1 Les polynômes

Objectifs :

- Reconnaître un polynôme, son degré et ses coefficients
- Mettre sous forme canonique un trinôme et savoir l'intérêt de cette forme
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation du second degré ou de degré supérieur
- Factoriser un polynôme ; étudier son signe ; déterminer ses racines réelles

Aperçu historique :

Les mathématiciens de l'époque babylonienne (25 siècles avant J.-C.) savaient déjà résoudre des équations du second degré. Le grec Diophante (4 siècles avant J.-C.) en développe l'approche ainsi que, après lui, les mathématiciens arabes dont le plus connu est Al-Khwarizmi (780-850, Bagdad). Le nom de ce dernier, latinisé, a donné le mot algorithme ; son ouvrage « Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison », par déformation du mot « restauration » (al-jabr en arabe) a donné algèbre. Al-Khwarizmi distingue encore six cas pour la résolution de ces équations ; l'unification est tardive, en particulier à cause du refus de considérer les nombres négatifs. Le mathématicien français François Viète (1540-1603) introduit les lettres pour désigner les quantités (des consonnes pour les quantités connues, des voyelles pour les inconnues) et la forme algébrique moderne est à peu prés définitive avec René Descartes (1596-1650) qui désigne par a, b, c,... les quantités connues et x, y, z,... les inconnues.

Plan du cours :

Un polynôme à une indéterminée est une expression de la forme $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$, *où* x *représente l'indéterminée (l'inconnue). On appelle « degré » la plus grande puissance de* x *présente dans l'expression. Dans l'écriture ci-dessus, le polynôme est de degré* n, *mais dans les deux premières parties, nous étudierons les polynômes de degré* $n = 2$. *Partie 1 : ce qui relève de la fonction (sens de variation, extremum, parité, courbe) et partie 2 : ce qui se rattache à l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *(racines, factorisation, signe du trinôme). Dans la dernière partie, nous donnerons quelques propriétés des polynômes de degré supérieur à 2.*

1. Fonction polynôme du second degré

a. Définition

Définition 1.1 (polynôme du second degré) Soient a, b, c trois nombres réels déterminés tels que $a \neq 0$. On appelle fonction polynôme du second degré, ou simplement trinôme, toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemple 1 – $f : x \longmapsto 5x^2 - 3x + 4$, $g : x \longmapsto -3x^2 + 0,5$ et $h : x \longmapsto (2x+3)(x-1)$ sont des trinômes. Pour les deux premières fonctions, c'est évident (pour f, on a $a = 5 \neq 0$, $b = -3$ et $c = 4$; pour g, on a $a = -3 \neq 0$, $b = 0$ et $c = 0,5$), et pour la dernière, si on développe l'expression, on obtient $2x^2 + x - 3$, qui est bien un polynôme du second degré avec $a = 2 \neq 0$, $b = 1$ et $c = -3$.

Remarques :
- L'expression $ax^2 + bx + c$ est la forme développée de $f(x)$. Nous en verrons plus loin les formes canonique et factorisée.
- Par abus de langage, on appellera « polynôme du second degré » toute expression algébrique pouvant s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
- Les réels a, b, c sont déterminés s'ils ne dépendent pas de l'indéterminée x. Ils sont souvent invariables, mais ils peuvent aussi varier comme dans l'expression $f(x) = 2mx^2 + m^2x + 3$ où m est un paramètre variable indépendant de x.

b. La forme canonique

Propriété 1.1 (forme canonique) Soient a, b, c trois nombres réels tels que $a \neq 0$.
L'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, où $\alpha = -\frac{b}{2a}$, et $\beta = f(\alpha)$. Cette écriture, appelée forme canonique, est unique.

Démonstration Soient a, b, c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
Étape 1 : on met en facteur le coefficient dominant (celui de x^2) :

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$

Étape 2 : dans $x^2 + \frac{b}{a}x$, on reconnait le début du développement d'un carré

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

On remplace donc $x^2 + \frac{b}{a}x$ par $(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}$. Il vient :

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}]$$

Étape 3 : on arrange, dans les crochets, le terme indépendant de x :

$$-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = -\frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}$$

Étape 4 : après substitution, développement et transformation, on obtient finalement :

$$ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}] = a(x - \underbrace{\frac{-b}{2a}}_{\alpha})^2 + \underbrace{\frac{-b^2 + 4ac}{4a}}_{\beta}$$

Soit, avec les notations indiquées :

$$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta, \text{ où } \alpha = -\frac{b}{2a}, \text{ et } \beta = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

α et β sont entièrement déterminés dès lors que a, b et c le sont.
La forme canonique existe donc, et elle est unique (de même que la forme développée est unique).
Vérifions que $\beta = f(\alpha)$:
$f(\alpha) = f(-\frac{b}{2a}) = a(-\frac{b}{2a})^2 + b(-\frac{b}{2a}) + c = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{(b^2 - 2b^2}{4a} + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \beta$

Exemple 2 –

Déterminons la forme canonique de $\begin{cases} f: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto 2x^2 - 6x + 5 \end{cases}$

Première méthode : appliquons la formule. On a un polynôme du second degré avec $a = 2$, $b = -6$ et $c = 5$. Sa forme canonique est $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2\times 2} = \frac{3}{2}$ et $\beta = f(\alpha) = f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$. Ainsi, la forme canonique est $f(x) = 2(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{2}$

Deuxième méthode, dans l'esprit de la démonstration ci-dessus : mettons le coefficient de x^2 en facteur, puis cherchons à reconnaitre le début d'un carré.

$f(x) = 2x^2 - 6x + 5 = 2(x^2 - 3x + \frac{5}{2}) = 2(x^2 - 2 \times \frac{3}{2}x + \frac{5}{2})$

Comme $(x - \frac{3}{2})^2 = x^2 - 2 \times \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$, on obtient :

$f(x) = 2((x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + \frac{5}{2}) = 2((x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4}) = 2(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{2}$.

c. Sens de variation

Définition 1.2 (sens de variation) Un fonction f est strictement croissante sur un intervalle I si et seulement si $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Remarques :

- On définit, de même, un fonction strictement décroissante sur I ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$).
- La fonction est croissante « au sens large » (on dit aussi croissante, sans précision) si et seulement si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
- Il faut retenir qu'une fonction croissante conserve l'ordre : les images sont rangées comme les antécédents.

Propriété 1.2 (signe du taux de variation) Le signe du taux de variation $\tau = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ d'une fonction f entre x_1 et x_2, deux points d'un intervalle I, indique le sens de variation de f sur I. En particulier, $\tau > 0 \Leftrightarrow f$ strictement croissante et $\tau \geqslant 0 \Leftrightarrow f$ croissante.

Démonstration $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2)$ et $x_1 - x_2$ sont de même signe.
Supposons que $x_1 - x_2 < 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2$. On a alors $f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
D'après la définition 1.2, la fonction f est donc strictement croissante.
Si $x_1 - x_2 > 0$, il suffit d'intervertir les noms des deux variables dans la définition :
$x_2 < x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Théorème 1.1 Les variations de la fonction polynôme du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ dépendent du signe de a et de la valeur de α.

