π] contenant une période complète de G.

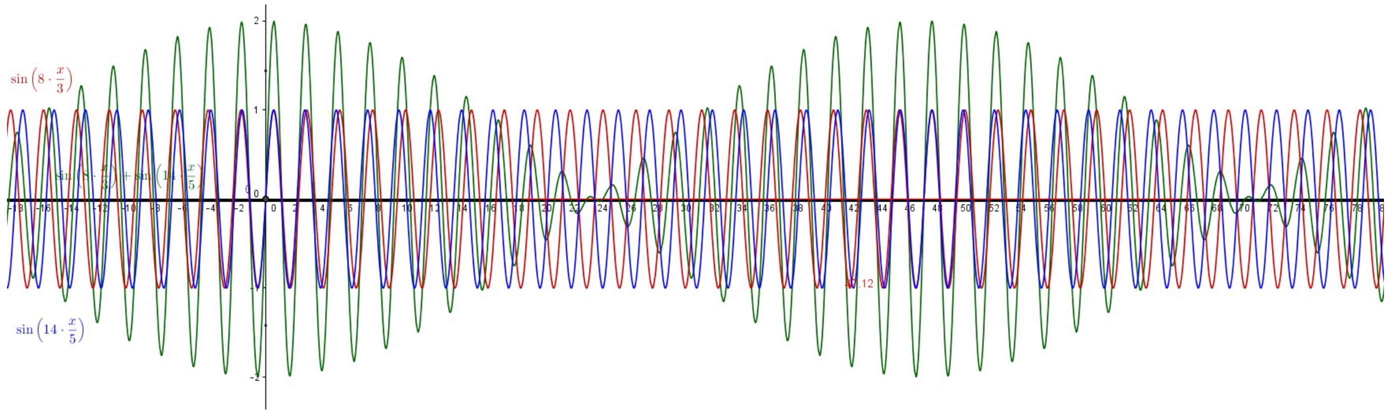
Généralisation : Si H_1 et H_2 sont des fonctions périodiques de périodes T_1 et T_2, quelle est la période de la fonction $H=H_1+H_2$ (notation abrégée *ad hoc* de la somme de deux fonctions) ?
La période de H est PPCM(T_1 ; T_2), où la fonction PPCM donne le Plus Petit Multiple Commun de deux nombres. La notation PPCM est un peu abusive car elle est définie en arithmétique, avec des entiers, alors qu'ici nos périodes T_1 et T_2 ne sont pas des entiers.
Certains se demandent comment déterminer le PPCM de deux périodes, d'une façon générale : y a t-il une formule? Supposons que la période de la 1ère fonction soit $\frac{a\pi}{b}$ et la période de la 2de fonction soit $T_2=\frac{c\pi}{d}$, avec a, b, c et d entiers positifs. On cherche le PPCM de T_1 et T_2 . Il faut donc trouver les plus petits entiers k et k' qui vérifient $kT_1=k'T_2$, ce qui revient à $\frac{k}{k'}=\frac{T_2}{T_1}$, ou encore, en remplaçant les périodes par leurs valeurs $\frac{k}{k'}=\frac{c\pi}{d}\div\frac{a\pi}{b}=\frac{cb}{ad}$.
Une solution évidente, s'il n'y a pas de simplification, est $k=cb$ et $k'=ad$.
Autrement dit, la période est égale à $kT_1=cb\frac{a\pi}{b}=ca\pi$ ou bien $k'T_2=ad\frac{c\pi}{d}=ca\pi$, ce qui revient donc au même (et heureusement, c'était le but).
Exemples : déterminons PPCM($\frac{2\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{5}$) (la période de la fonction F) :
On a $a=2$, $b=3$, $c=2$, $d=5$ et la période devrait être $ca\pi=2\times2\pi=4\pi$. Or, ce n'est pas ça, c'est 2π .
Pourquoi cela ? On a $\frac{k}{k'}=\frac{2\times3}{2\times5}=\frac{6}{10}$ qui se simplifie par 2. Donc $\frac{k}{k'}=\frac{3}{5}$ et la plus petite valeur de k est 3 (et non 6), la période est finalement $kT_1=3\frac{2\pi}{3}=2\pi$.
Moralité : attention à cette formule ($T=ca\pi$) qui ne donne la période que si $\frac{k}{k'}=\frac{cb}{ad}$ est irréductible, c'est-à-dire si cb et ad sont premiers entre eux.
Dans le cas de la fonction G, déterminons PPCM($\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$) : on a $a=1$, $b=2$, $c=1$, $d=3$ et la période devrait être $ca\pi=1\times1\pi=\pi$, ce qui est correct car la fraction $\frac{k}{k'}=\frac{1\times2}{1\times3}=\frac{2}{3}$ est irréductible.

