DS sur les suites des années précédentes

Exercice 1 (Suites définies conjointement (4 points))

On définit les suites (u_n) et (v_n) par les relations

$$u_0 = 1,\ v_0 = -\frac{3}{4},\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + 4v_n) \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{5}(3u_n + 2v_n)$$

a) Calculer u_1 et v_1 puis u_2 et v_2.

b) Écrire un programme qui détermine et affiche u_n et v_n pour toutes les valeurs de n inférieures à un entier $N \geqslant 1$. Donner le programme et ses résultats pour $N = 15$ dans un tableau.

c) On définit la suite (w_n) par la relation $w_n = 3u_n + 4v_n$. Montrer que $w_{n+1} = w_n$; en déduire v_n en fonction de u_n puis u_{n+1} en fonction u_n et v_{n+1} en fonction v_n.

Exercice 2 (Monotonie (4 points))

a) Étudier la monotonie de la suite (u_n) définie par la relation $u_n = 2^n - n$.

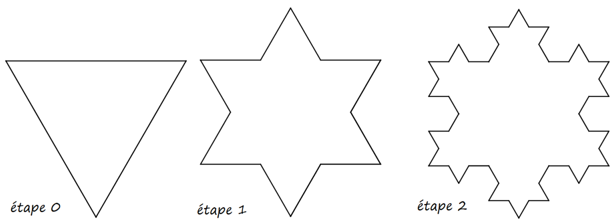
b) Étudier la monotonie de la suite (v_n) définie par la relation $v_n = \frac{n^2}{2^n}$.

c) Étudier la monotonie de la suite (w_n) définie par les relations $w_{n+1} = 2w_n - 1$ et $w_0 = 1,5$. Représenter les premiers termes la suite w en traçant la courbe de la fonction $f : w_n \longmapsto w_{n+1}$, la droite d'équation $y = x$ et en plaçant les termes sur les axes.

Exercice 3 (Flocon de Koch (2 points))

La figure ci-contre présente les premières étapes du flocon : au départ il y a un triangle équilatéral d'aire $a_0 = 1$, et puis à chaque étape on pose au centre de chaque segment un triangle équilatéral trois fois plus petit.

En admettant que l'accroissement de l'aire du flocon en arrivant à l'étape $n \geqslant 1$ est donnée par la relation $a_n - a_{n-1} = \frac{3\times4^{n-1}}{9^n}$, déterminer à partir de quelle étape n cet accroissement devient inférieur à 10^{-9} ; donner alors l'aire a_n du flocon à cette étape.



NB : on réalisera bien sûr cela à l'aide d'un programme, à écrire sur la copie.

Exercice 4 (Suites arithmétiques et géométriques (5 points))

$\boxed{\text{Partie 1 :}}$ On sait que la suite (u_n) vérifie $u_4 = 14$ et $u_6 = 87,5$.

Déterminer u_0 et préciser la relation de récurrence donnant u_{n+1} en fonction de u_n dans les cas :

a) La suite est arithmétique

b) La suite est géométrique

c) La suite est définie par une relation du type $u_{n+1} = au_n + 168$ (déterminer la ou les valeurs de a qui conviennent ; déduire u_0 de la relation $u_n = \frac{u_{n+1}-168}{a}$)

$\boxed{\text{Partie 2 :}}$ On veut calculer une somme $\mathscr{S}$.

Déterminer le type de suite impliqué dans cette somme, puis calculer celle-ci :

a) $\mathscr{S} = 590490 + 393660 + 262440 + \cdots + 10240$

b) $\mathscr{S} = 590490 + 587700 + 584910 + \cdots + 10170$

Exercice 5 (Suites conjointes (5 points))

(u) et (v) sont les suites définies par $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{2n}$.

a) Vérifier que $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{7}{12}$ puis calculer u_3, v_1, v_2 et v_3.

b) Montrer que $\forall n \geqslant 1, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$; en déduire que (u) est croissante.

c) Démontrer que (v) est décroissante puis conjecturer la limite de $(v_n - u_n)$.

d) Écrire un programme qui détermine le rang p à partir duquel $v_n - u_n < 10^{-3}$ et qui affiche les termes u_p et v_p.