Cas où $a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

f admet un minimum atteint pour $x = \alpha$

Cas où $a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

f admet un maximum atteint pour $x = \alpha$

DÉMONSTRATION Le taux de variation entre x_1 et x_2 d'un trinôme f défini par sa forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ est :

$$\tau = \frac{a(x_1-\alpha)^2 + \beta - [a(x_2-\alpha)^2 + \beta]}{x_1 - x_2} = \frac{a(x_1-\alpha)^2 - a(x_2-\alpha)^2}{x_1 - x_2} = \frac{a[(x_1-\alpha)^2 - (x_2-\alpha)^2]}{x_1 - x_2}$$

Continuons à factoriser le numérateur en reconnaissant une différence de carrés :

$$\tau = \frac{a[(x_1-\alpha-x_2+\alpha)(x_1-\alpha+x_2-\alpha)]}{x_1-x_2} = \frac{a[(x_1-x_2)(x_1-\alpha+x_2-\alpha)]}{x_1-x_2} = a(x_1-\alpha+x_2-\alpha)$$

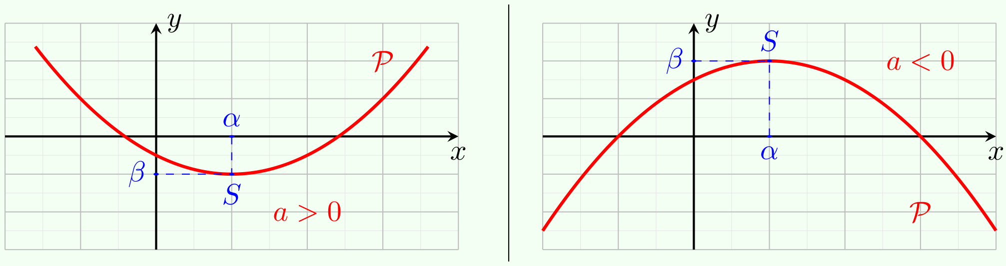
Le signe de ce produit dépend de a et du facteur $(x_1-\alpha+x_2-\alpha)$. Or, si l'on prend soin de choisir x_1 et x_2 dans un même intervalle I de la forme $[\alpha;+\infty[$ ou $]-\infty;\alpha]$, ce facteur ne change pas de signe. Par exemple, $x_1, x_2 \in [\alpha;+\infty[\Rightarrow x_1-\alpha \geqslant 0$ et $x_2-\alpha \geqslant 0 \Rightarrow x_1-\alpha+x_2-\alpha \geqslant 0$. En réalité, comme x_1 et x_2 sont distincts, supposons que $x_1 < x_2$, seul x_1 peut s'annuler et $x_1-\alpha+x_2-\alpha > 0$. Le produit des deux facteurs aura, dans ce cas, le signe de a.
Finalement, dans le cas où $a > 0$, d'après la propriété 1.2, f est croissante sur $[\alpha;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;\alpha]$. Elle passe donc par un minimum quand $x = \alpha$, ce minimum est $f(\alpha)$ identifié dans la propriété 1.1 comme la constante β. Dans le cas où $a < 0$, le signe de τ est inversé et, par conséquent, les sens de variations sont inversés aussi. Le trinôme est d'abord croissant, puis décroissant. Il passe donc par un maximum de coordonnées $(\alpha;\beta)$.

EXEMPLE 3 – Soit $g : x \mapsto -3x^2 + 2x - 1$. g est un polynôme du second degré, avec $a = -3 < 0$, $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-6} = \frac{1}{3}$ et $g(\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}$. D'après le théorème 1.1, on obtient le tableau de variations :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$-\frac{2}{3}$	↘ $-\infty$

d. Représentation graphique

THÉORÈME 1.2 (ALLURE DE LA COURBE) La représentation graphique de la fonction polynôme du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ est une parabole $\mathcal{P}$, de sommet $S(\alpha;\beta)$, et a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.

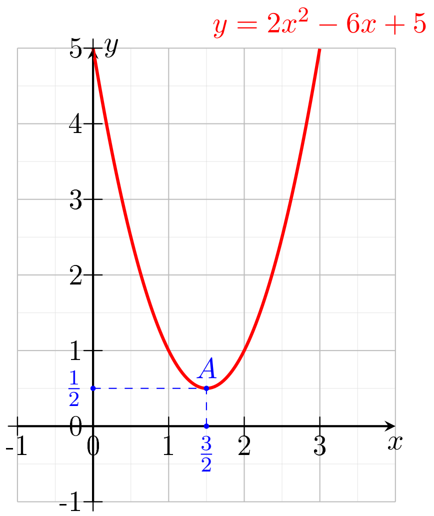


DÉMONSTRATION La droite d'équation $x = \alpha$ est la droite verticale passant par l'extremum.
Prenons deux points situés de part et d'autre de cette droite. Leurs abscisses s'écrivant $x_1 = \alpha + \lambda$ et $x_2 = \alpha - \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que ces deux points ont la même image pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:
$f(x_1) = a(x_1-\alpha)^2 + \beta = a(\alpha+\lambda-\alpha)^2 + \beta = a\lambda^2 + \beta$

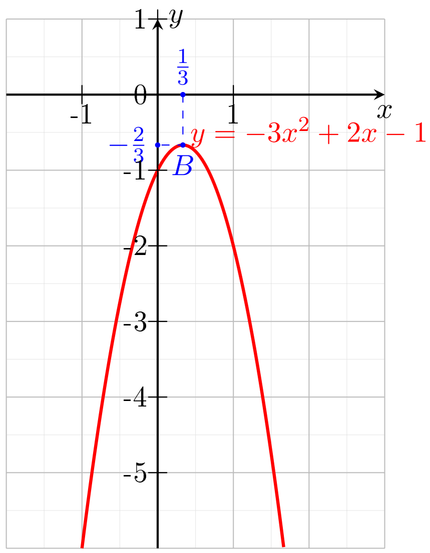
$f(x_2) = a(x_2 - \alpha)^2 + \beta = a(\alpha - \lambda - \alpha)^2 + \beta = a(-\lambda)^2 + \beta = a\lambda^2 + \beta = f(x_1)$
En effet, du fait de la parité de la fonction carré, on a $(-\lambda)^2 = \lambda^2$.

Exemple 4 – Représentons graphiquement les fonctions f et g des deux exemples précédents :

$f : x \mapsto 2x^2 - 6x + 5$. On a une fonction polynôme du second degré avec $a = 2 > 0$. D'après le théorème 1.2, on obtiendra une parabole « tournée vers le haut ». D'après la propriété 1.1, la forme canonique de f est $f(x) = 2(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{2}$, donc le sommet de la parabole est le point $A(\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$.

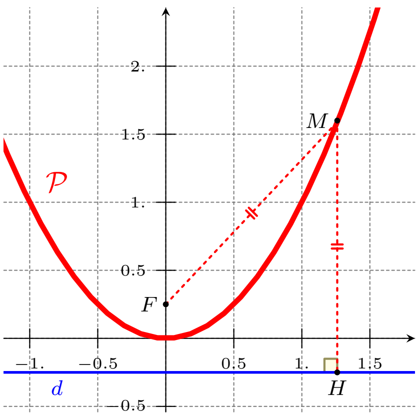


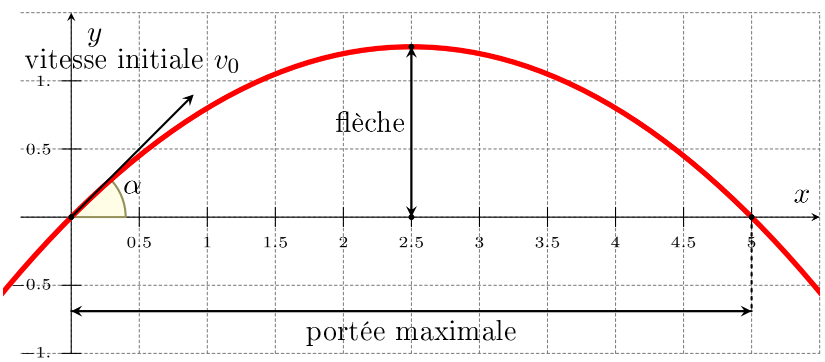
$g : x \mapsto -3x^2 + 2x - 1$. On a une fonction polynôme du second degré avec $a = -3 < 0$. D'après le théorème 1.2, on obtiendra une parabole « tournée vers le bas ». D'après la propriété 1.1, la forme canonique de g est $g(x) = -3(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{2}{3}$, donc le sommet de la parabole est le point $B(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3})$.