Un dernier cas : supposons qu'on additionne deux fonctions de périodes $T_1=\frac{3\pi}{4}$ et $T_2=\frac{5\pi}{7}$. Quelle est la période de la fonction somme ? On vérifie que $\frac{k}{k'}=\frac{b\times c}{a\times d}=\frac{5\times4}{3\times7}=\frac{20}{21}$ est irréductible. C'est bien le cas, la période est donc $ca\pi=3\times5\pi=15\pi$. Il y a 20 périodes du 1er terme et 21 périodes du 2d terme pour obtenir une période complète de la somme.
On peut, juste pour visualiser ceci, tracer la courbe d'une fonction de ce type :
$H(x)=sin\left(\frac{8x}{3}\right)+sin\left(\frac{14x}{5}\right)$ est dans ce cas, vérifiez le !
Traçons la courbe de H.

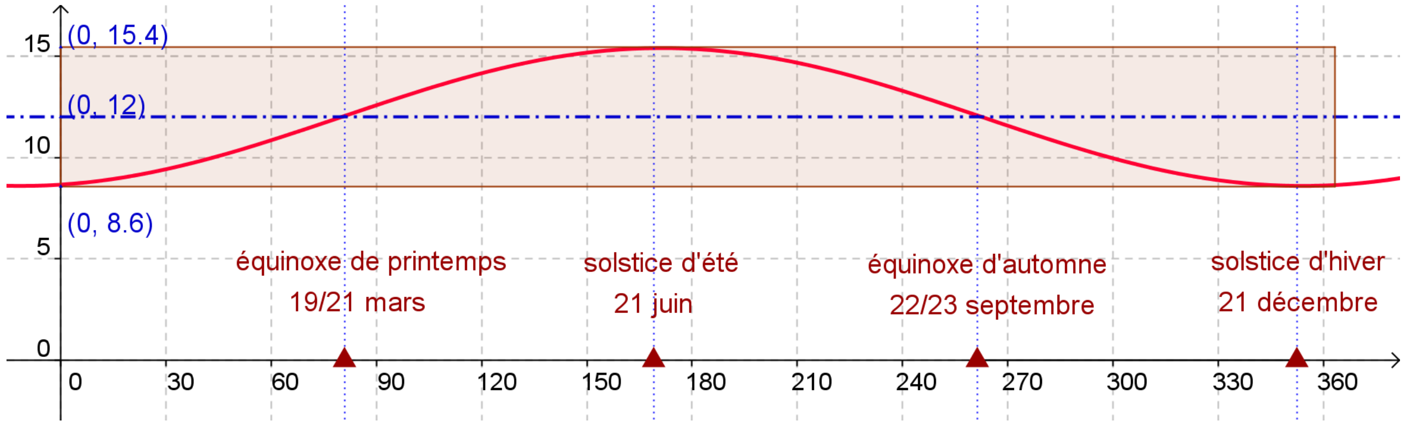


On reconnaît bien une fonction de période 15π comme on peut le voir (47,12 est une valeur approchée de

15π). Par contre, on distingue mal les deux morceaux de périodes voisines ($\frac{3}{4}=0{,}75$ alors que $\frac{5}{7}\approx0{,}714$) qui constituent la fonction *H*. Pour palier à ce défaut, j'ai représenté en dessous les deux courbes pour chacun des morceaux : lorsque les crêtes sont en phase (cela arrive tous les 15π, aux alentours de *x*=48) on a une amplitude maximum, lorsqu'elles ont en opposition, les deux morceaux s'annulent mutuellement, ce qui crée une amplitude minimum.