Exercice 6 (Suite auxiliaire arithmétique (4 points))

On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \geqslant 1$, par $u_1 = 0, u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$.

a) Calculer les valeurs exactes de u_n pour tout $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 7 (Suite auxiliaire géométrique (4 points))

Dans une réserve, une population animale perd 20% de son effectif chaque année (bilan des naissances et des décès). Pour compenser cette diminution, on introduit chaque année 120 nouveaux animaux. Sachant qu'initialement la population était de $p_0 = 1000$ animaux, on veut étudier la suite (p_n) qui indique le nombre d'animaux de la réserve.

a) Montrer que $p_{n+1} = ap_n + b$ où a et b sont des paramètres à préciser, puis montrer que la suite (q_n) définie par $q_n = p_n - \lambda$ (λ : solution de l'équation $x = ax + b$) est une suite géométrique.

b) Exprimer q_n puis p_n en fonction de n et déterminer la limite de (p_n) ?

Exercice 8 (Nombre d'Apery (2 points))

On pose $\forall n \geqslant 1, u_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}$.

a) Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 1, u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$; en déduire que la suite (u_n) est convergente. La limite de cette suite est notée $\zeta(3)$ et appelée « nombre d'Apery » en mémoire du mathématicien français Robert Apéry qui montra, en 1979, l'irrationnalité de ce nombre.

b) Écrire un programme qui détermine $\zeta(3)$ avec une précision de 10^{-9}
(on sous-entend par là que l'on arrête le calcul lorsque $u_{n+1} - u_n < 10^{-9}$).
Répondre au préalable à la question : pour quelle valeur de n atteint-on cette précision ?
Déterminer avec le programme la valeur de $\zeta(3)$ à la précision de 10^{-9}.

Exercice 9 (Limites (5 points))

a) Étudier le comportement à l'infini des suites (a_n), (b_n) et (c_n) :

$a_n = \frac{2n^2-5}{n+1}$ $\qquad b_n = \frac{a_n}{n^2}$ $\qquad c_n = a_n - 2n$

b) Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{3^n+4^n}{3^n+2^n}$
(factoriser un terme, au numérateur et au dénominateur)

c) Déterminer la limite des suites (v_n) et (w_n) définies par :

$v_n = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{7^n}$ $\qquad w_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \left(\frac{-1}{2}\right)^n$

d) Déterminer la limite de la suite (r_n) définie par $r_n = 0,1919\cdots19$ (n séquences 19)
(utiliser la somme des termes d'une suite géométrique)

e) Étudier le comportement à l'infini des suites (p_n) et (q_n) de terme général :

$p_n = n\cos\frac{1}{n}$ $\qquad q_n = \frac{1}{n}\cos n$

Exercice 10 (Convergences (5 points))

a) On pose $u_1 = 0,2$, $u_2 = 0,23$, $u_3 = 0,235$, etc. (u_n s'écrit 0, suivi des n premiers nombres premiers). Donner un majorant de cette suite, prouver qu'elle est croissante, en déduire qu'elle converge. Sa limite est un réel imaginé par Paul Erdös (1913,1996), mathématicien hongrois célèbre pour son excentricité et très prolifique (plus de 1 500 articles de recherche publiés).

b) On pose, pour $n \geqslant 1, v_n = \frac{3^n}{n^2}$. Étudier la monotonie de la suite (v_n).
Montrer par récurrence que, pour $n \geqslant 13, v_n \geqslant 2^n$. En déduire que (v_n) ne converge pas.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. La solution positive de cette équation est notée φ et appelée « nombre d'or ». Démontrer l'égalité $\sqrt{\varphi + 1} = \varphi$.
On pose $w_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 0, w_{n+1} = \sqrt{w_n + 1}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant w_n \leqslant \varphi$ et aussi que $w_n \leqslant w_{n+1}$. En déduire que la suite (w_n) est convergente et conjecturer sa limite.