Remarques :

- Les paraboles font partie de la famille des coniques, de même que les ellipses et les hyperboles. Ce type de courbe s'obtient par intersection d'un plan avec un cône de révolution lorsque le plan est parallèle à une des génératrices du cône. On définit aussi la parabole $\mathcal{P}$ comme l'ensemble des points M équidistants d'un point (le foyer F) et d'une droite (la directrice d), voir l'illustration pour la fonction carrée.
- Un projectile, soumis à la seule force de gravité, suit dans sa chute une trajectoire parabolique. La parabole est « tournée vers le bas » - on s'en doute - son équation étant $y = y_0 + x \tan \alpha - \frac{g}{2{v_0}^2 \cos \alpha^2} x^2$, où y_0 est l'ordonnée du point de lancement, v_0 la vitesse initiale, α l'angle de tir que fait initialement la trajectoire avec l'horizontale et g l'accélération de la pesanteur (une constante physique qui vaut environ $9,81 ms^{-2}$). Sur notre illustration $\alpha = 45^\circ$ (la portée est alors maximale) et $y_0 = 0$.





2. L'équation du second degré

a. Résolution de l'équation

THÉORÈME 1.3 (SOLUTIONS DE L'ÉQUATION) Soient a, b, c trois nombres réels tels que $a \neq 0$.
Posons $\Delta = b^2 - 4ac$, que l'on appellera discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
Le nombre de solutions de cette équation dépend du signe de Δ :

- $\Delta > 0$: l'équation admet deux solutions distinctes, $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta = 0$: l'équation admet une solution unique, $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- $\Delta < 0$: l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION Soient a, b, c trois nombres réels tels que $a \neq 0$ et soit $\Delta = b^2 - 4ac$.
D'après la démonstration de la propriété 1.1 (Étape 4), cette équation est équivalente à :

$$a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}] = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] = 0$$

Selon le signe de Δ, trois cas peuvent se produire :
1^er^ cas : $\Delta > 0$
L'expression entre crochets est une différence de carrés (Δ est le carré de $\sqrt{\Delta}$) qui se factorise :

$$a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] = 0 \iff a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2] = 0 \iff a(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}) = 0$$

$$\iff a(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a})(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}) = 0 \iff a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

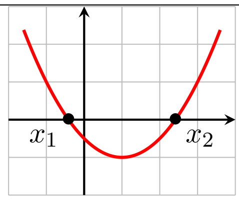
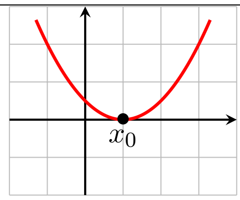
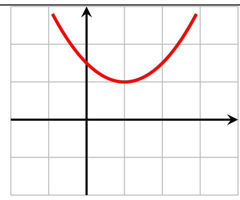
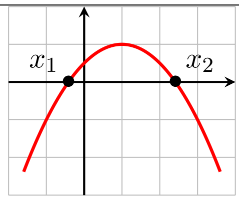
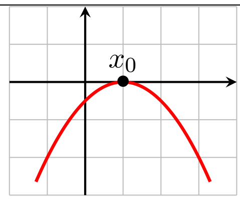
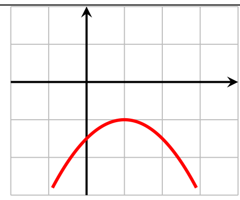
Comme $a \neq 0$, il y a donc bien deux solutions à cette équation. Ce sont $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
2^e^ cas : $\Delta = 0$
L'équation devient $a(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$, et admet une solution unique : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
NB : ce 2^e^ cas est un cas particulier du 1^er^ pour lequel $x_1 = x_2$
3^e^ cas : $\Delta < 0$
Le discriminant Δ n'est pas le carré d'un réel. Comme $a \neq 0$, l'équation revient à :

$$\underbrace{(x + \frac{b}{2a})^2}_{\text{positif}} = \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{\text{négatif}}$$

Le membre de gauche (un carré) est positif tandis que celui de droite est strictement négatif ($4a^2 > 0$ et $\Delta < 0$). L'égalité étant toujours fausse pour $x \in \mathbb{R}$, l'équation n'a pas de solution (elle en a dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des complexes).

Remarque :
Les deux solutions x_1 et x_2 de l'équation $f(x) = 0$, quand elles existent, sont appelées « racines » de la fonction f. Dans le cas $\Delta = 0$, les deux solutions n'en font qu'une (on l'a notée x_0). Cette unique solution annulant deux facteurs du 1^er^ degré (l'équation s'écrit $a(x + \frac{b}{2a})(x + \frac{b}{2a}) = 0$), on dit que c'est une racine « double ». Cela permet d'affirmer que, dans $\mathbb{R}$, une équation du 2^e^ degré admet toujours deux racines, éventuellement doubles, lorsque $\Delta \geqslant 0$. Cela préfigure un théorème, valable dans $\mathbb{C}$, qui est dû à Carl Friedrich Gauss (1777-1855), selon lequel une équation polynomiale de degré n admet toujours n racines, éventuellement multiples. L'équation $x^3 = 0$, par exemple, admet une racine triple $x = 0$. Par contre, l'équation $x^3 = 8$, qui s'écrit $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$, admet une racine réelle $x = 2$ et deux racines complexes (le trinôme $x^2 + 2x + 4$ n'a pas de racine réelle car son discriminant $\Delta = -12$ est négatif).

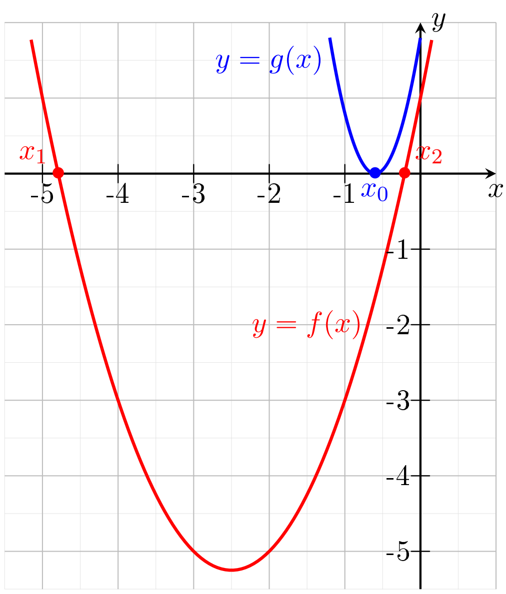
Interprétation graphique :
Soient a, b, c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont les abscisses x_1 et x_2 (ou x_0 s'il n'y en a qu'un) des points d'intersection - quand ils existent - de la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ et de l'axe des abscisses.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Exemple 5 – Solutions de l'équation $x^2 + 5x + 1 = 0$
Il s'agit d'une équation du second degré, avec $a = 1$, $b = 5$ et $c = 1$.
On a $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 1 = 25 - 4 = 21$. On est dans le cas $\Delta > 0$.
L'équation admet donc deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-5-\sqrt{21}}{2} \approx -4,791$ et $x_2 = \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \approx -0,209$.
$S = \{\frac{-5-\sqrt{21}}{2} ; \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\}$.