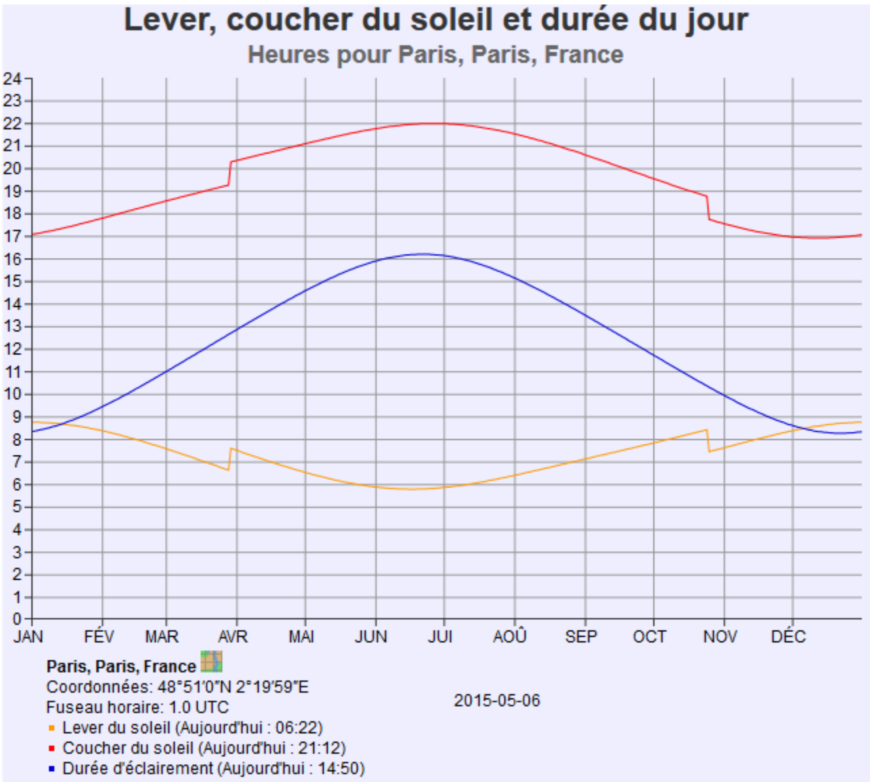


b) La durée en heures du jour à Paris est modélisée par la fonction $D : t \mapsto 12+3{,}1\sin(0{,}0172(t-80))$ où *t* est le nombre de jours écoulés depuis le 1er janvier.
Quels sont le maximum et le minimum de *D(t)* et quels jours se produisent-ils selon ce modèle ?
Le maximum de *D(t)* se produit au solstice de juin, le 21 juin, lorsque *t*=172 (31+28+31+30+31+21=172). À ce moment le *sinus* doit valoir 1, et on ajoute à la durée moyenne du jour (12 *h*), le coefficient du terme variable qui est 3,1*h*. Le jour dure alors 12+3,1=15,1*h* (15*h* et 6*min*).
Le minimum de *D(t)* se produit au solstice de décembre, le 21 décembre, lorsque *t*=355 (31+28+31+30+31+30+31+31+30+31+30+21=355). À ce moment le *sinus* doit valoir -1 , et on enlève à la durée moyenne du jour, le coefficient du terme variable qui est 3,1*h*. Le jour dure alors $12-3{,}1=8{,}9\,h$ (8*h* et 54*min*).



Préciser le rôle du nombre 80 dans l'expression de *D(t)*.
Le nombre 80 sert donc à caler les variations du terme variable sur le moment où la durée atteint son niveau d'équilibre (l'équinoxe). Ainsi, lorsque *t*=80, la durée du jour vaut 12*h* selon ce modèle.
Les équinoxes sont les moments de l'année où la nuit et le jour ont la même durée. Dans notre modèle, l'équinoxe de printemps a lieu pour *t*=80 ce qui correspond au 21 mars (31+28+21=80) car alors on a $D(80)=12+3{,}1\sin(0{,}0172\times0)=12+3{,}1\sin(0)=12+0=12\,h$. L'équinoxe d'automne correspond à la 2ème valeur de *t* pour laquelle $D(t)=12$. On doit avoir $0{,}0172\times(t-80)=\pi$, donc $t=80+\frac{\pi}{0{,}0172}\approx263$. Cette date correspond approximativement au 20 septembre (31+28+31+30+31+30+31+31+20=243+20=263). Ce jour là on a $D(263)=12+3{,}1\sin(0{,}0172\times183)=12+3{,}1\sin(3{,}1476)\approx12\,h$.
Expliquer, de même, le rôle du nombre 0,0172.
Le nombre 0,0172 sert à modéliser la période des variations : cette période est l'année, donc 365 jours.
Comme la fonction *sinus* a une période de 2π, il faut multiplier le temps par un coefficient égal à $\frac{2\pi}{365}\approx0{,}0172142$ ce qui a été arrondi à 0,0172.
Expliquer aussi le rôle du nombre 12 et celui de 3,1.
12*h* c'est la durée moyenne du jour.
3,1*h* c'est la moitié de l'amplitude annuelle pour les durées du jour à Paris.

Un petit coup d'œil à internet pour voir si nos valeurs sont correctes : la courbe bleue à droite correspond à peu près à notre courbe de la fonction D. L'amplitude semble être de 8*h* (entre 8,2*h* et 16,2*h*) ce qui conduit à un coefficient 4 plutôt que 3,1. Lorsque j'ai écrit ce sujet, je devais disposer d'une autre source (ou bien je me suis tout simplement trompé...)
Vous voyez les décrochages sur les courbes orange et rouge donnant l'heure du lever et celle du coucher : elles sont évidemment les conséquences du changement d'heure (heure d'hiver) et vous constatez que cela n'affecte pas (heureusement!) la courbe bleue.



3) Angles associés

a) Sachant que $\pi \leq x \leq 2\pi$ et que $\cos x = \frac{1}{3}$, en vous aidant du cercle trigonométrique, déterminer la valeur exacte de $\sin x$ puis déterminer une valeur approchée de x.