Exercice 11 (Série de Leibniz (5 points))

On pose $\forall n \geqslant 0, u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $S_n = 4 \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

a) Déterminer u_n et S_n pour $n \in \{0, 1, 2\}$.

b) Programmer le calcul de S_n sur votre calculatrice (écrire le programme sur la copie).

c) Gottfried Wilhelm Leibniz (1646,1716) donna l'expression exacte de la limite de la suite (S_n). Déterminer, avec votre programme, la valeur de S_n pour $n \in \{10, 100, 1000, 10000\}$, puis conjecturer quelle est cette limite (on la notera λ dans la suite).

d) Archimède (−287,−212) a donné un moyen de déterminer les décimales de λ à l'aide des suites (p_n) et (q_n) définies par $p_1 = 3$, $q_1 = 2\sqrt{3}$, $q_{n+1} = \frac{2p_nq_n}{p_n+q_n}$ et $p_{n+1} = \sqrt{p_nq_{n+1}}$. Déterminer au moyen d'un programme (écrire le programme sur la copie) les valeurs de p_n pour $n \in \{10, 100, 1000, 10000\}$; comparer les vitesses de convergence du procédé d'Archimède et de celui de Leibniz.

Exercice 12 (Suite de points (5 points))

Soient (x_n) et (y_n) deux suites telles que $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = 0$, $x_{n+1} = x_n - \sqrt{3}y_n$ et $y_{n+1} = \sqrt{3}x_n + y_n$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points A_n de coordonnées (x_n, y_n).

a) Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2 puis calculer les distances OA_0, OA_1, OA_2, A_0A_1 et A_1A_2. $\left[\text{Rappel : } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\right]$

b) O étant l'origine du repère, démontrer que la suite (u_n) définie par $u_n = OA_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c) Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = A_nA_{n+1}$ est telle que $v_n = \sqrt{3}u_n$.

d) Faire une figure qui illustre la situation et déduire des questions précédentes que le triangle A_nOA_{n+1} est rectangle en A_n et que l'angle $\widehat{A_nOA_{n+1}}$ est constant (donner sa valeur).

Correction de l'exercice 1 (Suites définies conjointement (4 points))

a) $u_0 = 1$ et $v_0 = -\frac{3}{4} = -0,75$
$u_1 = \frac{1}{5}\left(u_0 + 4v_0\right) = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{3\times 4}{4}\right) = \frac{-2}{5} = -0,4$
$v_1 = \frac{1}{5}\left(3u_0 + 2v_0\right) = \frac{1}{5}\left(3 - \frac{3\times 2}{4}\right) = \frac{3}{10} = 0,3$
$u_2 = \frac{1}{5}\left(u_1 + 4v_1\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{-2}{5} + \frac{6}{5}\right) = \frac{4}{25} = 0,16$
$v_2 = \frac{1}{5}\left(3u_1 + 2v_1\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{-6}{5} + \frac{3}{5}\right) = \frac{-3}{25} = -0,12$

b) Voici un programme en Python qui détermine et affiche u_n et v_n pour $0 \leqslant n \leqslant 15$. La sortie d'exécution (en bleu) est également donnée. J'ai arrondi les valeurs à 6 chiffres après la virgule pour simplifier mais ce n'était pas obligé. On remarque que, pour les deux suites, les termes sont alternativement positifs et négatifs et deviennent de plus en plus proches de 0.

```
def conjoint(N):
    u,v=1,-0.75
    print("u( 0 )=",u," - v( 0 )=",v)
    for n in range(N) :
        u,v=0.2*(u+4*v),0.2*(3*u+2*v)
        print("u(",n+1,")=",round(u,6)," - v(",n+1,")=",round(v,6))

conjoint(15)
```

```
u( 0 )= 1  - v( 0 )= -0.75
u( 1 )= -0.4  - v( 1 )= 0.3
u( 2 )= 0.16  - v( 2 )= -0.12
u( 3 )= -0.064  - v( 3 )= 0.048
u( 4 )= 0.0256  - v( 4 )= -0.0192
u( 5 )= -0.01024  - v( 5 )= 0.00768
u( 6 )= 0.004096  - v( 6 )= -0.003072
u( 7 )= -0.001638  - v( 7 )= 0.001229
u( 8 )= 0.000655  - v( 8 )= -0.000492
u( 9 )= -0.000262  - v( 9 )= 0.000197
u( 10 )= 0.000105  - v( 10 )= -7.9e-05
u( 11 )= -4.2e-05  - v( 11 )= 3.1e-05
u( 12 )= 1.7e-05  - v( 12 )= -1.3e-05
u( 13 )= -7e-06  - v( 13 )= 5e-06
u( 14 )= 3e-06  - v( 14 )= -2e-06
u( 15 )= -1e-06  - v( 15 )= 1e-06
```