Exemple 6 – Racines de la fonction $g : x \mapsto 5x^2 + 6x + 1,8$
Il s'agit de déterminer les solutions de l'équation du second degré $5x^2 + 6x + 1,8 = 0$, avec $a = 5$, $b = 6$ et $c = 1,8$. On a $\Delta = 6^2 - 4 \times 5 \times 1,8 = 36 - 36 = 0$, on est dans le cas $\Delta = 0$.
L'équation admet une seule solution $x_0 = \frac{-6}{2 \times 5} = \frac{-3}{5} = -0,6$.
La fonction g a une racine unique qui est $-0,6$.

Exemple 7 – Intersection de deux paraboles : pour quelles valeurs de x les expressions $f(x) = x^2 + 5x + 1$ et $g(x) = 5x^2 + 6x + 1,8$ sont-elles égales ?
Il s'agit de résoudre l'équation $x^2 + 5x + 1 = 5x^2 + 6x + 1,8$, qui se réduit à $4x^2 + x + 0,8 = 0$. Pour cette équation du second degré, on a $a = 4$, $b = 1$, $c = 0,8$ et $\Delta = 1^2 - 4 \times 4 \times 0,8 = -11,8$. Comme $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$. Les deux paraboles ne se croisent pas.



La courbe de la fonction f coupe l'axe des abscisses en deux points (les coordonées de x_1 et x_2 sont calculées dans l'exemple 5) tandis que celle de la fonction g ne la touche qu'en un point (d'abscisse x_0=-0,6 comme on l'a vu dans l'exemple 6). Les deux courbes ne se coupent pas (cela n'est pas évident sur la portion des courbes tracées).

b. Signe du trinôme

Propriété 1.3 (factorisation du trinôme) Soient a, b, c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. Le trinôme $ax^2 + bx + c$ se factorise, ou pas, selon le signe de Δ :

- Si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.
- Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, où x_0 est la racine double du trinôme.
- Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de forme factorisée du trinôme dans $\mathbb{R}$.

Démonstration Cette propriété est une conséquence du théorème 1.3.

Exemple 8 – Factorisons le trinôme $3x^2 - 5x + 2$. On a $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1$, donc $\Delta > 0$ et le polynôme a deux racines réelles distinctes, $x_1 = \frac{2}{3}$ et $x_2 = 1$.
La factorisation découle alors de la propriété 1.3 : $3x^2 - 5x + 2 = 3(x - \frac{2}{3})(x - 1)$.

Théorème 1.4 (étude du signe) Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré. Le signe de ce polynôme dépend du signe de Δ et du signe de a.

- Si $\Delta > 0$, le polynôme est du signe de a « à l'extérieur des racines », et du signe de $-a$ « à l'intérieur des racines ».
- Si $\Delta = 0$, le polynôme est toujours du signe de a. Il s'annule sans changer de signe en son unique racine.
- Si $\Delta < 0$, le polynôme est toujours du signe de a.

Démonstration La propriété 1.3 indique que le trinôme $ax^2 + bx + c$ se factorise, ou pas, selon le signe du discriminant. Le signe de ce trinôme dépend donc de l'existence d'une forme factorisée et, par voie de conséquence, du signe de Δ.

- $\Delta > 0$: le trinôme se factorise en $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les deux racines du trinôme. L'étude du signe de ce produit découle de la règle des signes. Supposons, quitte à intervertir x_1 et x_2, que $x_1 < x_2$. On peut alors dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $(x - x_1)$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(x - x_2)$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
signe de $a(x - x_1)(x - x_2)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- $\Delta = 0$: le trinôme se factorise en $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, où x_0 est la racine double du trinôme. Comme un carré est toujours positif ou nul, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a, mais s'annule pour $x = x_0$ (sans changer de signe).
- $\Delta < 0$: avec les notations précédentes, on a : $ax^2 + bx + c = a[\underbrace{(x + \frac{b}{2a})^2}_{\text{positif}} + \underbrace{\frac{-\Delta}{4a^2}}_{\text{positif}}]$.

  L'expression entre crochets étant une somme positive, le trinôme est toujours du signe de a.

Exemple 9 – Résoudre l'inéquation $3x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$: le premier membre de cette inégalité est un trinôme pour lequel $a = 3$, $b = -2$, $c = 1$ et donc $\Delta = -8 < 0$. Le trinôme ne s'annule jamais et conserve le signe de a. Comme $a > 0$, l'inéquation est toujours vérifiée. $S = \mathbb{R}$.

Exemple 10 – Étude du signe du polynôme $-x^2+4x-1$
C'est un trinôme pour lequel $a=-1$, $b=4$, $c=-1$ et donc $\Delta=12>0$. Ce trinôme admet donc deux racines $x_1=2-\sqrt{3}$ et $x_2=2+\sqrt{3}$. D'après la propriété 1.3, il est du signe de a à « l'extérieur des racines » et du signe opposé à a à « l'intérieur des racines ». Comme $a<0$, le trinôme est positif pour $x\in[x_1;x_2]$ et négatif pour $x\in]-\infty;x_1]\cup]x_2;+\infty]$.
Le tableau de signes ci-dessous résume cela.

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
Signe de $-x^2+4x-1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Les différents cas :
Le trinôme $f(x)=ax^2+bx+c$ est du signe opposé de a à l'intérieur des racines (cela n'arrive que si $\Delta>0$) ; dans tous les autres cas, il est du signe de a ou il est nul. Selon les signes de a et de $\Delta>0$, il y a donc six tableaux de signes différents :

$\Delta>0$:

	x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$a>0$	$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
	x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$a<0$	$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\Delta=0$:

	x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$a>0$	$f(x)$		$+$	0	$+$	
	x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$a<0$	$f(x)$		$-$	0	$-$	

$\Delta<0$:

	x	$-\infty$		$+\infty$
$a>0$	$f(x)$		$+$	
	x	$-\infty$		$+\infty$
$a<0$	$f(x)$		$-$	

c. Somme et produit des racines

Propriété 1.4 (somme et produit) Lorqu'un trinôme ax^2+bx+c admet deux racines x_1 et x_2, soit lorsque $\Delta>0$, on a :

$$\text{somme : } x_1+x_2=\frac{-b}{a} \qquad \text{produit : } x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Démonstration Les racines s'écrivent, quand elles existent, $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
Leur somme S vaut $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$, et leur produit P vaut $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$

Remarques :

