

EXERCICE 1 (LIMITES ET ASYMPTOTES)

a) Quelle est la limite de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2-4x+1}{2x+1}$ quand x tend vers $+\infty$?
 Déterminer les réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{2x+1}$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.
 Déterminer la limite de $f(x) - (ax + b)$ quand x tend vers $+\infty$ puis en déduire le comportement asymptotique de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
 Tracer $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = ax + b$ pour $x \in [0; 10]$ afin de visualiser ce comportement.

b) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.
 Quelle est la limite de g et celle de $g(x) - x - 1$ quand x tend vers $+\infty$?
 En déduire le comportement asymptotique de $\mathcal{C}_g$ au voisinage de $+\infty$.
 Tracer $\mathcal{C}_g$ et son asymptote oblique pour $x \in [0; 5]$ afin de visualiser ce comportement.

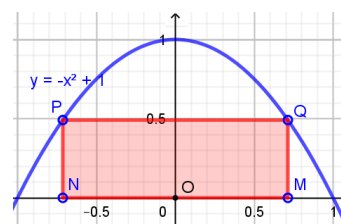
EXERCICE 2 (POLYNÔME ET OPTIMISATION)

Dans la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 1 - x^2$ avec $y \geq 0$, on inscrit le rectangle $MNPQ$ tel que M et N soient sur (Ox) , P et Q sur $\mathcal{P}$ (voir figure). On cherche les dimensions du rectangle d'aire maximale.

- a) En notant x l'abscisse de M , expliciter les dimensions du rectangle et son aire notée $\mathcal{A}(x)$, puis donner un argument qui justifie que $\mathcal{A}$ admet un maximum sur $]0; 1[$.
 b) Soit x_0 un réel de $]0; 1[$. Déterminer le polynôme P tel que :

$$\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x_0) = (x - x_0)P(x)$$

 c) Supposons que le maximum de $\mathcal{A}$ soit atteint pour la valeur x_0 . Justifier alors pourquoi on doit avoir $P(x_0) = 0$.



En déduire la valeur de x_0 , puis les dimensions et l'aire du rectangle d'aire maximale.

EXERCICE 3 (VITESSE ET TANGENTE)

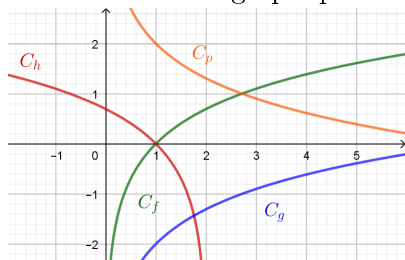
Un corps en chute libre, lâché sans vitesse initiale, a parcouru au bout de t secondes la distance $d(t)$ exprimée en mètres par $d(t) = 5t^2$.

- a) Soit h un réel positif, calculer la vitesse moyenne entre les instants t_0 et $t_0 + h$.
 Expliquer alors cette phrase « la vitesse instantanée à l'instant t_0 est égale à $10t_0$ m/s ».
 b) Un corps est lâché sans vitesse initiale d'une altitude de 25 m.
 Quelle est, en m/s puis en km/h, sa vitesse d'impact au sol ?
 c) Tracer la courbe $\mathcal{C}_d$ de la fonction $d : t \mapsto 5t^2$ pour $t \in [0; 1, 5]$.
 M_0 et M_h étant les points d'abscisse t_0 et $t_0 + h$ de la courbe de la fonction d , calculer le coefficient directeur de la droite (M_0M_h) puis celui de la tangente à $\mathcal{C}_d$ en M_0 .
 Déterminer ensuite l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_d$ en M_0 pour $t_0 = 0,5$ puis pour $t_0 = 1$.
 Tracer ces deux tangentes sur la figure.

EXERCICE 4 (DÉDUCTION ET COMPOSITION)

a) Les courbes ci-dessous représentent des fonctions f, g, h et p .

En vous aidant du graphique et de vos connaissances, exprimer $g(x)$, $h(x)$ et $p(x)$ à l'aide de $f(x)$.



b) La fonction φ est paire, la fonction F est quelconque.
 Montrer que si la fonction $F \circ \varphi$ est définie en x alors elle est également définie en $-x$. En déduire que $F \circ \varphi$ est paire.
 La fonction G étant définie par $G : x \mapsto \frac{1-2\cos x}{1+3\cos^2 x}$, identifier les fonctions φ et F telles que $G = F \circ \varphi$ avec φ paire et en déduire que G l'est aussi.

c) Soient f et g deux fonctions affines, Δ , $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ trois droites distinctes d'équations :

$$\Delta : y = x, \mathcal{D} : y = ax + b = f(x) \text{ et } \mathcal{D}' : y = a'x + b' = g(x)$$

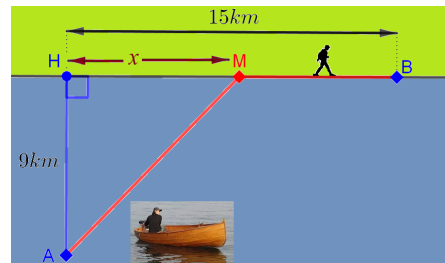
Montrer que si $f \circ g = g \circ f$ alors les droites Δ , $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont concourantes ou parallèles.

(indication : distinguer les cas $a = a'$ et $a \neq a'$ et rechercher dans ce dernier cas les abscisses de $\Delta \cap \mathcal{D}$ et $\Delta \cap \mathcal{D}'$)

EXERCICE 5 (MINIMISER UN TRAJET - 5 POINTS)

Le gardien d'un phare (situé en A) doit rejoindre d'urgence son véhicule sur la côte (situé en B). Il se déplace en canot à moteur sur la mer à la vitesse de 4 km/h et à pied sur la côte à la vitesse de 5 km/h . La question est de déterminer où il doit accoster (le point M) pour que la durée de son trajet AMB soit minimale.

- a) On convient de noter H le projeté orthogonal de A sur la côte supposée rectiligne (BM) et on pose $x = HM$. Sachant que $HA = 9 \text{ km}$ et que $HB = 15 \text{ km}$, montrer que la durée du trajet AMB est $d(x) = \frac{\sqrt{x^2+81}}{4} + \frac{15-x}{5}$.
- b) Dériver d , étudier le signe de $d'(x)$ pour $x \in [0; 15]$ (penser à l'expression conjuguée), dresser le tableau de variation de d et conclure.
Donner la durée minimale du trajet en h et min .



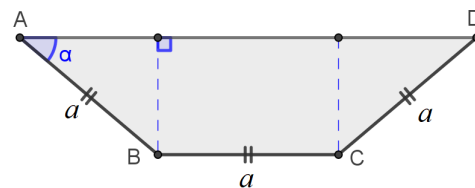
- c) Combien de minutes perd le gardien s'il utilise son vieux canot allant seulement à 3 km/h ?
(Déterminer la nouvelle expression de $d(x)$ et refaire l'étude de la question b jusqu'à obtenir la durée minimale)

EXERCICE 6 (MAXIMISER UN TRAPÈZE - 5 POINTS)

Le trapèze $ABCD$ ci-contre est tel que $AB = BC = CD = a$ (a est un réel positif donné).

La question est de déterminer l'angle $\alpha = \widehat{BAD} = \widehat{ADC}$ qui maximise l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du trapèze.

- a) Déterminer $\mathcal{A}(\alpha)$ pour $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$.
- b) Dériver $\mathcal{A}$ (on obtient un trinôme en $\cos \alpha$).
- c) Déterminer les racines de ce trinôme ; en déduire la valeur α_0 de $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ qui annule $\mathcal{A}'(\alpha)$.



- d) Dresser le tableau de variation de $\mathcal{A}$ après avoir justifié les signes de $\mathcal{A}'(\alpha)$.
Conclure en donnant l'aire maximale du trapèze.

EXERCICE 7 (DÉRIVATIONS DIVERSES - 5 POINTS)

- a) La ficelle :

Une ficelle de longueur 1 m est coupée en deux morceaux : avec le 1^{er} on réalise un carré de côté x et avec le 2^e un cercle. Déterminer l'aire totale $\mathcal{A}(x)$ minimale des deux formes.

Bien entendu, il faut faire cela par étapes : périmètre du cercle, aire du disque, aire totale, dérivée, signe

- b) Algorithme :

Sachant que $a > 0$, b et c sont des réels, mettre au point un programme qui affiche les coordonnées $(x_0; y_0)$ de l'extrémum éventuel de la fonction $F : x \mapsto \frac{ax^2+b}{x+c}$ pour $x > -c$ et qui annonce « minimum » ou « maximum » selon la nature de cet extrémum.

Dans le cas où il n'y a pas d'extrémum, le programme affiche le sens de variation de F .

Lancer ce programme sur les cas $(a, b, c) = (1, -1, 2)$ et $(a, b, c) = (1, -2, 1)$.

EXERCICE 8 (MINIMUM)

On se propose d'étudier le minimum de $E(a, b) = \sqrt{a+b} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right)$ où a et b sont des réels strictement positifs. On pose $x = \frac{b}{a}$.

- a) Montrer que $E(a, b) = f(x)$ où $f(x) = \sqrt{x+1} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$
- b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ et montrer qu'elle admet un minimum égal à m pour $x = x_0$ où m et x_0 sont des réels à déterminer.
- c) En déduire le minimum de $E(a, b)$ et les valeurs de (a, b) pour lesquelles ce minimum est atteint.

EXERCICE 9 (EXPONENTIELLES- 5 POINTS)

a) Étudier les variations de la fonction $f_k : x \mapsto e^{-kx^2}$ où k est un réel positif fixé.
indication : montrer que f_k est paire ; étudier ses variations sur $\mathbb{R}^+$ à l'aide de la dérivée.

b) Montrer que $e^x \geq x$ pour tout réel x .

indication : étudier les variations de $f : x \mapsto e^x - x$.

Soit $x > 0$, appliquer l'inégalité précédente au réel $\frac{x}{2}$ puis élever cette inégalité au carré.

Déduire de ce qui précède une minoration de $\frac{e^x}{x}$ lorsque $x > 0$.

Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$.

c) BONUS (2 points) :

i) Étudier les variations de la fonction $\Gamma : x \mapsto \frac{1}{2}x^2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$.

ii) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ en remarquant que l'expression peut être interprétée comme le taux d'accroissement d'une fonction f au voisinage de zéro.

Traiter deux questions au choix.

EXERCICE 10 (RADIOACTIVITÉ)

La loi d'évolution d'un corps radioactif est donnée par la formule $N_t = N_0e^{-at}$ où a est une constante positive et N_t le nombre d'atomes contenu dans un échantillon de ce corps au temps t .

1. Représenter graphiquement la fonction $t \mapsto N_t$.

2. On désigne par T le temps au bout duquel $N_T = \frac{N_0}{2}$.

Exprimer a en fonction de T . Comparer N_{t+T} à N_t .