c) La suite (w_n) étant définie par la relation $w_n = 3u_n + 4v_n$, on tire $w_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3 - 3 = 0$.
Au rang suivant $w_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3 \times \frac{u_n+4v_n}{5} + 4 \times \frac{3u_n+2v_n}{5} = 3u_n + 4v_n = w_n$.
La suite (w_n) est donc à la fois constante et nulle : $w_0 = w_1 = \cdots = w_n = 0$, tous les termes sont nuls.
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 3u_n + 4v_n = 0$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{-3}{4}u_n$ et aussi $v_{n+1} = \frac{-3}{4}u_{n+1}$.
Comme $v_{n+1} = \frac{3u_n+2v_n}{5} \iff 5v_{n+1} = 3u_n + 2v_n$, en remplaçant les termes de la suite v, on obtient : $3u_n + \frac{-3}{2}u_n = \frac{-15}{4}u_{n+1} \iff u_{n+1} = -\frac{2}{5}u_n$.
On peut alors faire de même pour la suite (v_n) car $v_n = \frac{-3}{4}u_n \iff u_n = \frac{-4}{3}v_n$ et on peut écrire $5v_{n+1} = 3u_n + 2v_n = -4v_n + 2v_n = -2v_n$ ce qui conduit à $v_{n+1} = -\frac{2}{5}v_n$, la même relation de récurrence que pour la suite (u_n), seuls les premiers termes changent.

Correction de l'exercice 2 (Monotonie (4 points))

a) Pour la suite (u_n) calculons :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2^{n+1} - (n+1) - (2^n - n) \\ &= 2^n(2-1) - (n+1) + n \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

La quantité $2^n - 1$ est positive sitôt que $2^n > 1$, c'est-à-dire dès que $n > 0$. La suite (u_n) est donc strictement croissante à partir du rang 1 car $\forall n > 1, u_{n+1} > u_n$. Pour confirmer ce résultat on peut déterminer les premiers termes : $u_0 = 2^0 - 0 = 1$, $u_1 = 2^1 - 1 = 1$, $u_2 = 2^2 - 2 = 2$, etc.

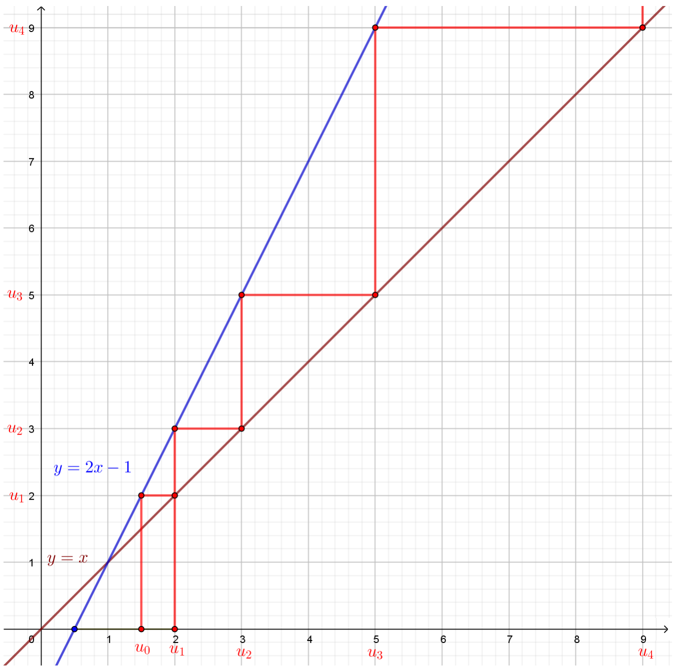
b) Pour la suite (v_n) calculons :

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{(n+1)^2}{2(n+1)} \times \frac{2^n}{n^2} \\ &= \frac{(n+1)^2}{2n^2} \end{aligned}$$

Les termes $v_n = \frac{n^2}{2^n}$ sont tous positifs car, au numérateur on a un carré et au dénominateur une puissance de 2. On en déduit que la position de $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ nous renseigne sur la croissance de la suite.