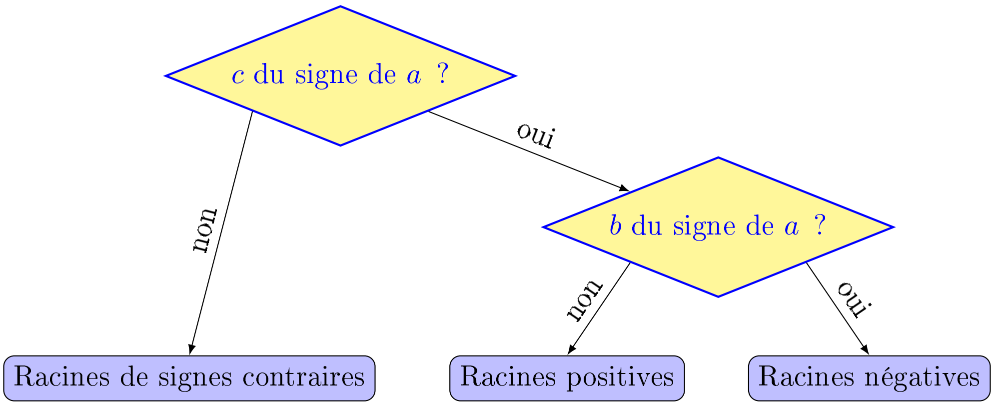
- Cette propriété s'applique également dans le cas d'une racine double (on la compte alors deux fois). Il suffit de remplacer Δ par 0 dans la démonstration précédente. Le trinôme $4x^2+4x+1$, par exemple, a une racine double qui est $\frac{-1}{2}$ (sa forme factorisée est $(2x+1)^2$). La somme des racines est alors le double de $\frac{-1}{2}$, soit -1 et $\frac{-b}{a}=\frac{-4}{4}=-1$. Le produit des racines est alors le carré de $\frac{-1}{2}$, soit $\frac{1}{4}$ et $\frac{c}{a}=\frac{1}{4}$.
- Cette propriété permet, connaissant une des racines, de déterminer facilement l'autre (sans calculer Δ). Le trinôme $9x^2-5x-4$, par exemple, a une racine évidente qui est 1 puisqu'il s'annule pour $x=1$ ($9\times 1^1-5\times 1-4=9-5-4=0$). L'autre racine est donnée par le produit (car $x_1x_2=x_2$ dans le cas où $x_1=1$). C'est $\frac{c}{a}=\frac{-4}{9}$.

Propriété 1.5 (équation connaissant S et P) Lorsqu'on connait la somme S et le produit P de deux nombres, alors ces deux nombres sont les solutions de l'équation $x^2-Sx+P=0$

Démonstration Les racines d'un trinôme se notent, quand elles existent, x_1 et x_2. Écrivons l'équation qui traduit le fait que x_1 et x_2 sont solutions d'une équation polynomiale de degré 2 : $(x-x_1)(x-x_2)=0$. Développons et réduisons le membre de gauche : $x^2 - x_1x - xx_2 + x_1x_2 = 0$, soit $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$. Remplaçons x_1+x_2 par S et x_1x_2 par P. On obtient l'équation de l'énoncé $x^2 - Sx + P = 0$.
On aurait aussi pu appliquer la propriété 1.4 avec $a = 1$: la somme des racines de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$ est S (car $\frac{-b}{a} = \frac{-b}{1} = -b = S$) et leur produit est P (car $\frac{c}{a} = \frac{c}{1} = c = P$).

Exemple 11 – Existe-t-il deux nombres a et b tels que $a + b = 100$ et $ab = 25$?
D'après la propriété 1.5, ces nombres, s'ils existent, sont solutions de l'équation $x^2 - 100x + 25 = 0$. Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = 100^2 - 4 \times 25 = 10000 - 100 = 9900 > 0$. Il y a donc deux solutions $a = \frac{100-\sqrt{9900}}{2}$ et $b = \frac{100+\sqrt{9900}}{2}$, soit $a = 50 - 15\sqrt{11} \approx 99,75$ et $b = 50 + 15\sqrt{11} \approx 0,25$.

Étude du signe des racines :
Le produit des racines est du signe de $\frac{c}{a}$, mais aussi de ac. Si $ac > 0$ (c est du signe de a), alors les racines ont même signe ; celui-ci est donné par le signe de la somme $\frac{-b}{a}$, qui est aussi celui de $-ab$. Quand $ac > 0$, si $ab > 0$ (b est du signe de a), alors les racines sont négatives, sinon elles sont positives. Ces considérations conduisent à l'algorithme suivant (on se place dans l'hypothèse de l'existence de racines, donc d'un $\Delta > 0$) :



On peut observer qu'il y a huit configurations différentes selon les signes de a, b et c. Dans la moitié de ces configurations, les racines ont des signes différents. Les racines sont positives si $a > 0$, $b < 0$ et $c > 0$ ou $a < 0$, $b > 0$ et $c < 0$ et elles sont négatives si $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$ ou $a < 0$, $b < 0$ et $c < 0$.

d. Utilisation de la calculatrice ou de l'ordinateur

Graphique :

On peut contrôler les résultats précédents (existence de racines, signe du trinôme) graphiquement avec la calculatrice en mode graphique. Il faut, tout d'abord, entrer l'expression de la courbe dans le module de saisie (par exemple $Y1 = 2x^2 + 3x - 5$). Tracer la courbe en utilisant le bouton approprié (GRAPH ou autre). Si le résultat n'est pas satisfaisant, il faut sans doute modifier les paramètres de la fenêtre d'affichage (généralement Xmin, Xmax, Ymin, Ymax, se référer au manuel du constructeur).
Pour estimer les abscisses des points où la courbe représentative de la fonction coupe l'axe (Ox), on aura peut-être aussi besoin de régler la graduation de l'axe (STEP ou autre). Cette méthode est rapide et efficace mais attention, elle ne donne la plupart du temps que des **résultats approchés**.
Sur un ordinateur, on utilisera un logiciel tel que GeoGebra : l'équation est entrée dans la ligne de commande (par exemple $y = 2x^2 + 3x - 5$). Les points d'intersection créés (ils sont nommés A et B), on peut lire leur abscisse dans la « fenêtre algèbre » (dans notre exemple, on lira $x_A = -2.5$ et $x_B = 1$).

Programmation :

Programmons la calculatrice pour qu'elle affiche le discriminant et les éventuelles racines (approchées si le nombre a trop de décimales pour être affiché en entier – s'il est irrationnel en particulier) d'un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$.
Notez que la plupart des calculatrices de Lycée disposent maintenant d'un mode de résolution des équations qui donne ces racines. Cette programmation n'a donc qu'un intérêt limité.
L'algorithme simple proposé se traduit en programme, selon le langage informatique utilisé (Basic pour Casio ou TI, Python pour Numworks). Le Python d'un ordinateur et celui d'une Numworks étant assez proches, on ne donne que la version calculatrice (copiée du Workshop de Numworks).