T est appelé « demi-vie » ou « période » du corps radioactif.

3. La période du radium étant de 1622 ans, au bout de combien de temps 1g de radium perdra-t-il une masse de 1mg ?

(rappel : la masse est proportionnelle au nombre d'atomes).

4. Donner la période et le temps pour que 1g d'une substance radioactive perde 1mg pour d'autres éléments que le radium.

EXERCICE 11 (CROISSANCE D'UNE PLANTE)

Commençons par démontrer un théorème supplémentaire du cours :

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = kf(x)$ et $f(0) = A$ où A et k sont des constantes ; il s'agit de la fonction $f : x \mapsto Ae^{kx}$.

1. Démontrer le théorème en deux temps :

i) tout d'abord, montrer que la fonction f proposée vérifie bien les conditions

ii) ensuite, prouver l'unicité (cela a été fait en cours pour le cas $A = 1$ et $k = 1$).

Pour cela, supposer qu'il existe une autre fonction g qui vérifie les conditions,

puis étudier les variations de la fonction $\varphi : x \mapsto f(x)g(-x)$;

comparer la conclusion avec la valeur de $f(x)f(-x)$.

2. Au début de la croissance de certaines espèces végétales (coton, maïs, ...), on estime que le poids de la plante varie proportionnellement à lui-même. Pour une espèce donnée de coton, le poids P (en g par jour) varie en fonction de t (en jour) selon l'équation $P'(t) = 0,18P(t)$. Sachant que $P(1) = 2$, exprimer $P(t)$ en fonction de t puis calculer $P(30)$.

EXERCICE 12 (DÉRIVATION)

Dériver les fonctions f , g et h définies ci-dessous ; simplifier les expressions obtenues et préciser les ensembles de dérivabilité.

a) Fonctions polynômes :

$$f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 4x - 3 ; g(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{4} - \frac{4x}{3} - \frac{3}{2} ; h(x) = 4(3x^2 - 1)(3x^2 + 1)$$

b) Fonctions sommes :

$$f(x) = -2x^2 - x + 1 + \frac{2}{x} ; g(x) = 2\sin(x) - 3\cos(x) ; h(x) = \sqrt{x} - x$$

c) Fonctions produits :

$$f(x) = (2x^3 + 3x - 1)(3x^2 + 2x + 1) ; g(x) = \sqrt{x}(x^2 + x + 1) ; h(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{2}e^x$$

d) Fonctions quotients :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} ; g(x) = \frac{\sin(x) - 1}{\cos(x) - 1} ; h(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{x}}$$

e) Fonctions composées :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} ; g(x) = (x^3 - 1)^2 ; h(x) = \frac{e^{x^2 - 1}}{2}$$

f) Fonctions mélangées :

$$f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1} ; g(x) = \frac{e^{x-1}}{1 + e^{-2x}} ; h(x) = \tan\left(\frac{2x - \pi}{3}\right)$$

EXERCICE 13 (TABLEAU DE VARIATION)

Dériver les fonctions f définies sur l'intervalle I ci-dessous ; factoriser les expressions obtenues et dresser le tableau de signes des fonctions dérivées puis le tableau de variation des fonctions sur I .

- ♦ $f_1(x) = x^4 - 2x^2$, $I = \mathbb{R}$
- ♦ $f_2(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$
- ♦ $f_3(x) = (1-x)\sqrt{x}$, $I = \mathbb{R}^+$
- ♦ $f_4(x) = x + \frac{16}{x}$, $I = \mathbb{R}^*$
- ♦ $f_5(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$, $I = \mathbb{R}^+$
- ♦ $f_6(x) = -5e^{-2x}$, $I = \mathbb{R}$
- ♦ $f_7(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $I = \mathbb{R}^*$

EXERCICE 14 (EXTREMUM)

Préciser les extremums locaux de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I indiqué.

- ♦ $f(x) = -x^3 + x^2$, $I = \mathbb{R}$
- ♦ $f(x) = \sin(x) - x$, $I = \mathbb{R}$
- ♦ $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$, $I =]0; +\infty$
- ♦ $f(x) = (x-1)^3\sqrt{x}$, $I =]0; +\infty$

EXERCICE 15 (DÉRIVÉE DE LA DÉRIVÉE)

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : x \mapsto e^x - \frac{x^2}{2}$.

- ♦ Déterminer une expression de $f'(x)$
- ♦ Déterminer une expression de $f''(x) = (f'(x))'$ (dérivée seconde de f)
- ♦ Donner le tableau de signes de $f''(x)$
- ♦ En déduire le tableau de variation de f' ; montrer en particulier que f' admet un minimum sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera
- ♦ En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

CORRECTION DE L'EXERCICE 1 (LIMITES ET ASYMPTOTES)

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ est, à priori, une forme indéterminée $\frac{+\infty}{+\infty}$.

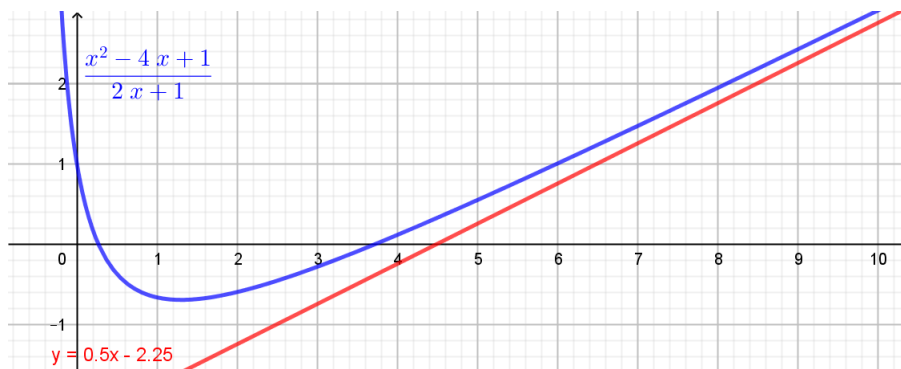
On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2}$ car une fonction rationnelle se comporte comme le rapport de ses termes dominants au voisinage de $+\infty$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Si $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{2x + 1} = ax + b + \frac{c}{2x + 1} = \frac{c + (2x + 1)(ax + b)}{2x + 1} = \frac{2ax^2 + (a + 2b)x + (b + c)}{2x + 1}$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, alors, par identification, on doit avoir $2a = 1$, $a + 2b = -4$ et $b + c = 1$ c'est-à-dire $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{-a - 4}{2} = \frac{-9}{4}$ et $c = 1 - b = \frac{13}{4}$.

On a finalement $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{9}{4} + \frac{13}{4(2x + 1)}$.

La limite de $f(x) - (\frac{x}{2} - \frac{9}{4}) = \frac{13}{4(2x + 1)}$ quand x tend vers $+\infty$ est nulle (le dénominateur tend vers $+\infty$) et le numérateur est constant). On en déduit que la droite d'équation $y = \frac{x}{2} - \frac{9}{4}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Traçons $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = \frac{x}{2} - \frac{9}{4}$ pour $x \in [0; 10]$ afin de visualiser ce comportement :



b) L'ensemble de définition de la fonction g contient les nombres x tels que $x^2 + 2x + 3 \geq 0$.

Le discriminant de $x^2 + 2x + 3 = 0$ étant $\Delta = -8 < 0$, l'inéquation est toujours vraie et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

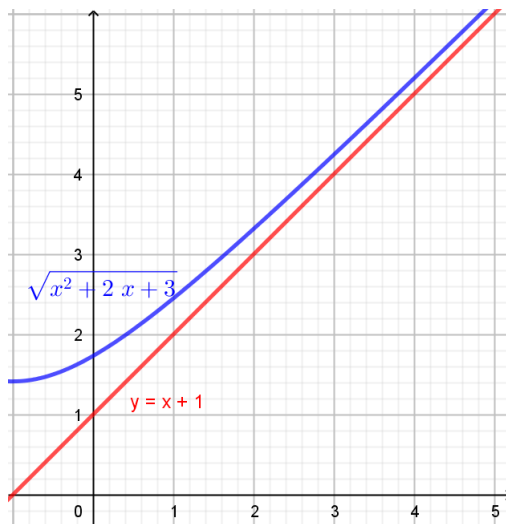
Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x + 3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, on en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - (x + 1) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - (x + 1)) (\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x + 1))}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 3 - (x + 1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x + 1)} = 0 \end{aligned}$$

L'utilisation de la quantité conjuguée a permis ici de lever l'indétermination de type $\infty - \infty$.

La droite d'équation $y = x + 1$ est donc asymptote à la courbe $\mathcal{C}_g$ au voisinage de $+\infty$.

Traçons $\mathcal{C}_g$ et la droite d'équation $y = x + 1$ pour $x \in [0; 5]$ afin de visualiser ce comportement :



CORRECTION DE L'EXERCICE 2 (POLYNÔME ET OPTIMISATION)

a) En notant x l'abscisse de M , le rectangle a pour longueur $MN = 2x$ (N a pour abscisse $-x$ à cause de la symétrie d'axe (Oy) de la figure) et pour largeur $y = 1 - x^2$ (car les ordonnées de P et Q sont les images de x et $-x$ par la fonction $x \mapsto 1 - x^2$); l'aire du rectangle est donc $\mathcal{A}(x) = 2x(1 - x^2) = -2x^3 + 2x$.

Comme $\mathcal{A}(0) = 0$ et $\mathcal{A}(1) = 0$ et comme, pour tout $x \in]0; 1[$, $\mathcal{A}(x) > 0$ (inutile d'étudier le signe du polynôme $-2x^3 + 2x$ puisqu'il s'agit de l'aire du rectangle, ce nombre est forcément positif sur l'intervalle considéré), on peut comprendre que $\mathcal{A}(x)$ admet un maximum pour $x \in]0; 1[$.

b) Soit x_0 un réel de $]0; 1[$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x_0) &= -2x^3 + 2x - (-2x_0^3 + 2x_0) \\ &= -2(x^3 - x_0^3) + 2(x - x_0) \\ &= (x - x_0)(-2(x^2 + x_0x + x_0^2) + 2) \\ &= (x - x_0)(-2x^2 - 2x_0x - 2(x_0^2 - 1))\end{aligned}$$

Avec $P(x) = -2x^2 - 2x_0x - 2(x_0^2 - 1)$, on a bien $\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x_0) = (x - x_0)P(x)$.

c) Si le maximum de $\mathcal{A}$ est atteint pour $x = x_0$, cela signifie que pour tout $x \in]0; 1[$, on a $\mathcal{A}(x) \leq \mathcal{A}(x_0)$, soit $\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x_0) \leq 0$ ou encore, d'après ce qui précède, $(x - x_0)P(x) \leq 0$.