Or, $\frac{(n+1)^2}{2n^2} < 1 \iff (n+1)^2 < 2n^2 \iff n^2 - 2n - 1 > 0$. Le polynôme $n^2 - 2n - 1$ s'annule pour $n = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$ et est positif à l'extérieur des racines, soit pour $x > 1 + \sqrt{2}$ ou $x < 1 - \sqrt{2}$. En ce qui concerne la suite, seule l'inégalité $x > 1 + \sqrt{2}$ nous intéresse : pour $n > 1 + \sqrt{2} \geqslant 3$ on a $v_{n+1} < v_n$.
La suite v est strictement décroissante à partir du rang 3.
Pour confirmer ce résultat on peut déterminer les premiers termes : $v_0 = \frac{0^2}{2^0} = 0$, $v_1 = \frac{1^2}{2^1} = \frac{1}{2}$, $v_2 = \frac{2^2}{2^2} = 1$, $v_3 = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$, $v_4 = \frac{4^2}{2^4} = 1$, etc.

c) Pour la suite (w_n), la différence $w_{n+1} - w_n = w_n - 1$ ne nous renseigne que si l'on peut montrer que $w_n - 1$ garde un signe constant à partir d'un certain rang. Or comment montrer que l'on a $w_n - 1 > 0 \iff w_n > 1$ ou son contraire ?
Par récurrence :
Pour commencer $w_0 = 1,5 > 1$.
Ensuite, $w_n > 1 \implies 2w_n > 2 \implies 2w_n - 1 > 2 - 1 = 1 \iff w_{n+1} > 1$.
La suite w est donc strictement croissante depuis le début.
Représentons cette suite w à l'aide de la courbe de la fonction $f : x \longmapsto 2x - 1$ qui est telle que $f(u_n) = u_{n+1}$ (droite bleue). Le va et vient entre cette droite et la droite d'équation $y = x$ nous donne les premiers termes de la suite w que l'on observe bien croissante.



Correction de l'exercice 3 (Flocon de Koch (2 points))
L'accroissement de l'aire du flocon en arrivant à l'étape $n \geqslant 1$ étant donné par la relation $a_n - a_{n-1} = \frac{3 \times 4^{n-1}}{9^n}$, l'aire du flocon à l'étape $n \geqslant 1$ est $a_n = a_{n-1} + \frac{3 \times 4^{n-1}}{9^n}$. Il suffit de calculer cette aire a_n, tout en conservant l'aire précédente a_{n-1} jusqu'à ce que la différence soit inférieure à 10^{-9} pour la première fois. Mon programme réalise cela et donne la solution : il faut aller jusqu'à l'étape 26 pour obtenir cette précision du millionième. L'aire du flocon est alors égale à 1, 6.

```
def flocon(p):
    a2,a1,n=1,0,0
    while a2-a1>p :
        n+=1
        a2,a1=a2+3*4**(n-1)/9**n,a2
        print("a(",n,")=",round(a2,9)," - a(",n,")-a(",n-1,")=",round(a2-a1,9))

flocon(10**-9)
```

```
a( 1 )= 1.333333333  - a( 1 )-a( 0 )= 0.333333333
a( 2 )= 1.481481481  - a( 2 )-a( 1 )= 0.148148148
a( 3 )= 1.547325103  - a( 3 )-a( 2 )= 0.065843621
a( 4 )= 1.576588935  - a( 4 )-a( 3 )= 0.029263832
a( 5 )= 1.589595082  - a( 5 )-a( 4 )= 0.013006147
a( 6 )= 1.595375592  - a( 6 )-a( 5 )= 0.00578051
a( 7 )= 1.597944708  - a( 7 )-a( 6 )= 0.002569116
a( 8 )= 1.599086537  - a( 8 )-a( 7 )= 0.001141829
a( 9 )= 1.599594016  - a( 9 )-a( 8 )= 0.00050748
a( 10 )= 1.599819563  - a( 10 )-a( 9 )= 0.000225546
a( 11 )= 1.599919806  - a( 11 )-a( 10 )= 0.000100243
a( 12 )= 1.599964358  - a( 12 )-a( 11 )= 4.4552e-05
a( 13 )= 1.599984159  - a( 13 )-a( 12 )= 1.9801e-05
a( 14 )= 1.59999296  - a( 14 )-a( 13 )= 8.8e-06
a( 15 )= 1.599996871  - a( 15 )-a( 14 )= 3.911e-06
a( 16 )= 1.599998609  - a( 16 )-a( 15 )= 1.738e-06
a( 17 )= 1.599999382  - a( 17 )-a( 16 )= 7.73e-07
a( 18 )= 1.599999725  - a( 18 )-a( 17 )= 3.43e-07
a( 19 )= 1.599999878  - a( 19 )-a( 18 )= 1.53e-07
a( 20 )= 1.599999946  - a( 20 )-a( 19 )= 6.8e-08
a( 21 )= 1.599999976  - a( 21 )-a( 20 )= 3e-08
a( 22 )= 1.599999989  - a( 22 )-a( 21 )= 1.3e-08
a( 23 )= 1.599999995  - a( 23 )-a( 22 )= 6e-09
a( 24 )= 1.599999998  - a( 24 )-a( 23 )= 3e-09
a( 25 )= 1.599999999  - a( 25 )-a( 24 )= 1e-09
a( 26 )= 1.6  - a( 26 )-a( 25 )= 1e-09
```