Algorithme

Lire a, b et c
$d = b^2 - 4ac$
Afficher d
Si $d < 0$ alors afficher "PAS DE SOLUTION"
Sinon
  Si $d = 0$ alors afficher $-b/(2a)$
  Sinon afficher $(-b - \sqrt{d})/(2a)$ puis afficher $(-b + \sqrt{d})/(2a)$
  Fin du Si
Fin du Si

Programme en Python pour une Numworks

```
from math import *
def racines(a,b,c):
  delta = b*b-4*a*c
  print("delta=",delta)
  if delta == 0:
    print("x0=",-b/(2*a))
  elif delta > 0:
    print("x1=",(-b-sqrt(delta))/(2*a))
    print("x2=",(-b+sqrt(delta))/(2*a))
  else:
    print("pas de solution reelle")
```

```
deg            PYTHON
>>> from second_degre import *
>>> racines(1,-100,25)
delta= 9900
x1= 0.2506281446690011
x2= 99.74937185533101
>>> racines(2,3,-5)
delta= 49
x1= -2.5
x2= 1.0
>>> racines(1,1,1)
delta= -3
pas de solution reelle
>>>
```

Pour une Casio

```
"A"?→ A
"B"?→ B
"C"?→ C
B^2-4AC→ D
D ◢
If D<0
Then "PAS DE SOLUTION"
Else
If D=0
Then -B/(2A) ◢
Else (-B-√D)/(2 A) ◢
(-B+√D)/(2A) ◢
EndIf
EndIf
```

Pour une TI

```
Prompt A,B,C
B^2-4AC→D
Disp D
If D<0
Then
Disp "PAS DE SOLUTION"
Else
If D=0
Then
Disp -B/(2A)
Else
Disp (-B-√D)/(2A)
Disp (-B+√D)/(2A)
End
End
```

3. Les polynômes

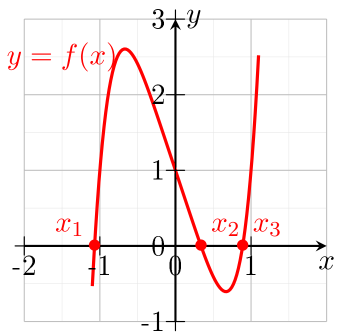
a. Définition

DÉFINITION 1.3 (POLYNÔME) On appelle polynôme de degré n toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, où les nombres $a_k, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ sont des réels tels que $a_n \neq 0$. Les nombres a_k sont les coefficients d'ordre k, le coefficient d'ordre n (le seul qui ne doit pas être nul) est appelé coefficient dominant.

Remarques :

- Le terme a_kx^k d'une expression polynomiale est un monôme de degré k. Ceci explique les termes : polynôme pour une somme de plusieurs monômes et trinôme pour une somme de trois monômes, donc pour un polynôme de degré 2. En toute rigueur, être une somme de trois monômes n'est pas équivalent à être un polynôme de degré 2. Le polynôme $5x^4 - 3x^2 + 1$ est un « trinôme » puisqu'il comporte trois monômes, mais ce n'est pas un polynôme de degré 2. L'expression correcte pour désigner un polynôme de degré 2 est trinôme de degré 2, mais l'usage dans ce cas, s'il n'y a pas d'ambiguïté, est de parler de trinôme, sans précision du degré.
- Les fonctions affines sont des polynômes de degré 1 et les fonctions constantes (non nulle) des polynômes de degré 0. Il ne vient à personne l'idée de désigner un polynôme de degré 1 de binôme (trop ambigu), ni même de binôme de degré 1 (trop compliqué). La fonction nulle $x \mapsto 0$ n'est pas un polynôme selon la définition 1.3 puisque le coefficient de degré 0 est alors nul. Cependant, on l'admet généralement sous l'appellation de « polynôme nul » et on lui attribue le degré arbitraire $-\infty$

EXEMPLE 12 – $f : x \longmapsto 3x^5 - 3x + 1$ est un polynôme de degré 5. Son coefficient dominant est 3 ; son coefficient d'ordre 0 (on dit aussi « terme constant ») est 1 ; le coefficient d'ordre 1 est -3 ; les autres coefficients sont nuls. On peut calculer quelques images par f, comme $f(0) = 1$ (celui-là est facile à calculer), $f(1) = 3-3+1 = 1$ ou $f(-1) = -3+3+1 = 1$. On peut aussi tracer la courbe de f (une portion) avec la calculatrice, constater que le polynôme $3x^5 - 3x + 1$ a trois racines réelles $x_1 \approx -1,07014$, $x_2 \approx 0,33773$ et $x_3 \approx 0,88918$ et même donner le signe du polynôme en fonction de ses racines : $f(x) \geqslant 0 \iff x \in [x_1; x_2] \cup [x_3; +\infty]$.



Limites de cette étude :

Pour l'étude des variations de ces fonctions, voir le chapitre sur la dérivée.
La détermination des racines d'un polynôme de degré supérieur à 2 n'est possible que dans certains cas que nous allons envisager ici. Il existe bien des formules pour les degrés 3 et 4, mais elles sont compliquées et largement en dehors du programme. Si on peut se contenter de valeurs approchées, la méthode de dichotomie étudiée en seconde fait très bien l'affaire. La calculatrice sait généralement résoudre ces équations de façon approchée.

b. Propriétés

THÉORÈME 1.5 (POLYNÔMES ÉGAUX) Voici trois propositions vraies et équivalentes :

(i) Deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si ils ont même degré n et que les coefficients d'ordre $k \leqslant n$ sont égaux deux à deux.

(ii) La fonction $f : x \mapsto a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ est la fonction nulle si et seulement si les coefficients $a_k, k \leqslant n$ sont tous nuls.

(iii) L'écriture du polynôme $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ est unique.

DÉMONSTRATION Démontrons la partie directe de (ii) par récurrence sur le degré n.
La proposition est évidemment vraie pour $n = 0$. Il est facile de montrer qu'elle est vraie pour $n = 1$: Si, $\forall x \in \mathbb{R}, a_1 x + a_0 = 0$, alors ce doit être vrai pour $x = 0$, ce qui s'écrit $a_1 \times 0 + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0$. Donc, on a $\forall x \in \mathbb{R}, a_1 x = 0$. Comme ce doit être vrai pour $x = 1$, on a $a_1 \times 1 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0$.
Supposons que la propriété (ii) soit vraie pour n. Montrons qu'alors elle est vraie pour $n + 1$.
Considérons pour cela la fonction g :

$$g(x) = b_{n+1}x^{n+1} + b_n x^n + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \text{ avec } b_{n+1} \neq 0$$

Cette fonction est nulle ssi $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$. Pour $x = 0$, cela conduit à $a_0 = 0$ (comme au degré 1).
On peut alors mettre x en facteur : $g(x) = x(b_{n+1}x^n + b_n x^{n-1} + \cdots + b_2 x + b_1)$. Mais comme $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$, pour $x \neq 0$ il faut bien que l'expression $h(x) = b_{n+1}x^n + b_n x^{n-1} + \cdots + b_2 x + b_1$ soit nulle. Or, par hypothèse, une fonction polynomiale de degré n telle que h , si elle est toujours nulle, ce qui est le cas, doit avoir tous ses coefficients nuls. On en déduit que les b_k coefficients de g sont tous nuls, ce qui achève la récurrence (je passe sur le léger problème en $x = 0$ qui se résout par un argument de continuité des polynômes).
Pour la réciproque de (ii), c'est une évidence : si tous les coefficients sont nuls, alors la fonction est nulle.
Montrons que (i) et (ii) sont équivalentes. L'égalité entre deux expressions polynomiales s'écrit :

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

Dans cette égalité, nous ne supposons pas que les polynômes sont de degré n, certains coefficients a_k ou b_k peuvent être nuls. En faisant tout passer dans le même membre et en réduisant, on obtient :

$$(a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_2 - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0$$

Nous avons là une fonction toujours nulle qui, d'après (ii), doit avoir tous ses coefficients nuls. Par conséquent : $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, a_k - b_k = 0 \Leftrightarrow a_k = b_k$. Les coefficients des deux fonctions sont égaux, le dernier coefficient non nul est le coefficient dominant qui indique le degré de ces polynômes.
Montrons que (i) et (iii) sont équivalentes. S'il existait deux expressions polynomiales distinctes mais égales en tout point de $\mathbb{R}$, on serait dans le cas de la propriété (i). Mais, on l'a vu, cela entraîne l'égalité de tous les coefficients. L'hypothèse est donc à rejeter, l'écriture polynomiale est unique.