- ♦ Si $x < x_0 \iff x - x_0 < 0$, cela signifie que $P(x) \geq 0$
- ♦ Si $x > x_0 \iff x - x_0 > 0$, cela signifie que $P(x) \leq 0$

Le polynôme P change donc de signe pour $x = x_0$, on sait que cela implique qu'il s'annule pour cette valeur : on doit avoir $P(x_0) = 0$.

Par conséquent $P(x_0) = -2x_0^2 - 2x_0^2 - 2(x_0^2 - 1) = -2x_0^2 + 2 = 0 \iff x_0 = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577$.

Les dimensions du rectangle d'aire maximale sont $2x_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ de longueur sur $1 - x_0^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ de largeur. L'aire maximale est $\mathcal{A}(x_0) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{9} \approx 0,770$.



CORRECTION DE L'EXERCICE 3 (VITESSE ET TANGENTE)

a) Soit h un réel positif, la vitesse moyenne entre les instants t_0 et $t_0 + h$ est égale à la distance parcourue entre ces deux instants divisée par la durée du parcours, soit

$$\frac{d(t_0+h) - d(t_0)}{t_0+h-t_0} = \frac{5(t_0+h)^2 - 5t_0^2}{h} = \frac{5h^2 + 10t_0h}{h} = 5h + 10t_0 \quad (\text{la simplification par } h \text{ n'est valide que si } h \neq 0).$$

Lorsque h tend vers 0 tout en restant différent de 0, la vitesse moyenne calculée tend vers $10t_0$ car $\lim_{h \rightarrow 0} 5h + 10t_0 = 10t_0$. On en déduit que $10t_0$ est ce qu'on appelle la « la vitesse instantanée à l'instant t_0 ».

Cette vitesse instantanée est bien égale, d'après ce qui précède, à $10t_0$ m/s si le temps est mesuré en secondes.

b) Si un corps est lâché sans vitesse initiale d'une altitude de 25 m, lorsqu'il arrive en contact avec le sol il a parcouru $d(t_0) = 25$ m. La durée du parcours a été t_0 que l'on détermine en écrivant :

$$d(t_0) = 25 \iff 5t_0^2 = 25 \implies t_0 = \sqrt{5}$$

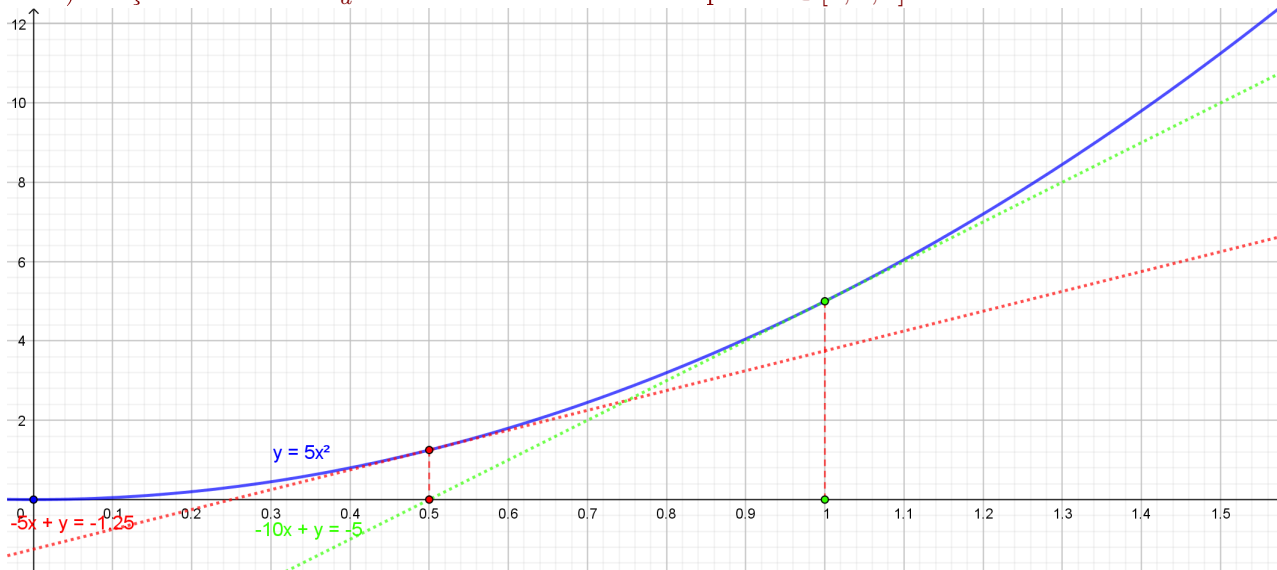
La vitesse d'impact au sol de ce corps est donc, d'après le résultat de la question a, de $10t_0$ m/s soit

$10\sqrt{5} \text{ m/s} \approx 22,36 \text{ m/s}$.

Pour convertir en km/h , il faut diviser par 1000 (car il y a 1000 mètres dans un kilomètre) et multiplier par 3600 (car il y a 3600 secondes dans une heure), donc multiplier par $\frac{3600}{1000} = 3,6$.

La vitesse du corps est donc $36\sqrt{5} \text{ m/s} \approx 80,5 \text{ km/h}$.

c) Traçons la courbe $\mathcal{C}_d$ de la fonction $d : t \mapsto 5t^2$ pour $t \in [0; 1,5]$.

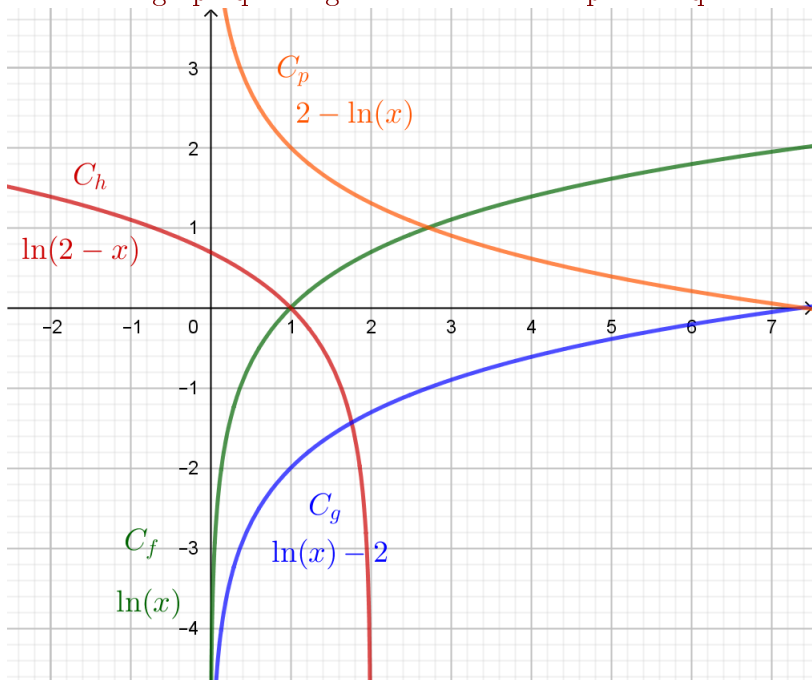


M_0 et M_h étant les points d'abscisse t_0 et $t_0 + h$ de la courbe de la fonction d , le coefficient directeur de la droite (M_0M_h) est égal à $\frac{d(t_0+h)-d(t_0)}{t_0+h-t_0} = 5h + 10t_0$ tant que $h \neq 0$ et lorsque h tend vers 0, la sécante tend à se rapprocher de la tangente en M_0 à $\mathcal{C}_d$. Cette tangente a donc pour coefficient directeur le nombre $10t_0$.

- ♦ Si $t_0 = 0,5$, la tangente a pour coefficient directeur 5 et, comme elle passe par le point $M_0(0,5; 5 \times 0,5^2 = 1,25)$, son équation est $y = 5x + b$ avec b vérifiant $1,25 = 5 \times 0,5 + b \iff b = 1,25 - 5 \times 0,5 = -1,25$. La tangente a pour équation $y = 5x - 1,25$ (en rouge sur la figure).
- ♦ Si $t_0 = 1$, la tangente a pour coefficient directeur 10 et, comme elle passe par le point $M_0(1; 5 \times 1^2 = 5)$, son équation est $y = 10x + b$ avec b vérifiant $5 = 10 \times 1 + b \iff b = 5 - 10 \times 1 = -5$. La tangente a pour équation $y = 10x - 5$ (en vert sur la figure).

CORRECTION DE L'EXERCICE 4 (DÉDUCTION ET COMPOSITION)

a) Les courbes ci-dessous représentent des fonctions f, g, h et p . J'ai fait figurer les expressions explicites sur le graphique en guise de vérification pour ce qui suit.



La fonction f n'est pas supposée connue (fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln(x)$, définie sur $\mathbb{R}^{*+}$). La courbe de la fonction g étant translatée verticalement de 2 unités vers le bas de celle de f , on en déduit que $g(x) = f(x) - 2$ (soit $g(x) = \ln(x) - 2$).

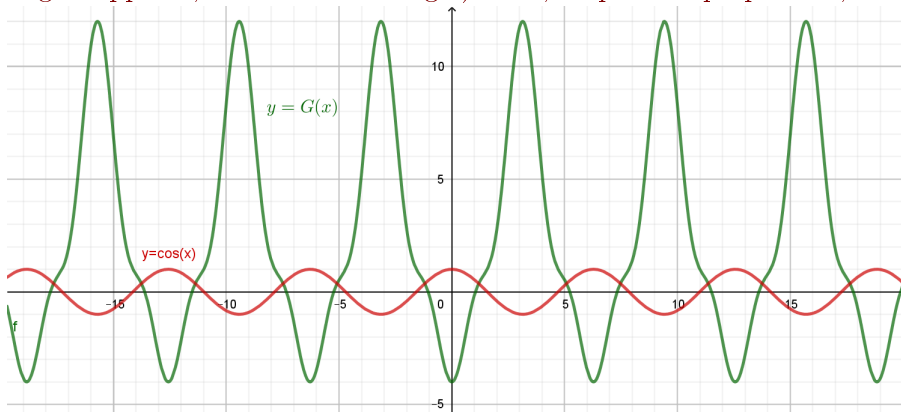
La courbe de la fonction h étant symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation $x = 1$, on en déduit que $h(x) = f(2 - x)$ (soit $h(x) = \ln(2 - x)$).

La courbe de la fonction p étant symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation $y = 1$, on en déduit que $p(x) = 2 - f(x)$ (soit $p(x) = 2 - \ln(x)$).

b) La fonction φ est paire donc $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Pour une fonction F quelconque, $F \circ \varphi(-x) = F(\varphi(-x)) = F(\varphi(x)) = F \circ \varphi(x)$.

La fonction $F \circ \varphi$ est donc paire.