Correction de l'exercice 4 (Suites arithmétiques et géométriques (5 points))

Partie 1 :

a) la suite (u_n) qui vérifie $u_4 = 14$ et $u_6 = 87,5$ est arithmétique de raison r.
Comme $u_6 = 87,5 = u_5 + r = u_4 + 2r = 14 + 2r$, on en déduit $r = \frac{87,5-14}{2} = 36,75$.
On a donc $u_{n+1} = u_n + 36,75$ et $u_4 = u_0 + 4 \times 36,75 = u_0 + 147$.
On en tire $u_0 = u_4 - 147 = 14 - 147 = -133$.

b) la suite (u_n) qui vérifie $u_4 = 14$ et $u_6 = 87,5$ est géométrique de raison q.
Comme $u_6 = 87,5 = u_5 \times q = u_4 \times q^2 = 14 \times q^2$, on en déduit $q^2 = \frac{87,5}{14} = 6,25$.
Il y a deux possibilités : $q = \pm\sqrt{6,25} = \pm 2,5$. On a donc $u_{n+1} = u_n \times 2,5$ ou $u_{n+1} = u_n \times (-2,5)$ mais dans tous les cas $u_4 = u_0 \times 2,5^4 = u_0 \times 39,0625$.
On en tire $u_0 = \frac{u_4}{39,0625} = \frac{14}{39,0625} = 0,3584$.

c) La suite (u_n) qui vérifie $u_4 = 14$ et $u_6 = 87,5$ est définie par $u_{n+1} = au_n + 168$
Comme $u_6 = 87,5 = au_5 + 168 = a(au_4 + 168) + 168 = a^2u_4 + 168(a+1) = 14a^2 + 168(a+1)$, on en déduit que a est solution de l'équation $14a^2 + 168(a+1) - 87,5 = 0 \iff 14a^2 + 168a + 80,5 = 0$.
Le discriminant est $\Delta = 168^2 - 4 \times 14 \times 80,5 = 23716 = 154^2$.
Il y a deux possibilités : $a = \frac{-168+154}{28} = -\frac{1}{2}$ et $a = \frac{-168-154}{28} = -\frac{23}{2}$.
Comme $u_n = \frac{u_{n+1}-168}{a}$, on en déduit que $u_3 = \frac{u_4-168}{a}$, $u_2 = \frac{u_3-168}{a} = \frac{\frac{u_4-168}{a}-168}{a}$, et finalement $u_0 = \frac{u_1-168}{a} = \frac{\frac{u_2-168}{a}-168}{a} = \frac{\frac{\frac{u_3-168}{a}-168}{a}-168}{a} = \frac{\frac{\frac{\frac{u_4-168}{a}-168}{a}-168}{a}-168}{a}$ (on peut aussi utiliser la fonction suite de la calculatrice).
En prenant pour a, la solution $a = -\frac{1}{2}$, cela donne $u_0 = -1456$ (et $u_1 = 896$, $u_2 = -280$, $u_3 = 308$).
Avec la solution $a = -\frac{23}{2}$, cela donne $u_0 \approx 13,44003$ (et $u_1 \approx 13,43963$, $u_2 \approx 13,44423$, $u_3 \approx 13,3913$).