EXEMPLE 13 – Déterminons les valeurs de a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{-3x^2-2x+3}{x^2+1} = a + \frac{bx+c}{x^2+1}$.
Comme $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$ l'équation est équivalente à
$\frac{-3x^2-2x+3}{x^2+1} = \frac{a(x^2+1)+bx+c}{x^2+1} \Longleftrightarrow -3x^2 - 2x + 3 = a(x^2 + 1) + bx + c \Longleftrightarrow -3x^2 - 2x + 3 = ax^2 + bx + a + c$
D'après le théorème 1.5, les coefficients de même rang de ces deux trinômes doivent être égaux.

$$\begin{cases} -3 = a \\ -2 = b \\ 3 = a + c \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \\ c = 3 - a = 6 \end{cases}$$

Notations :
- Le degré d'un polynôme P sera noté $deg(P)$.
- La notation employée pour l'écriture développée d'un polynôme utilise un même motif $a_k x^k$, répété pour k allant de 1 à $n = \deg(P)$. On peut alors faire usage d'une notation synthétique où la lettre Σ (sigma) signifie qu'on fait une somme (k est alors une variable dite « muette ») :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Propriété 1.6 (somme et produit) Soient P et Q deux polynômes et k un réel :

- Le produit kP, défini par $k \times P(x)$, est un polynôme de degré égal à celui de P.
- Le produit PQ, défini par $P(x) \times Q(x)$, est un polynôme de degré égal à la somme des degrés de P et de Q, soit $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
- La somme $P + Q$, définie par $P(x)+Q(x)$, est un polynôme de degré inférieur ou égal au plus grand des degrés de P et de Q, soit $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Démonstration Notons $n = \deg(P)$, $m = \deg(Q)$, a_k les coefficients de P et b_k ceux de Q.
Le produit par un réel ne modifie évidemment pas le degré, soit $\deg(kP) = \deg(P)$, car :

$$k \times P(x) = k \times \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (ka_k) x^k$$

Le produit de deux polynômes est plus difficile à établir puisque chacun des termes de l'un est multiplié par ceux de l'autre. Dans l'écriture ci-dessous nous n'avons écrit que le début et la fin de ce développement. Le terme de plus haut degré a pour coefficient $a_n \times b_m \neq 0$ et pour degré $m + p$. Le terme constant est $a_0 \times b_0$.

$$P(x) \times Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \times \sum_{k=0}^{m} b_k x^k = a_n x^n \times b_m x^m + \cdots + a_0 \times b_0 = (a_n \times b_m) x^{m+p} + \cdots + a_0 \times b_0$$

Pour la somme, deux cas se présentent :
(i) Les degrés de P et Q sont égaux ($n = m$). Dans ce cas, le terme de plus haut degré « potentiel » est $(a_n + b_n)x^n$. Si $a_n + b_n \neq 0$, alors le polynôme $P + Q$ a pour degré n, mais si $a_n + b_n = 0$ alors le degré de $P + Q$ est strictement inférieur à n.

$$P(x) + Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$$

(ii) Les degrés de P et Q ne sont pas égaux. Supposons, quitte à intervertir P et Q, que $n > m$. Dans ce cas, le degré de $P + Q$ est n, c'est-à-dire bien $\max(\deg(P), \deg(Q))$.

Exemple 14 – $P(x) = x^2 - x + 3$, $Q(x) = -2x^3 + x + 5$. Quels sont les degrés de $P + Q$ et de PQ ?
D'après la propriété 1.6, le degré de $P + Q$ est 3 car $\deg(P) = 2$, $\deg(Q) = 3 > 2$.
On peut donner, pour vérification, le polynôme somme : $(P + Q)(x) = -2x^3 + x^2 + 8$.
Pour le produit, d'après la propriété 1.6, le degré de PQ est $3 + 2 = 5$. On peut, aussi pour vérifier, développer ce produit. Ci-dessous, nous avons écrit directement la réduction. Pour cela, il faut déterminer les coefficients de chacun des monômes, dans l'ordre des degrés. Le monôme de degré 4, par exemple, ne peut venir que du produit de termes de degrés 0 et 4 (il n'y en a pas), 1 et 3 (il y a $-x$ et $-2x^3$) ou 2 et 2 (il n'y en a pas).

$$(PQ)(x) = -2x^5 + 2x^4 + (1 - 6)x^3 + (5 - 1)x^2 + (-5 + 3)x + 15 = -2x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 2x + 15$$

Comme on fait facilement des erreurs dans un tel développement, il peut être judicieux de vérifier avec un logiciel de calcul formel comme GeoGebra : Entrer dans le module de calcul formel (Affichage>Calcul formel), taper l'expression à développer et cliquer sur le bouton « Développer » qui se présente comme ça :(()). Le résultat est immédiat (et ne comporte pas d'erreur).

c. Factorisation

Définition 1.4 (racine) Soit P un polynôme et a un réel. Le nombre a est une racine de P (on dit aussi un « zéro » de P) si et seulement si $P(a) = 0$.

Exemple 15 – Montrer que le polynôme $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ admet pour racines 1, 2 et 3.

$f(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$ donc 1 est racine de f.

$f(2) = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$ donc 2 est racine de f.

$f(3) = 27 - 54 + 33 - 6 = 0$ donc 3 est racine de f.

Exemple 16 – Le polynôme $g(x) = 5x^4 + 6x^2 + 3$ n'admet pas de racine, car $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geqslant 3 > 0$.

Propriété 1.7 (factorisation par $(x-a)$) Un polynôme P admet un réel a comme racine si et seulement si on peut écrire $P(x)$ sous la forme $(x-a)Q(x)$, où Q est un polynôme de degré $\deg(P) - 1$.

Démonstration Dans le sens réciproque c'est évident : si $P(x)$ peut s'écrire sous la forme $(x-a)Q(x)$ alors $P(a) = (a-a)Q(a) = 0$, donc a est bien une racine de P.
Pour prouver le sens direct, commençons par établir l'identité $(\star)$, valable pour tout entier n :

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}) \qquad (\star)$$

Le développement terme à terme du membre de droite montre que les monômes de même degré s'éliminent, sauf le premier et le dernier, ce qui amène le résultat. En effet, on a :

$$(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}) = x^n+ax^{n-1}+a^2x^{n-2}+\cdots+a^{n-1}x-[ax^{n-1}+a^2x^{n-2}+\cdots+a^{n-1}x+a^n]$$

Montrons maintenant, que $P(x) - P(a)$ se factorise par $x - a$. Dans la suite d'égalités ci-dessous, la dernière vient du fait que $a_0(x^0 - a^0) = 0 \times a_0 = 0$:

$$P(x) - P(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k a^k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - a^k) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x^k - a^k)$$

Or, l'identité $(\star)$ établit que chacun des termes $a_k(x^k - a^k)$ peut se factoriser par $(x-a)$, du fait du facteur $x^k - a^k$ qui peut s'écrire $(x-a)Q_k(x)$, où $Q_k(x)$ est un polynôme de degré $k-1$. La somme de tous ces termes est donc factorisable par $(x-a)$ (l'autre facteur est la somme des polynômes Q_k).