La fonction G étant définie par $G : x \mapsto \frac{1-2\cos x}{1+3\cos^2 x}$, on peut écrire $G = F \circ \varphi$ avec $\varphi(x) = \cos x$ et $F(x) = \frac{1-2x}{1+3x^2}$. On sait que la fonction $\varphi = \cos$ est paire (car $\cos(-x) = \cos(x)$, $-x$ et x étant deux angles opposés, leur cosinus est égal) donc, d'après ce qui précède, G l'est aussi.



c) Si $f \circ g = g \circ f$ alors on a :

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= g(f(x)) \iff a(a'x + b') + b = a'(ax + b) + b' \\ &\iff aa'x + ab' + b = aa'x + ba' + b' \\ &\iff ab' + b = ba' + b' \end{aligned}$$

On peut encore écrire cette égalité $b(a' - 1) = b'(a - 1)$ et, si $a \neq 1$ et $a' \neq 1$, $\frac{b}{a-1} = \frac{b'}{a'-1}$.

Deux cas se présentent :

- Si $a = a'$, comme les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ doivent être distinctes, on ne peut avoir $b = b'$. L'égalité $ab' + b = ba' + b'$ devient alors $ab' + b = ba + b' \iff a(b' - b) = b' - b$ et, comme $b \neq b'$, on en déduit $a = \frac{b'-b}{b'-b} = 1$. Les droites Δ , $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

- Si $a \neq a'$, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes. Montrons qu'elles se coupent sur Δ .

Montrons d'abord que ni a ni a' ne peut être égal à 1 :

— Si $a = 1$ alors on devrait avoir $b' + b = ba' + b' \iff b = ba' \iff b(1 - a') = 0$ et comme $a \neq a'$ on ne peut avoir $a' = 1$. Il faut donc que $b = 0$ et, par conséquent, $\mathcal{D} = \Delta$ ce qui ne se peut pas.

— De même, $a' = 1$ conduit à avoir $\mathcal{D}' = \Delta$ ce qui ne se peut pas.

Finalement, ici, on a $a \neq 1$ et $a' \neq 1$.

L'abscisse de $\Delta \cap \mathcal{D}$ est telle que $ax + b = x \iff x = \frac{b}{1-a}$;

L'abscisse de $\Delta \cap \mathcal{D}'$ est telle que $a'x + b' = x \iff x = \frac{b'}{1-a'}$.

Comme on a vu que $f \circ g = g \circ f$ impliquait que $\frac{b}{a-1} = \frac{b'}{a'-1} \iff \frac{b}{1-a} = \frac{b'}{1-a'}$, on en déduit que $\Delta \cap \mathcal{D}$ et $\Delta \cap \mathcal{D}'$ ont même abscisse ; deux points de la même droite Δ ayant même abscisse sont confondus. Les droites Δ , $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont concourantes.

CORRECTION DE L'EXERCICE 5 (MINIMISER UN TRAJET - 5 POINTS)

a) Le trajet AM se fait sur la mer à la vitesse de 4 km/h et la distance est $AM = \sqrt{9^2 + x^2} = \sqrt{81 + x^2}$.

On en déduit que $t_{AM} = \frac{\sqrt{81+x^2}}{4}$. Le trajet MB se fait sur la côte à la vitesse de 5 km/h et la distance

est $BM = 15 - x$, d'où $t_{MB} = \frac{15-x}{5}$.

La durée totale du trajet est donc $d(x) = t_{AM} + t_{MB} = \frac{\sqrt{x^2+81}}{4} + \frac{15-x}{5}$.

b) Dérivons d :

$$\begin{aligned} d'(x) &= \left(\frac{\sqrt{x^2+81}}{4} \right)' + \left(\frac{15-x}{5} \right)' \\ &= \frac{2x}{2 \times 4\sqrt{x^2+81}} + \frac{-1}{5} \\ &= \frac{x}{4\sqrt{x^2+81}} + \frac{-1}{5} \end{aligned}$$

Pour déterminer le signe de $d'(x)$, transformons cette expression :

$$\begin{aligned} d'(x) &= \frac{5x - 4\sqrt{x^2+81}}{20\sqrt{x^2+81}} \\ &= \frac{(5x)^2 - 4^2(x^2+81)}{20\sqrt{x^2+81} \times (5x + 4\sqrt{x^2+81})} \\ &= \frac{25x^2 - 16x^2 - 16 \times 81}{20\sqrt{x^2+81} \times (5x + 4\sqrt{x^2+81})} \\ &= \frac{9(x^2 - 144)}{20\sqrt{x^2+81} \times (5x + 4\sqrt{x^2+81})} \end{aligned}$$

Le signe de $d'(x)$ pour $x \in [0; 15]$ est celui de $x^2 - 144$ car les autres facteurs sont positifs ($5x + 4\sqrt{x^2+81}$ en particulier l'est car x est positif dans $[0; 15]$). D'où $d'(x) \geq 0 \iff x \geq 12$.

Le tableau de signes de la dérivée d' et le tableau de variation de d :

x	0	12	15
d'	-	0	+
d	$d(0)$	$d(12)$	$d(15)$

Ainsi d admet un minimum pour $x = 12$ égal à $d(12) = \frac{\sqrt{12^2+81}}{4} + \frac{15-12}{5} = \frac{15}{4} + \frac{3}{5} = \frac{87}{20} \approx 4,35$ h.
La durée minimale du trajet est donc de 4 h et $\frac{7}{20}$ h = $\frac{21}{60}$ h = 21 min.

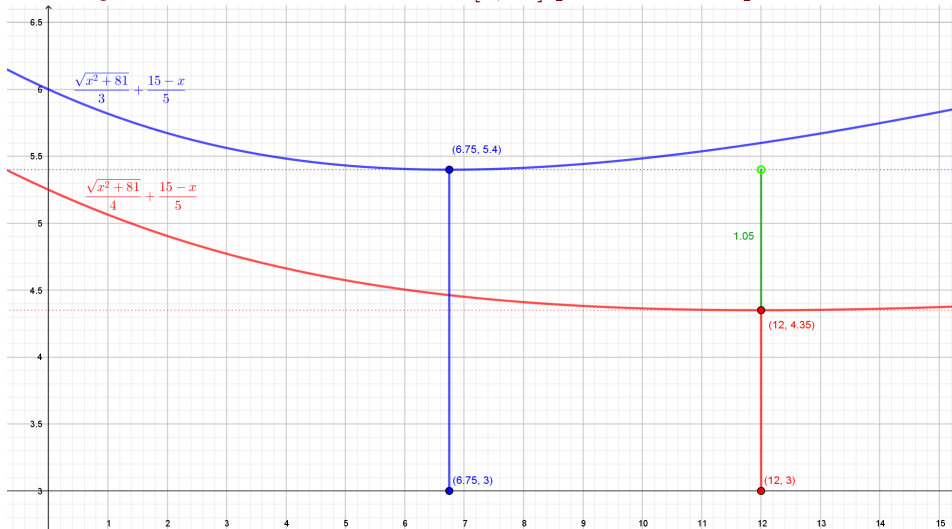
c) En naviguant à 3 km/h, la durée du trajet est $d(x) = \frac{\sqrt{x^2+81}}{3} + \frac{15-x}{5}$.
La dérivée de cette fonction est :

$$\begin{aligned} d'(x) &= \frac{x}{3\sqrt{x^2+81}} + \frac{-1}{5} \\ &= \frac{(5x)^2 - 3^2(x^2+81)}{15\sqrt{x^2+81} \times (5x + 3\sqrt{x^2+81})} \\ &= \frac{16x^2 - 729}{15\sqrt{x^2+81} \times (5x + 3\sqrt{x^2+81})} \end{aligned}$$

Cette expression est du signe de $16x^2 - 729$ qui s'annule pour $x^2 = \frac{729}{16} \implies x = \frac{27}{4} = 6,75$.

Ainsi d admet un minimum pour $x = 6,75$ égal à $d(6,75) = \frac{\sqrt{6,75^2+81}}{3} + \frac{15-6,75}{5} = 5,4$ h.
La durée minimale du trajet est donc de 5 h et $\frac{4}{10}$ h = $\frac{24}{60}$ h = 24 min.
Le trajet lui prend alors 1 h et 3 min en plus.

Traçons les courbes de d sur $x \in [0; 15]$ pour les deux questions.



CORRECTION DE L'EXERCICE 6 (MAXIMISER UN TRAPÈZE - 5 POINTS)

a) Pour une valeur quelconque de $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$, déterminons $\mathcal{A}(\alpha)$:

Notons E et F les projections orthogonales de B et C sur (AD) .

Dans ce cas $\mathcal{A}(\alpha) = AE \times EB + EF \times EB = (AE + EF) \times EB$.

Or, $AE = a \cos \alpha$ et $EB = a \sin \alpha$.

On a donc $\mathcal{A}(\alpha) = (a \cos \alpha + a) \times a \sin \alpha = a^2(\cos \alpha + 1) \times \sin \alpha$.

b) Dérivons $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'(\alpha) &= a^2 [(\cos \alpha + 1)' \times (\sin \alpha) + (\cos \alpha + 1) \times (\sin \alpha)'] \\ &= a^2 [(-\sin \alpha) \times (\sin \alpha) + (\cos \alpha + 1) \times (\cos \alpha)] \\ &= a^2 [-\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos \alpha] \\ &= a^2 [2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1]\end{aligned}$$

En notant $X = \cos \alpha$, on peut écrire $\mathcal{A}'(\alpha) = a^2(2X^2 + 1X - 1)$.

Les racines du trinôme $2X^2 + 1X - 1$ sont $X = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$.

Seule la plus grande racine, soit $X_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$, convient lorsque $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}] \iff \cos \alpha \in [0; 1]$.

La valeur α_0 de $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ qui annule $\mathcal{A}'(\alpha)$ correspond à cette racine :

$$X_1 = \cos \alpha \iff \cos \alpha = \frac{1}{2} \iff \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

L'autre racine $X_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$ correspondant à un angle de π rad est en dehors de l'intervalle d'étude.

d) Le polynôme $2X^2 + 1X - 1$ est négatif pour $X < \frac{1}{2} \iff \cos \alpha < \cos \frac{\pi}{3}$.

Mais comme la fonction cosinus est décroissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, cela implique que $\alpha > \frac{\pi}{3}$.

On peut aussi déterminer le signe de $\mathcal{A}'(0) = a^2 [2 \cos^2 0 + \cos 0 - 1] = a^2 \times [2 + 1 - 1] = 2a^2 > 0$ ainsi que celui de $\mathcal{A}'(\frac{\pi}{2}) = a^2 [2 \cos^2 \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - 1] = a^2 \times [-1] = -a^2 < 0$.

