DS complémentaire

Calculatrice autorisée - durée : 1 heure

Exercice 1 (Sommes (5 points))

Partie1

Sachant que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ pour tout entier $n > 0$ ($n!$ est appelée factorielle de n), on pose $f(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$ pour tout x de $[0;1]$.

a) Dériver $f(x)$ et étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0;1]$.

b) Calculer $f(0)$ et exprimer $f(1)$ en fonction de n.

c) Expliquer alors pourquoi $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < e$.

Partie 2

On rappelle l'identité $(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

a) Écrire la somme $S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$ pour $x \neq 1$ sous la forme d'un quotient.

b) Dériver les deux formes de $S(x)$.

c) En déduire la valeur de $A = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \cdots + 16 \times 2^{15}$.

Exercice 2 (Famille de fonctions (5 points))

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n e^{-x}$.
On note $\mathcal{C}_{f_n}$ sa courbe représentative.

a) Étudier les variations de f_1 et déterminer les limites de f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Montrer qu'il existe deux points communs à toutes les courbes $\mathcal{C}_{f_n}$.
Déterminer les variations de f_n.

c) On note $\mathcal{T}_n$ la tangente à $\mathcal{C}_{f_n}$ au point d'abscisse 1.
Démontrer que pour $n \geqslant 2$, $\mathcal{T}_n$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\dfrac{n-2}{n-1}; 0\right)$.

BONUS (1 point) :
Pour $k \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)}$ désigne la fonction dérivée k-ième de f_n.
Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ la fonction $t \mapsto e^t f_n^{(k)}(t)$ est une fonction polynôme de degré n.

Correction de l'exercice 1 (Sommes (5 points))

$\boxed{\text{Partie1}}$

a) Dériver $f(x)$ et étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0;1]$.

$f'(x) = -\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x} + \left(\frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \cdots + \frac{nx^{n-1}}{n!}\right) e^{-x}$

$f'(x) = \left(-1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^n}{n!} + (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!})\right) e^{-x} = -\frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{x^n}{n!}e^{-x} \leqslant 0 \iff f'(x) \leqslant 0$.

b) Calculer $f(0)$ et exprimer $f(1)$ en fonction de n.

$f(0) = \left(1 + \frac{0}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \cdots + \frac{0^n}{n!}\right) e^{-0} = 1e^0 = 1$.

$f(1) = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \cdots + \frac{1^n}{n!}\right) e^{-1} = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) e^{-1}$.

c) Expliquer alors pourquoi $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < e$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \leqslant 0$ donc f est strictement décroissante sur $[0;1]$ or $f(0) = 1$.

Donc $f(1) < 1$ par conséquent $\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) e^{-1} < 1 \iff 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < \frac{1}{e^{-1}}$.

Comme $\frac{1}{e^{-1}} = e^1$, on a donc bien $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < e$.

$\boxed{\text{Partie2}}$

a) Écrire la somme $S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$ pour $x \neq 1$ sous la forme d'un quotient.

Comme $x^{n+1} - 1 = (x-1)(x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1)$, on a $S(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

b) Dériver les deux formes de $S(x)$.

D'une part on a $S'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$ (en dérivant la forme de l'énoncé).

D'autre part, $S'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{((n+1)x^n-1)(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$ (en dérivant la forme $S(x) = \frac{u}{v}$ obtenue).

c) En déduire la valeur de $A = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \cdots + 16 \times 2^{15}$.

$A = S'(2)$ pour $n = 16$ d'où $A = \frac{16 \times 2^{17} - 17 \times 2^{16} + 1}{1} = 15 \times 2^{16} + 1 = 943\,041$

Correction de l'exercice 2 (Famille de fonctions (5 points))

a) $f_1(x) = xe^{-x}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$.

$f_1(x) = (1-x)e^{-x}$.

f_1 croissante sur $]-\infty;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$.

b) Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $n \neq m$.

$f_n(x) = f_m(x) \iff x^n e^{-x} = x^m e^{-x} \iff x^n = x^m \iff (x = 0)$ ou $(x = 1)$.

Toutes les courbes $\mathcal{C}_{f_n}$ passent par $O(0;0)$ et $A\left(1;\frac{1}{e}\right)$.

Soient $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}$. $f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$.

Si n est impair :

x	$-\infty$		n		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{n^n}{e^n}$	$\searrow$	0

Si n est pair :

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{n^n}{e^n}$	$\searrow$	0

c) $\mathcal{T}_n : y = (n-1)e^{-1}(x-1) + e^{-1}$

$0 = (n-1)e^{-1}(x-1) + e^{-1} \iff 0 = (n-1)(x-1) + 1 \iff x - 1 = -\dfrac{1}{n-1} \iff x = \dfrac{n-2}{n-1}$

BONUS (1 point) :
Il faut faire ici un raisonnement par récurrence.
$f_n^{(0)} = f_n$, $f_n^{(1)} = f_n'$ et $f_n^{(2)} = f_n''$, plus généralement, $f_n^{(k+1)}$ est la fonction dérivée de $f_n^{(k)}$.
On veut démontrer la propriété $P(k)$, la fonction $t \mapsto e^t f_n^{(k)}(t)$ est une fonction polynôme de degré n.
Le raisonnement par récurrence va se faire sur la variable $k \in \mathbb{N}$. On pose $\forall k \in \mathbb{N}, g_k(t) = e^t f_n^{(k)}(t)$
Initialisation :
Pour $k = 0$,

$$\begin{aligned} g_0(t) &= e^t f_n^{(0)}(t) \\ &= e^t t^n e^{-t} \\ &= e^t e^{-t} t^n \\ &= t^n \end{aligned}$$

Donc g_0 est bien une fonction polynôme de degré n et $P(0)$ est vraie.
Hérédité :
On suppose que $P(k)$ est vraie pour un certain k, on va démontrer que $P(k+1)$ est vraie sachant que $P(k)$ est vraie.
On sait donc que g_k est une fonction polynôme de degré n et que $g_{k+1}(t) = e^t f_n^{(k+1)}(t)$.
Comme $g_k(t) = e^t f_n^{(k)}(t)$ la fonction g_k est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables. On va dériver la fonction g_k :

$$\begin{aligned} & g_k'(t) = e^t f_n^{(k)}(t) + e^t f_n^{(k+1)}(t) \\ \iff \quad & g_k'(t) = g_k(t) + g_{k+1}(t) \\ \iff \quad & g_{k+1}(t) = g_k'(t) - g_k(t) \end{aligned}$$

Or $g_k(t)$ est un polynôme de degré n, donc $g_k'(t)$ est un polynôme de degré $n-1$.
On en déduit que $g_k'(t) - g_k(t)$ est un polynôme de degré n et donc que $g_{k+1}(t)$ est aussi un polynôme de degré n.
La propriété $P(k+1)$ est vraie sachant que $P(k)$ est vraie.
Par récurrence, la propriété $P(k)$ est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.