Exemple 17 – Montrer que polynôme $h(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 4$ admet 4 pour racine. En déduire une factorisation de h, puis montrer que 4 est la seule racine de h.
$h(4) = 64 - 48 - 12 - 4 = 0$ donc 4 est bien une racine de h.
D'après la propriété 1.7, la factorisation qui s'en déduit est $h(x) = (x-4)(ax^2 + bx + c)$, où a, b et c sont des coefficients à déterminer.
Développons ce produit : $h(x) = ax^3 + (-4a + b)x^2 + (-4b + c)x - 4c$. Selon le théorème 1.5, on peut alors identifier les coefficients :

$$\begin{cases} a = 1 \\ -4a + b = -3 \\ -4b + c = -3 \\ -4c = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 4a - 3 = 4 - 3 = 1 \\ c = 4b - 3 = 4 - 3 = 1 \end{cases}$$

La dernière égalité permet de vérifier les résultats : $c = -4 \div (-4) = 1$. Il y a toujours une égalité de plus que de coefficients à déterminer du fait qu'un polynôme de degré n possède $n+1$ coefficients.
Finalement, on a $h(x) = (x-4)(x^2 + x + 1)$.
Le facteur du second degré que l'on vient de trouver n'a pas de racine car son discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Le polynôme h n'a donc qu'une seule racine réelle.

Méthode (recherche d'une racine évidente)

➲ La méthode des « coefficients indéterminés » :

Les exemples 13 et 17 appliquent une méthode qui découle du théorème 1.5. Cette méthode s'applique partout où deux polynômes sont égaux. Elle sera donc particulièrement utile pour factoriser un polynôme du moment qu'on peut en identifier certaine(s) racine(s). Dans ce but, il peut être utile de calculer les images des petits nombres entiers 0, 1, -1, 2, -2,.... Si une de ces images est nulle, le nombre est une « racine évidente » et une factorisation s'en déduit.
Le polynôme $P(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$ a t-il des racines évidentes ?
$P(0) = 2 \neq 0$, $P(1) = 1 - 1 - 5 + 2 = -3 \neq 0$, $P(-1) = -1 - 1 + 5 + 2 = 5 \neq 0$,
$P(2) = 8 - 4 - 10 + 2 = -4 \neq 0$, $P(-2) = -8 - 4 + 10 + 2 = 0$!
Oui, -2 est une racine de P. On en déduit que $P(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$.
Sachant que la factorisation est possible, on peut se dispenser d'écrire le système avec ses 4 équations. Par identification des termes de plus haut degré, on trouve directement $a = 1$. De même, par identification des termes constants, on trouve directement $2c = 2$, donc $c = 1$. Il ne reste plus qu'à déterminer b tel que $x^3 - x^2 - 5x + 2 = (x + 2)(x^2 + bx + 1)$. Par identification du terme de degré 1 (on aurait pu choisir le terme de degré 2), on trouve que $2b + 1 = -5$ (il y a 2 termes dans le développement qui sont de degré 1), soit $b = (-5 - 1) \div 2 = -3$.
On a donc $P(x) = (x + 2)(x^2 - 3x + 1)$.
Le discriminant du 2[e] facteur est $\Delta = 9 - 4 = 5 > 0$. On en déduit que les 2 autres racines de P sont $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,382$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2,618$. Finalement, $P(x) = (x + 2)(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2})(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2})$.

Remarques finales :

- Si un polynôme à coefficients entiers a une racine entière, ce ne peut être qu'un diviseur du terme constant. En effet, si $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ s'annule pour $x = \alpha$, c'est que $a_0 = -\alpha(a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \cdots + a_2\alpha + a_1)$. Si α et les coefficients a_k sont entiers, alors a_0 est un multiple de α. Cela peut être utile pour déterminer une racine entière, même si elle n'est pas si « évidente ».
  ➥ Pour chercher des racines entières au polynôme $x^3 - 12x^2 + 37x - 6$: il suffit de chercher parmi les diviseurs de 6 (il y en a « seulement » six : 1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6).
- On démontre que les seuls polynômes à coefficients réels qui ne sont pas factorisables sont : (1) les polynômes de degré 1 et (2) les polynômes de degré 2 non factorisables ($\Delta < 0$).
  ➥ Le polynôme $x^4 + 4$ ne parait pas factorisable car il n'a pas de racine ($\forall x \in \mathbb{R}, x^4 + 4 > 0$). Pour le factoriser, on peut utiliser l'identité de Sophie Germain :

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$$

  ➥Sauriez-vous trouver la factorisation ultime de $x^7 - 3x^6 + 3x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1$?

Le coin du chercheur

❋ Soit E_n l'ensemble des polynômes de degré 2 à coefficients entiers, inférieurs ou égaux en valeur absolue à un entier n. Le polynôme $x^2 - 3x + 1$ par exemple appartient à E_3, et aussi à E_4, E_5,..., mais pas à E_2 ni à E_1.
➩ Quelle est la proportion $F(1, n)$ des polynômes de E_n qui n'ont pas de racine ?
Répondre à cette question pour les premières valeurs de n en vous aidant d'un programme.
En utilisant ce même programme, répondre aux questions suivantes :
➩ Quelle est la proportion $F(2, n)$ des polynômes de E_n qui ont des racines rationnelles (sans tenir compte de la multiplicité) ? Quelle est la proportion $F(3, n)$ des polynômes de E_n qui ont des racines irrationnelles positives ? À partir de quelle valeur de n, parmi les équations de E_n ayant 2 racines positives, y a t-il davantage de racines irrationnelles que rationnelles ?

Méthode (Fiche de révision)

Définitions et propriétés à connaître par ♥

➲ Trinôme

Forme développée	$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$
Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$
Forme canonique	$\begin{cases} f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \\ \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha) = -\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right) = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$
Sens de variation	$\begin{cases} a > 0 : \searrow \text{ puis } \nearrow, \text{ courbe « vallée ».} \\ a < 0 : \nearrow \text{ puis } \searrow, \text{ courbe « montagne ».} \end{cases}$
Maximum/minimum	Coordonnées de l'extremum : $(x = \alpha = -\frac{b}{2a}\ ;\ y = \beta = -\frac{\Delta}{4a})$
Racines **Factorisation**	$\begin{cases} \Delta < 0 : \text{pas de racine ; pas de factorisation dans } \mathbb{R} \\ \Delta = 0 : \text{une « racine double » } x_0 = -\frac{b}{2a} \\ \text{ d'où la forme factorisée } f(x) = a(x-x_0)^2 \\ \Delta > 0 : \text{deux racines, } x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ d'où la forme factorisée } f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) \end{cases}$
Étude du signe	$\begin{cases} \Delta < 0 : \text{toujours du signe de } a \\ \Delta = 0 : \text{du signe de } a \text{ mais s'annule pour } x = x_0 \\ \Delta > 0 : \text{du signe de } a \text{ « à l'extérieur des racines »} \end{cases}$
Usage des 3 formes	$\begin{cases} \text{Développée (standard) : Sert à calculer } \Delta,\ f(0), \text{ etc.} \\ \text{Canonique : Identifie l'extremum ; sert à étudier les variations} \\ \text{Factorisée : Identifie les racines ; sert à étudier le signe} \end{cases}$

➲ Polynôme

Forme développée	$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
Degré	$\deg(P) = n$ si $a_n \neq 0$ et, pour $\forall m > n\ a_m = 0$
Notation	$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
Polynômes égaux	Les coefficients de même rangs sont égaux d'où la méthode des coefficients indéterminés
Racine	a est une racine de $P \iff P(a) = 0 \iff P(x) = (x-a)Q(x)$