Voici donc le tableau de variation de $\mathcal{A}$:

α	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\mathcal{A}'$	$2a^2$	+	0
		-	$-a^2$
$\mathcal{A}$	0	$\mathcal{A}(\frac{\pi}{3})$	

L'aire maximale du trapèze est $\mathcal{A}(\frac{\pi}{3}) = a^2(\cos \frac{\pi}{3} + 1) \times \sin \frac{\pi}{3} = a^2(\frac{1}{2} + 1) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 7 (DÉRIVATIONS DIVERSES - 5 POINTS)

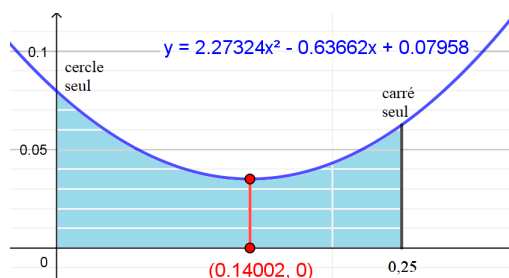
a) La ficelle :

L'aire du 1^{er} morceau carré de côté x est x^2 .Le 2^e mesure $1 - 4x$. Avec cette longueur de ficelle, on réalise un cercle de rayon $r = \frac{1-4x}{2\pi}$.L'aire contenue à l'intérieur de ce cercle est donc $\pi r^2 = \pi \times \left(\frac{1-4x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(1-4x)^2}{4\pi}$.L'aire totale des deux formes est donc $\mathcal{A}(x) = x^2 + \frac{(1-4x)^2}{4\pi}$.La dérivée de cette fonction est $\mathcal{A}'(x) = 2x + \frac{2 \times (-4)(1-4x)}{4\pi} = \frac{8\pi x - 8(1-4x)}{4\pi} = 2 \times \frac{x(\pi+4)-1}{\pi}$. $\mathcal{A}'(x) = 0 \iff x(\pi+4) - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{\pi+4} \approx 0,1400248$. $\mathcal{A}'$ étant une fonction affine croissante (son coefficient est $2 \times \frac{\pi+4}{\pi} > 0$) est négative puis positive.

x	0	$\frac{1}{\pi+4} \approx 0,14$	1
$\mathcal{A}'$	-	0	+
$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}(0)$	$\mathcal{A}\left(\frac{1}{\pi+4}\right)$	$\mathcal{A}(1)$

La valeur minimale de l'aire totale est donc $\mathcal{A}\left(\frac{1}{\pi+4}\right) = \left(\frac{1}{\pi+4}\right)^2 + \frac{(1-\frac{4}{\pi+4})^2}{4\pi} \approx 0,0350062 \text{ m}^2$.Ci-dessous, on voit la courbe associée à la fonction $\mathcal{A}$ qui montre ce minimum.

Pour le maximum (non demandé), il est intéressant de montrer qu'il correspond à la position où la ficelle sert entièrement à faire un cercle : le cercle est en effet la forme ayant la plus grande aire parmi toutes les formes ayant le même périmètre.



b) Algorithme :

Dérivons l'expression $F(x) = \frac{ax^2+b}{x+c}$, on obtient $F'(x) = \frac{2ax(x+c)-(ax^2+b)}{(x+c)^2} = \frac{ax^2+2acx-b}{(x+c)^2}$.Le signe de $F'(x)$ est le même que celui du trinôme $ax^2 + 2acx - b$.Celui-ci admet des racines si $\Delta = 4a^2c^2 + 4ab = 4a^2\left(c^2 + \frac{b}{a}\right) \geq 0$.La valeur qui annule $F'(x)$ pour $x > -c$ est $x = \frac{-2ac + \sqrt{4a^2(c^2 + \frac{b}{a})}}{2a} = -c + \sqrt{c^2 + \frac{b}{a}}$.Cette valeur est notée x_0 . Son image est $y_0 = F(x_0) = \frac{ax_0^2+b}{x_0+c}$.

Ainsi, nous disposons de tous les éléments pour écrire notre algorithme :

- Si $c^2 + \frac{b}{a} \geq 0$ alors il y a une racine x_0 supérieure à $-c$ (égale à $-c$ si $c^2 + \frac{b}{a} = 0$).
- On doit alors calculer et afficher x_0 et y_0 , les coordonnées de l'extrémum.
- Cet extremum quand il existe est un minimum car on sait que $a > 0$ et, dès lors, le trinôme $ax^2 + 2acx - b$ est négatif avant $x_0 = -c + \sqrt{c^2 + \frac{b}{a}}$ est positif ensuite. $F'(x)$ va donc être négatif jusqu'à x_0 puis positif ; la fonction F va décroître puis croître : elle admet donc toujours un minimum qui est $y_0 = F(x_0)$.
- Dans le cas où $c^2 + \frac{b}{a} < 0$, la fonction F n'admet pas d'extrémum : elle garde toujours le même sens de variation qui est croissant puisque $F'(x)$ est du signe de $a > 0$.

Voici mon programme, écrit en Python :

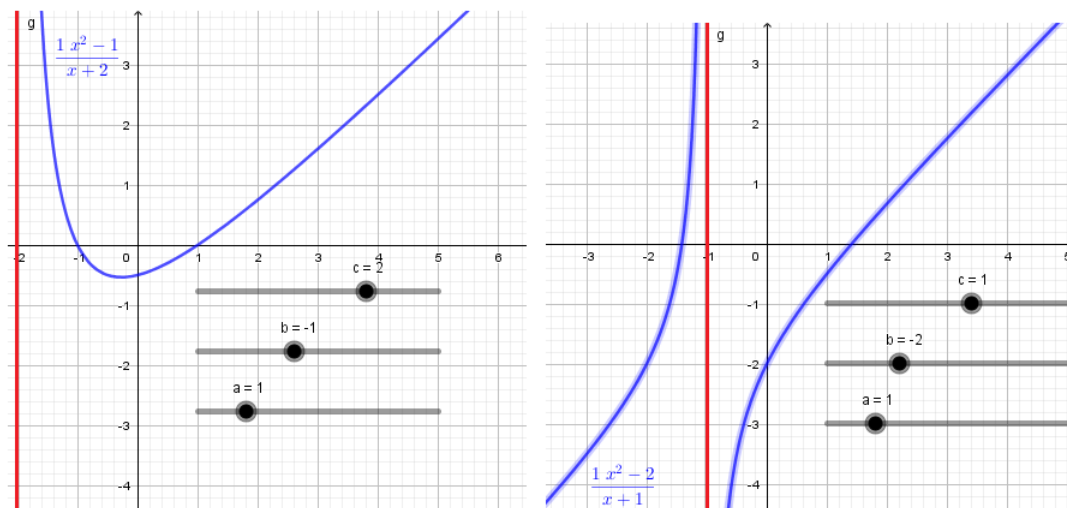
```

from math import *
def fonction(a,b,c,x) :
    return (a*x**2+b)/(x+c)

def extremum(a,b,c):
    if c**2+b/a>=0:
        x0=-c+sqrt(c**2+b/a)
        y0=fonction(a,b,c,x0)
        print("minimum : (",x0,";",y0,")")
    elif b>0: print("pas d'extremum, la fonction est décroissante")
    else : print("pas d'extremum, la fonction est croissante")

extremum(1,-1,2)      minimum : ( -0.2679491924311228 ; -0.5358983848622454 )
extremum(1,-2,1)      pas d'extremum, la fonction est croissante

```



Pour $(a, b, c) = (1, -1, 2)$, ce programme annonce un minimum atteint pour $x_0 \approx -0,27$ qui vaut $y_0 \approx -0,54$, ce que confirme notre graphique (à gauche).

Pour $(a, b, c) = (1, -2, 1)$, ce programme annonce une fonction continuellement croissante (car $b > 0$) ce que confirme notre graphique (à droite).

CORRECTION DE L'EXERCICE 8 (MINIMUM)

a) Transformons l'expressions $E(a, b)$ où a et b sont des réels strictement positifs en posant $x = \frac{b}{a}$:

$$\begin{aligned}
 E(a, b) &= \sqrt{a+b} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) \\
 &= \sqrt{a \left(1 + \frac{b}{a} \right)} \times \frac{1}{\sqrt{a}} \left(1 + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} \times \sqrt{1 + \frac{b}{a}} \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{b}{a}}} \right) \\
 &= 1 \times \sqrt{1+x} \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \\
 &= \sqrt{1+x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = f(x)
 \end{aligned}$$

b) Dérivons $f(x) = \sqrt{1+x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (\sqrt{1+x})' \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \sqrt{1+x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' \\
 &= \frac{(1+x)'}{2\sqrt{1+x}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \sqrt{1+x} \left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)' \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \sqrt{1+x} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{2\sqrt{\frac{1}{x}}} \\
 &= \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\sqrt{1+x}} + \sqrt{1+x} \frac{\frac{-1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x}}} \\
 &= \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+x}}{2x^2} \\
 &= \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+x}}{2x\sqrt{x}} \\
 &= \frac{x(\sqrt{x}+1) - \sqrt{x}(\sqrt{1+x})^2}{2x\sqrt{x}\sqrt{1+x}} \\
 &= \frac{x\sqrt{x} + x - \sqrt{x} - x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}\sqrt{1+x}} \\
 &= \frac{x - \sqrt{x}}{2x\sqrt{x}\sqrt{1+x}}
 \end{aligned}$$

Le dénominateur de cette expression est positif sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Le signe de $f'(x)$ est donc celui du numérateur.

Or $x - \sqrt{x} > 0 \iff x > \sqrt{x} \iff \sqrt{x} > 1 \iff x > 1$.

La fonction f' est négative jusqu'à $x_0 = 1$ puis positive. Par conséquent f est décroissante puis croissante : pour $x = x_0 = 1$ elle passe par un minimum $m = f(1) = \sqrt{1+1} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1}}\right) = 2\sqrt{2}$.

Le tableau de variation suivant résume cela :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	- + $2\sqrt{2}$		

c) Le minimum de $E(a, b)$ est donc $2\sqrt{2}$; il est atteint lorsque $x = \frac{b}{a} = 1$, c'est-à-dire lorsque $a = b$.

On peut donc affirmer que pour tout couple de réels positifs (a, b) , on a $\sqrt{a+b} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) \geq 2\sqrt{2}$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 9 (EXPONENTIELLES- 5 POINTS)

a) La fonction $f_k : x \mapsto e^{-kx^2}$ où $k > 0$ est paire car la fonction carrée l'est.

En effet $f_k(-x) = e^{-k(-x)^2} = e^{-kx^2} = f_k(x)$ On peut donc se limiter à l'étude des variations sur $\mathbb{R}^+$ car la parité permettra de compléter sur $\mathbb{R}^-$.

Dérivons f_k :

$f_k(x) = e^{-kx^2} = e^u$ or $(e^u)' = u'e^u$. On a donc $f'_k(x) = (-kx^2)'e^{-kx^2} = -2kxe^{-kx^2}$.

Comme $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-kx^2} > 0, f'_k(x) > 0 \iff -2kx > 0$.