$(\sin x)^2 = 1-(\cos x)^2 = 1-\frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

Comme $\pi \leq x \leq 2\pi$, d'après le cercle trigonométrique, on doit avoir $\sin x \leq 0$, et donc $\sin x = -\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$.

Si on voulait que $0 \leq x \leq \pi$, on aurait $\sin x \geq 0$, et donc on aurait $\sin x = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

La calculatrice donne, pour la fonction $\cos^{-1}$, un angle de l'intervalle $[0\,;\pi]$.

Donc ici, comme on veut que $x \in [\pi\,;2\pi]$, on doit prendre l'opposé de la valeur donnée (elle a même cosinus) et ajouter 2π pour revenir dans l'intervalle qui nous concerne.

On a donc ici $x = 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 2\pi - 1{,}230959417$ *rad*, soit $x \approx 5{,}05222589$ *rad.*

b) Sachant que $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ et que $\sin x = \frac{-1}{4}$, en vous aidant du cercle trigonométrique, déterminer la valeur exacte de $\cos x$ puis déterminer une valeur approchée de x.

$(\cos x)^2 = 1-(\sin x)^2 = 1-\frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

Comme $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, d'après le cercle trigonométrique, on doit avoir $\cos x \leq 0$, et donc $\cos x = -\sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{-\sqrt{15}}{4}$.

Si on voulait que $\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, on aurait $\cos x \geq 0$, et donc on aurait $\cos x = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

La calculatrice donne, pour la fonction $\sin^{-1}$, un angle de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Donc ici, comme on veut que $x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$, on doit prendre $\pi - \sin^{-1}\left(\frac{-1}{4}\right)$ (angle qui a même sinus).

Si $\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, alors $\frac{-\pi}{2} \leq -x \leq \frac{\pi}{2}$ et donc $\pi - \frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \pi + \frac{\pi}{2}$, et on a bien $\frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \frac{3\pi}{2}$.

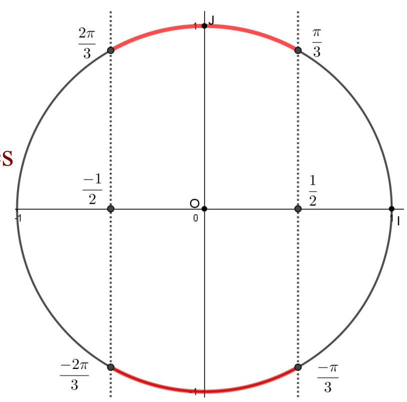
On a donc ici $x = \pi - \sin^{-1}\left(\frac{-1}{4}\right) \approx \pi + 0{,}2526802551$ *rad*, soit $x \approx 3{,}394272909$ *rad.*

Autres questions traitées en cours :

1) Inéquations :

Résoudre dans ℝ $I_1 : -\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$ et, dans $[0\,;4\pi]$ $I_2 : \sin^2 x > \frac{3}{4}$

Pour I_1, on trace un cercle trigonométrique sur lequel on fait figurer les bornes de nos intervalle-solutions qui sont $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$.



A l'aide de ce cercle, on donne les solutions qui sont, modulo 2π :

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \quad \text{et} \quad -\frac{2\pi}{3} \leq x \leq -\frac{\pi}{3}$$

On peut aussi remarquer que les solutions sont, modulo π :

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$$

En d'autres termes, on peut dire que l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi\leq x\leq\frac{2\pi}{3}+k\pi, \forall k\in\mathbb{Z}\right\}$

Pour I_2, on peut remarquer que $\sin^2 x>\frac{3}{4}\Leftrightarrow 1-\cos^2 x>\frac{3}{4}\Leftrightarrow\cos^2 x<\frac{1}{4}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}<\cos x<\frac{1}{2}$ et donc, il n'y a pas grand chose à changer pour l'ensemble des solutions qui est réduit cette fois car on ne cherche que les solutions dans $[0;4\pi]$: on doit avoir $x\in\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi<x<\frac{2\pi}{3}+k\pi, \forall k\in\{0,1,2,3\}\right\}$.

2) <u>Équations</u> : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2\cos^2 x-\cos x-1=0$
Si on pose $X=\cos x$, l'équation devient $2X^2-X-1=0$.
Elle a pour solutions $X=\frac{1\pm\sqrt{9}}{4}$, soit $X=1$ et $X=-\frac{1}{2}$.
Cela conduit a $\cos x=1\Leftrightarrow x=0[2\pi]$ ou $\cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pm 2\pi}{3}[2\pi]$.
Il y a donc trois solutions modulo 2π qui sont aux sommets du triangle équilatéral BAI avec $B\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$, $A\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $I(0)$.