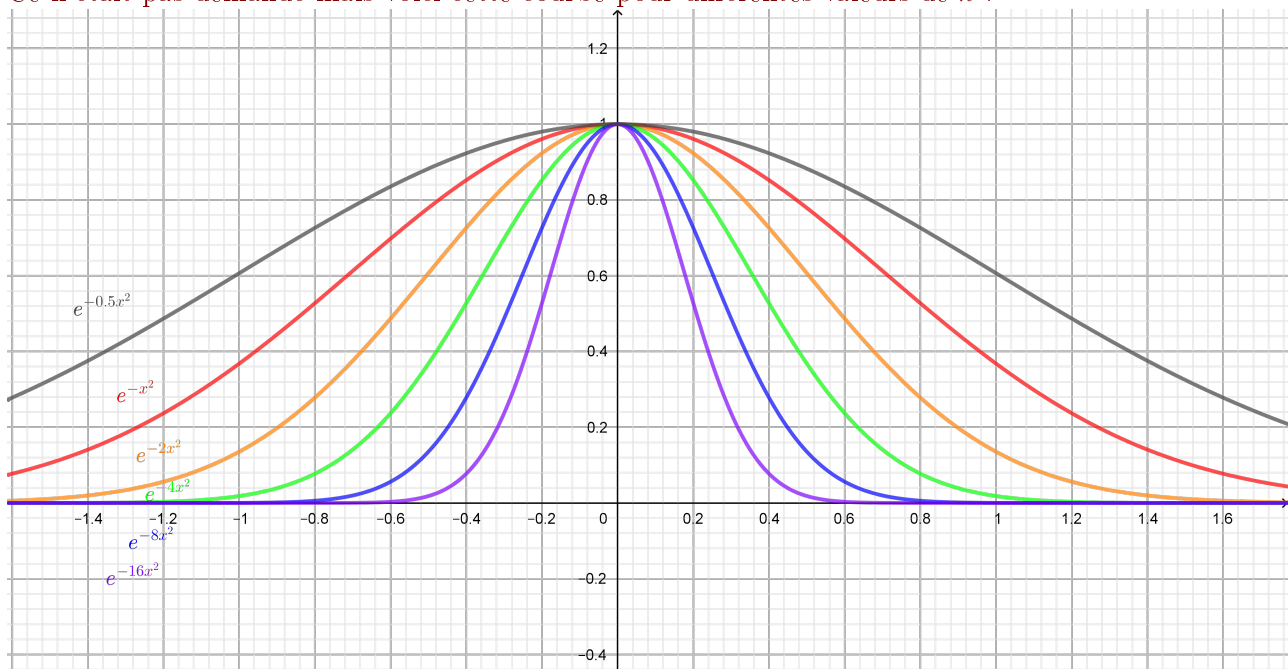
Or, d'après l'énoncé, $k > 0$. Donc $f'_k(x) > 0 \iff -x > 0 \iff x < 0$.

La fonction f_k est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et croissante sur $\mathbb{R}^-$.

Elle passe par un maximum pour $x = 0$ égal à $e^{-k0^2} = e^0 = 1$.

NB : cette courbe est la fameuse « courbe en cloche » de la loi de Gauss (voir un cours de probabilité).

Ce n'était pas demandé mais voici cette courbe pour différentes valeurs de k :



b) En dérivant la fonction f définie par $f(x) = e^x - x$, on trouve $f'(x) = e^x - 1$.

La dérivée f' est positive quand $e^x - 1 > 0 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$.

Pareillement elle est négative $x < 0$ et nulle pour $x = 0$.

La fonction f étant donc décroissante puis croissante, elle passe par un minimum pour $x = 0$.

Ce minimum étant égal à $f(0) = e^0 - 0 = 1$, on en déduit que $f(x) = e^x - x \geq 1 \iff e^x \geq x + 1$.

Comme, pour tout réel, $x + 1 > x$ (car $1 > 0$), on a $e^x \geq x + 1 > x$ et donc $e^x \geq x$.

Soit $x > 0$, appliquons l'inégalité précédente au réel $\frac{x}{2} : e^{\frac{x}{2}} \geq \frac{x}{2}$.

Comme ces deux nombres sont positifs ($\frac{x}{2} > 0$ car $x > 0$), on peut élever cette inégalité au carré sans changer l'ordre : $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq \left(\frac{x}{2}\right)^2 \iff e^{\frac{2x}{2}} \geq \frac{x^2}{4} \iff e^x \geq \frac{x^2}{4}$.

En divisant par $x > 0$ cette dernière inégalité, on obtient la minoration $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{4}$.

Cette minoration est vraie sur $\mathbb{R}$ entier, mais au voisinage de $+\infty$ on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

c) BONUS (2 points) :

i) Dérivons la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$:

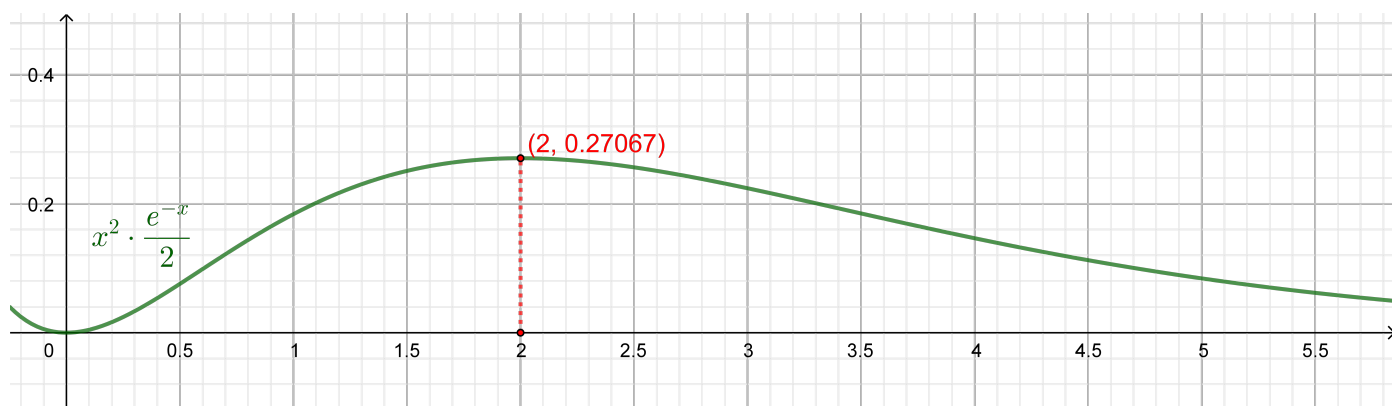
$$\Gamma'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2\right)'e^{-x} + \frac{1}{2}x^2(e^{-x})' = xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x} = (x - \frac{1}{2}x^2)e^{-x}.$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$, $\Gamma'(x) > 0 \iff x - \frac{1}{2}x^2 > 0 \iff \frac{2x-x^2}{2} > 0 \iff x(2-x) > 0$.

Sur $\mathbb{R}^+$, cette inéquation se réduisant à $2-x > 0 \iff x < 2$, a pour solution $x \in]0; 2[$.

De même, sur $\mathbb{R}^+$, on montre que $\Gamma'(x) < 0 \iff x > 2$ et $\Gamma'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$.

La fonction Γ étant donc croissante puis décroissante, elle passe par un maximum sur $\mathbb{R}^+$, atteint pour $x = 2$, qui vaut $\Gamma(2) = \frac{1}{2}2^2e^{-2} = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2} \approx 0,27067$ (vérification graphique ci-dessous).

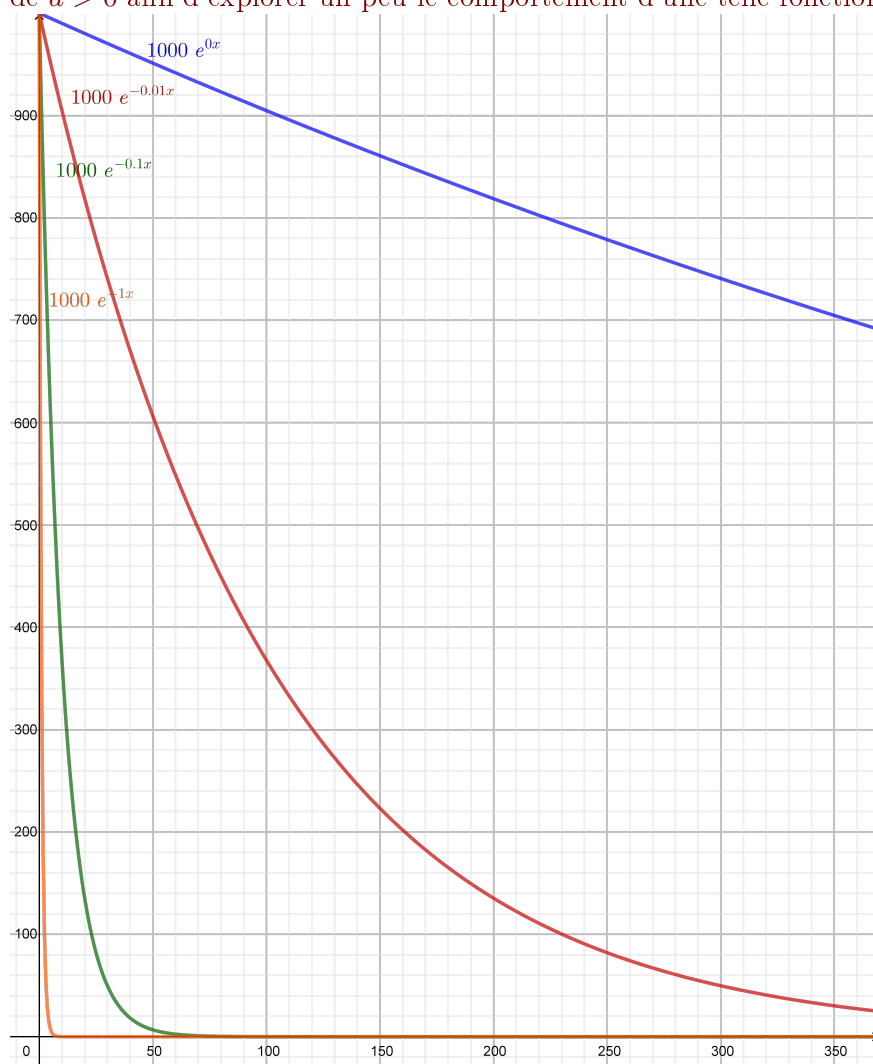


NB : cette fonction « gamma trois » sert à modéliser des phénomènes aléatoires se produisant en moyenne trois fois par unité de temps.

ii) Le rapport $\frac{e^x-1}{x}$ peut être interprété comme le taux d'accroissement de la fonction $f : x \mapsto e^x$ au voisinage de zéro car il peut s'écrire $\frac{e^x-e^0}{x-0}$. Or on sait que la limite de ce rapport quand x tend vers 0 est égal à la fonction dérivée de f en 0 (le nombre dérivé) et ce nombre n'est autre que $f'(0) = e^0 = 1$ (puisque, par définition de la fonction exponentielle, la dérivée de f c'est f elle-même). On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 10 (RADIOACTIVITÉ)

1) Représentons graphiquement la fonction $t \mapsto N_t = N_0 e^{-at}$ pour $N_0 = 1000$ et différentes valeurs de $a > 0$ afin d'explorer un peu le comportement d'une telle fonction :



On voit sur ces courbes se dégager un comportement général : ce sont des fonctions décroissantes qui

partent du point $(0; N_0)$. la décroissance est d'autant plus rapide que le coefficient a est grand (la plus grande valeur essayée est $a = 1$, pour cette valeur la chute est immédiate).

2) On désigne par T le temps au bout duquel $N_T = \frac{N_0}{2}$. Ce temps, appelé « demi-vie » ou « période » du corps radioactif, peut être défini par : $N_T = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-aT} \iff \frac{1}{2} = e^{-aT} \iff 2 = e^{aT}$
En supposant que l'on connaisse la valeur de α telle que $2 = e^\alpha$, on aurait $e^\alpha = e^{aT}$,
soit $\alpha = aT \iff a = \frac{\alpha}{T}$.

La valeur de α peut être trouvée en balayant l'intervalle $[0; 1]$ puisque $e^0 = 1 < 2$ et $e^1 \approx 2,71 > 2$. J'ai fait ce balayage sur un tableur :

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
e^x	1	1,1051709181	1,2214027582	1,3498588076	1,4918246976	1,6487212707	1,8221188004	2,0137527075	2,2255409285	2,4596031112	2,7182818285

x	0.6	0.61	0.62	0.63	0.64	0.65	0.66	0.67	0.68	0.69	0.7
e^x	1,8221188004	1,8404313988	1,8589280418	1,8776105793	1,8964808793	1,915540829	1,9347923344	1,9542373206	1,9738777322	1,9937155332	2,0137527075

x	0.69	0.691	0.692	0.693	0.694	0.695	0.696	0.697	0.698	0.699	0.7
e^x	1,9937155332	1,995710246	1,9977069544	1,9997056605	2,0017063664	2,0037090739	2,0057137852	2,0077205022	2,0097292269	2,0117399613	2,0137527075

On pourrait s'approcher encore davantage de cette valeur. Son expression mathématique est $\ln 2$ et la calculatrice en donne la valeur décimale approximative $\alpha = \ln 2 \approx 0,6931471806$.

3) Si on a N_0 atomes de radium dans 1g, on aura $\frac{N_0}{1000}$ atomes de radium dans 1mg. Pour perdre 1mg de matière, il faut donc que le nombre d'atomes diminue de $\frac{N_0}{1000}$, on aura alors :

$$N_t = N_0 - \frac{N_0}{1000} = N_0(1 - \frac{1}{1000}) = 0,999N_0.$$

La période du radium étant $T = 1622$ ans, le coefficient a vaut $a = \frac{\alpha}{1622} \approx \frac{0,6931471806}{1622} \approx 0,000427$

Le temps t_0 pour que 1g de radium perde 1mg est donc défini par :

$$N_{t_0} = 0,999N_0 = N_0 e^{-at_0} \iff 0,999 = e^{-0,000427t_0}.$$

Encore une fois, on se trouve dans l'obligation (faute de disposer de la fonction $\ln$) d'approcher du résultat par des approximations successives : en posant $0,999 = e^\beta$, on aurait :

$$e^\beta = e^{-0,000427t_0} \iff \beta = -0,000427t_0 \iff t_0 = \frac{\beta}{-0,000427}$$

x	-1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0
e^x	0,3678794412	0,4065696597	0,4493289641	0,4965853038	0,5488116361	0,6065306597	0,670320046	0,7408182207	0,8187307531	0,904837418	1

x	-0.1	-0.09	-0.08	-0.07	-0.06	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	0
e^x	0,904837418	0,9139311853	0,9231163464	0,9323938199	0,9417645336	0,9512294245	0,9607894392	0,9704455335	0,9801986733	0,9900498337	1

x	-0.01	-0.009	-0.008	-0.007	-0.006	-0.005	-0.004	-0.003	-0.002	-0.001	0
e^x	0,9900498337	0,9910403788	0,9920319148	0,9930244429	0,9940179641	0,9950124792	0,9960079893	0,9970044955	0,9980019987	0,9990004998	1

Je trouve $\beta \approx -0,001$ (la valeur exacte est notée $\beta = \ln 0,999 \approx -0,0010005$).

J'en conclus donc que $t_0 \approx \frac{\beta}{-0,000427} \approx \frac{0,001}{-0,000427} \approx 2,343$ ans.

4) D'autres substances radioactives :

La période est donnée pour tous ces éléments, mais la durée pour que 1g d'une substance radioactive perde 1mg ne l'est pas. Il faut donc réitérer les calculs laborieux faits dans la question précédente. Pour simplifier leur obtention je remplace β par $-0,001$ et α par $0,693$.

On a $a = \frac{0,693}{T}$ et $t_0 = \frac{-0,001}{-a}$

Radioisotope	Période radioactive	a (t en années)	T ₀
Rubidium87	47×10^9 a	1,4744680851E-011	67821067,8210678
Rhénium187	$43,5 \times 10^9$ a	1,5931034483E-011	62770562,7705628
Lutécium176	$37,8 \times 10^9$ a	1,8333333333E-011	54545454,5454545
Thorium232	$14,05 \times 10^9$ a	4,9323843416E-011	20274170,2741703
Uranium238	$4,5 \times 10^9$ a	1,54E-010	6493506,49350649
Potassium40	$1,277 \times 10^9$ a	5,4267815192E-010	1842712,84271284
Uranium235	$703,8 \times 10^6$ a	0,000000001	1015584,41558442
Uranium234	$245,5 \times 10^3$ a	2,8228105906E-006	354,2568542569
Carbone14	5 730 a	0,0001209424	8,2683982684
Radium226	1 602 a	0,0004325843	2,3116883117
Actinium227	21,773 a	0,0318284113	0,0314184704
Polonium210	138,376 j	1,8279542695	0,0005470596
Thorium234	24,1 j	10,4956431535	9,5277629524E-005
Radon222	3,824 j	66,1467050209	1,51179110083E-005
Radon220	54,5 s	400999,04587156	2,49377151965E-009
Polonium216	0,158 s	138319291,139241	7,22964954320E-012
Polonium215	1,83 ms	11942321311,4754	8,37358143294E-014
Polonium212	0,29 μ s	75360165517241,4	1,32696099211E-017

CORRECTION DE L'EXERCICE 11 (CROISSANCE D'UNE PLANTE)

1-i) Existence

La fonction f définie par $f(x) = Ae^{kx}$ où A et k sont des constantes, vérifie bien les conditions de l'énoncé, à savoir : $f'(x) = kf(x)$ et $f(0) = A$. En effet :

- ♦ $f'(x) = (Ae^{kx})' = A(e^{kx})' = A(kx)'e^{kx} = Ake^{kx} = k(Ae^{kx}) = kf(x)$
- ♦ $f(0) = Ae^{0x} = Ae^0 = A \times 1 = A$

1-ii) Unicité

Supposons qu'il existe une autre fonction g qui vérifie les conditions, à savoir : $g'(x) = kg(x)$ et $g(0) = A$.

Étudions les variations de la fonction $\varphi : x \mapsto f(x)g(-x)$:

Dérivons φ .

$$\varphi'(x) = f'(x)g(-x) + f(x)(g(-x))' = kf(x)g(-x) + f(x)(-x)'g'(-x) = kf(x)g(-x) - f(x)kg(-x) = 0$$

Par conséquent $\varphi(x) = C$, une constante que l'on détermine à l'aide $\varphi(0) = f(0)g(-0) = A^2$

$$\varphi(x) = A^2 \iff f(x)g(-x) = A^2 \iff f(x) = \frac{A^2}{g(-x)}$$

Quelle est la valeur de $\theta(x) = f(x)f(-x)$?

Dérivons θ .

$$\theta'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(f(-x))' = kf(x)f(-x) + f(x)(-x)'f'(-x) = kf(x)f(-x) - f(x)kf(-x) = 0$$

Par conséquent $\theta(x) = C$, une constante que l'on détermine à l'aide $\theta(0) = f(0)f(-0) = A^2$

$$\theta(x) = A^2 \iff f(x)f(-x) = A^2 \iff f(x) = \frac{A^2}{f(-x)}$$

Finalement, par identification, on trouve que $\frac{A^2}{g(-x)} = \frac{A^2}{f(-x)} \iff g(-x) = f(-x)$.

Avec le changement de variable $X = -x$, on obtient $g(X) = f(X)$ pour tout réel X .

Les deux fonctions coïncidant en tout points de $\mathbb{R}$ ne peuvent être distinctes.

La fonction f répondant aux conditions de l'énoncé est donc unique.

2) Pour cette espèce de coton, le poids P (en g par jour) varie en fonction de t (en jour) selon l'équation $P'(t) = 0,18P(t)$.

On nous donne $k = 0,18$ et $P(1) = 2$ au lieu de $P(0) = A$, mais selon la question précédente on a $P(t) = Ae^{kt}$, soit $P(t) = Ae^{0,18t}$.

$$P(1) = Ae^{0,18} \iff A = \frac{P(1)}{e^{0,18}} = \frac{2}{e^{0,18}} = 2e^{-0,18} \approx 1,67.$$

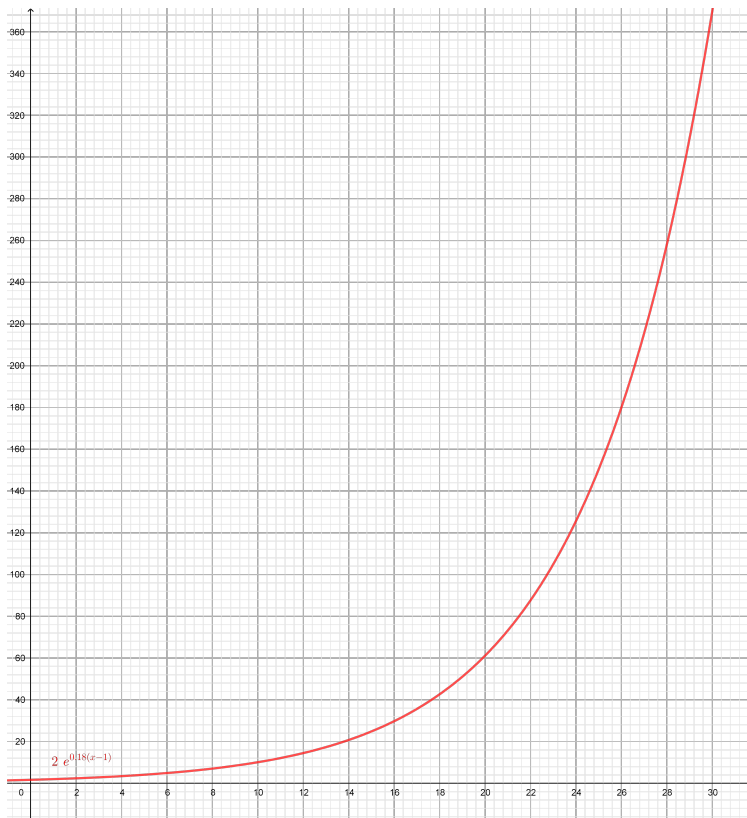
$$\text{On en déduit } P(t) = 2e^{-0,18}e^{0,18t} = 2e^{0,18t-0,18} = 2e^{0,18(t-1)}.$$

$$\text{Au bout de 1 mois, la plante pèse } P(30) = 2e^{0,18(30-1)} = 2e^{0,18 \times 29} = 2e^{5,22} \approx 369,87.$$

$$\text{On peut remarquer que } \frac{P(t+1)}{P(t)} = \frac{2e^{0,18(t+1)}}{2e^{0,18(t-1)}} = e^{0,18t-0,18(t-1)} = e^{0,18}.$$

La suite (P) est une suite géométrique de raison $e^{0,18}$.

Par curiosité, traçons la courbe de cette fonction P :



CORRECTION DE L'EXERCICE 12 (DÉRIVATION)

a) Fonctions polynômes :

Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

- ♦ $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 4x - 3$; $f'(x) = 20x^3 - 6x + 4$
- ♦ $g(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{4} - \frac{4x}{3} - \frac{3}{2}$; $g'(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - \frac{4}{3}$
- ♦ $h(x) = 4(3x^2 - 1)(3x^2 + 1) = 4(9x^4 - 1)$; $h'(x) = 4 \times 36x^3 = 144x^3$

b) Fonctions sommes :

- ♦ $f(x) = -2x^2 - x + 1 + \frac{2}{x}$; la fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
 $f'(x) = -4x - 1 - \frac{2}{x^2}$
- ♦ $g(x) = 2\sin(x) - 3\cos(x)$; la fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
 $g'(x) = 2\cos(x) + 3\sin(x)$
- ♦ $h(x) = \sqrt{x} - x$; la fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
 $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$

c) Fonctions produits :

- ♦ $f(x) = (2x^3 + 3x - 1)(3x^2 + 2x + 1)$; fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$;
 $f'(x) = 3(2x^2 + 1)(3x^2 + 2x + 1) + 2(2x^3 + 3x - 1)(3x + 1) = 3(6x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1) + 2(6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 1) = 30x^4 + 16x^3 + 33x^2 + 6x + 1$
- ♦ $g(x) = \sqrt{x}(x^2 + x + 1)$; comme la fonction racine : dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$;
 $g'(x) = \sqrt{x}(2x + 1) + \frac{x^2 + x + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x(2x + 1) + x^2 + x + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + 3x + 1}{2\sqrt{x}}$;
- ♦ $h(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{2}e^x$; fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$;
 $h'(x) = \frac{e^x}{2}((x^2 - 3x + 5) + (2x - 3)) = \frac{e^x(x^2 - x + 2)}{2}$

d) Fonctions quotients :

- ♦ $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$; la fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{1; -1\}$;
 $f'(x) = \frac{4x(x^2 - 1) - (2x^2 + 1)(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{4x^3 - 4x - 4x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-6x}{(x^2 - 1)^2}$
- ♦ $g(x) = \frac{\sin(x) - 1}{\cos(x) - 1}$; la fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{0[2\pi]\}$;
 $f'(x) = \frac{\cos(x)(\cos(x) - 1) - (\sin(x) - 1)(-\sin(x))}{(\cos(x) - 1)^2} = \frac{\cos^2(x) - \cos(x) + \sin^2(x) - \sin(x)}{(\cos(x) - 1)^2} = \frac{1 + \sin(x) + \cos(x)}{(\cos(x) - 1)^2}$
- ♦ $h(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{x}}$; la fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$;
 $h'(x) = \frac{2e^x(\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}})}{x} = \frac{2e^x(x - 1)}{2x\sqrt{x}} = \frac{e^x(x - 1)}{x\sqrt{x}}$

e) Fonctions composées :

- ♦ $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; la fonction est définie et dérivable sur $] - \infty; -1[\cup]1; +\infty[$;
 $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
- ♦ $g(x) = (x^3 - 1)^2$; la fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$;
 $g'(x) = 2(x^3 - 1) \times (3x^2) = 6x^2(x^3 - 1)$
- ♦ $h(x) = \frac{e^{x^2-1}}{2}$; la fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$;
 $h'(x) = \frac{2xe^{x^2-1}}{2} = xe^{x^2-1}$

f) Fonctions mélangées :

- ♦ $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$; la fonction est définie et dérivable sur $]1; +\infty[$;
 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{2\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x^2-1}}$
- ♦ $g(x) = \frac{e^{x-1}}{1+e^{-2x}}$; la fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$;
 $g'(x) = \frac{e^{x-1}(1+e^{-2x}+2e^{-2x})}{(1+e^{-2x})^2} = \frac{e^{x-1}(1+3e^{-2x})}{(1+e^{-2x})^2}$
- ♦ $h(x) = \tan\left(\frac{2x-\pi}{3}\right)$; la fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2}[\pi]\}$;
 $h'(x) = \frac{2}{3} \left[1 + \tan^2\left(\frac{2x-\pi}{3}\right)\right]$

CORRECTION DE L'EXERCICE 13 (TABLEAU DE VARIATION)

1) $f_1(x) = x^4 - 2x^2$, $I = \mathbb{R}$

$$f_1'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x-1)(x+1)$$

Le tableau de signes de la dérivée f_1' et le tableau de variation de f_1 (on pourrait ajouter des lignes à ce tableau pour justifier et trouver celui de la dérivée, ici une ligne supplémentaire pour le signe de x et une autre pour celui de $x^2 - 1$) :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f_1'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f_1		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2) $f_2(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$

$$f_2'(x) = \frac{x^2+1-(x-2)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$$

Le discriminant du numérateur est $\Delta = 4^2 + 4 = 20$, il s'annule pour $x = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{-2} = 2 \pm \sqrt{5}$.

Le tableau de signes de la dérivée f_2' et le tableau de variation de f_2

x	$-\infty$		$2 - \sqrt{5}$		$2 + \sqrt{5}$		$+\infty$
f_2'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_2		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

3) $f_3(x) = (1-x)\sqrt{x}$, $I = \mathbb{R}^+$

$$f_3'(x) = (1-x)\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{(1-x)-2x}{2\sqrt{x}} = \frac{1-3x}{2\sqrt{x}}$$

Le tableau de signes de la dérivée f_3' et le tableau de variation de f_3 :

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
f_3'		$+$	0	$-$	
f_3		$\nearrow$		$\searrow$	

4) $f_4(x) = x + \frac{16}{x}$, $I = \mathbb{R}^*$

$$f_4'(x) = 1 - \frac{16}{x^2} = \frac{x^2-16}{x^2} = \frac{(x-4)(x+4)}{x^2}$$

Le tableau de signes de la dérivée f'_4 et le tableau de variation de f_4 :

x	$-\infty$	-4	0	4	$+\infty$	
f'_4		$+$	0	$-$	0	$+$
f_4						

5) $f_5(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}, I = \mathbb{R}^+$

$$f'_5(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{-1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

Le tableau de signes de la dérivée f'_5 et le tableau de variation de f_5 :

x	0	$+\infty$
f'_5		$-$
f_5		

6) $f_6(x) = -5e^{-2x}, I = \mathbb{R}$

$$f'_6(x) = -5 \times (-2)e^{-2x} = 10e^{-2x}$$

Le tableau de signes de la dérivée f'_6 et le tableau de variation de f_6 :

x	$-\infty$	$+\infty$
f'_6		$+$
f_6		

7) $f_7(x) = e^x - \frac{1}{x}, I = \mathbb{R}^*$

$$f'_7(x) = e^x + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 e^x + 1}{x^2}$$

Le tableau de signes de la dérivée f'_7 et le tableau de variation de f_7 :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'_7		$+$	$+$
f_7			

CORRECTION DE L'EXERCICE 14 (EXTREMUM)

1) $f(x) = -x^3 + x^2, I = \mathbb{R}$

$$f'(x) = -3x^2 + 2x = x(2 - 3x)$$

Le tableau de signes de la dérivée f' et le tableau de variation de f avec les extremums :

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$		
f'		$-$	0	$+$	0	$-$
f						

2) $f(x) = \sin(x) - x, I = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \cos(x) - 1$$

La dérivée est toujours négative car $\cos(x) \leq 1$, l'égalité se produisant uniquement pour $x = 0[2\pi]$.

Comme la dérivée ne change pas de signe, il ne s'agit pas d'extrémum mais de points d'inflexion.
Le tableau de signes de la dérivée f' et le tableau de variation de f avec les extremums :

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	-	
f		

3) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$, $I =]0; +\infty$

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$$

Le polynôme $x^2 + x + 1$ reste positif sur $\mathbb{R}$ car, son discriminant étant négatif ($\Delta = -3$), il ne s'annule pas.

Le tableau de signes de la dérivée f' et le tableau de variation de f avec les extremums :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'	-		- 0 +	
f				

4) $f(x) = (x-1)^3\sqrt{x}$, $I =]0; +\infty$

$$f'(x) = 3(x-1)^2\sqrt{x} + (x-1)^3\frac{1}{2\sqrt{x}} = (x-1)^2\frac{6x+(x-1)}{2\sqrt{x}} = (x-1)^2\frac{7x-1}{2\sqrt{x}}$$

L'extremum ici est obtenu pour $x = \frac{1}{7}$ et vaut $(\frac{-6}{7})^3\sqrt{\frac{1}{7}} = \frac{-216}{343\sqrt{7}} = \frac{-216\sqrt{7}}{240} \approx -0.238$

Le tableau de signes de la dérivée f' et le tableau de variation de f avec les extremums :

x	0	$\frac{1}{7}$	$+\infty$
f'		- 0 +	
f			

CORRECTION DE L'EXERCICE 15 (DÉRIVÉE DE LA DÉRIVÉE)

$$f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$$

$$f'(x) = e^x - \frac{2x}{2} = e^x - x.$$

La dérivée seconde est $f''(x) = e^x - 1$

$$e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$$

Le signe de $f''(x)$ renseigne sur les variations de f' :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-	0	+
f'			

f' admet donc un minimum égal à 1 pour $x = 0$; f' reste donc toujours positive.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	+	
f		