Partie 2 :

a) Si $u_0 = 590490$, $u_1 = 393660$ et $u_2 = 262440$, on a $\frac{u_1}{u_0} = \frac{393660}{590490} = \frac{2}{3}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{262440}{393660} = \frac{2}{3}$.
La suite semble être géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$.
Quel rang a le dernier terme de la somme ?
On doit avoir $10240 = 590490 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \iff \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{10240}{590490}$;
en tâtonnant sur la calculatrice, je trouve $\left(\frac{2}{3}\right)^{10} = \frac{1024}{59049}$.

Le dernier terme, 10240, est donc le terme u_{10} de cette suite géométrique.
La somme $\mathscr{S}$ vaut $590490 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{11}}{1-\frac{2}{3}} = 1\,750\,990$.

b) Si $u_0 = 590490$, $u_1 = 587700$ et $u_2 = 584910$, on a
$u_1 - u_0 = 587700 - 590490 = -2790$ et $u_2 - u_1 = 584910 - 587700 = -2790$.
La suite semble être arithmétique de raison $r = -2790$.
Quel rang a le dernier terme de $\mathscr{S}$? $10170 = 590490 + n \times (-2790) \iff n = \frac{10170-590490}{-2790} = 208$.
Le dernier terme, 10170, est donc le terme u_{208} de cette suite arithmétique.
La somme $\mathscr{S}$ vaut $209 \times \frac{10170+590490}{2} = 62\,768\,970$.

Correction de l'exercice 5 (Suites conjointes (5 points))
(u) et (v) sont les suites définies par $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{2n}$.

a) $u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0,5$
$u_2 = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3+4}{3\times 4} = \frac{7}{12} \approx 0,583$
$u_3 = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3+2} + \frac{1}{3+3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{15+12+10}{60} = \frac{37}{60} \approx 0,616$

$v_1 = u_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
$v_2 = u_2 + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} + \frac{1}{4} = \frac{5}{6} \approx 0,833$
$v_3 = u_3 + \frac{1}{6} = \frac{37}{60} + \frac{1}{6} = \frac{47}{60} \approx 0,783$

b) Calculons :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{(2n+2)+(2n+1)-2(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= \frac{2n+2+2n+1-4n-2}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}
\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$ (car $n > 0$), on a aussi $u_{n+1} - u_n > 0 \iff u_{n+1} > u_n$.
La suite (u) est croissante.

c)

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(u_n + \frac{1}{2n}\right) \\
&= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{2n-(2n+2)}{2n(2n+2)} \\
&= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{-1}{n(2n+2)} \\
&= \frac{n-(2n+1)}{n(2n+1)(2n+2)} \\
&= \frac{-(n+1)}{2n(2n+1)(n+1)} \\
&= \frac{-1}{2n(2n+1)}
\end{aligned}$$

Comme $\frac{-1}{2n(2n+1)} < 0$ on a aussi $v_{n+1} - v_n < 0 \iff v_{n+1} < v_n$.
La suite (v) est décroissante.
Le terme général $v_n - u_n = \frac{1}{2n}$ de la suite $(v_n - u_n)$ a pour limite 0 en $+\infty$.
La suite $(v-u)$ converge vers 0.

d) On peut remarque que $v_n - u_n = \frac{1}{2n} < 10^{-3} \iff 2n > 10^3 \iff n > 500$.
Le programme doit calculer et afficher u_{501} et v_{501}.
En voici un écrit en Python qui réalise cela. J'ai écrit une boucle « while » pour la version de gauche (cette version nécessite une boucle imbriquée « pour » afin de calculer les termes de la suite u) et une simple boucle « pour » pour celle de droite. Les résultats coïncident (heureusement !) pour donner les mêmes résultats.

```
n,u,v=1,1/2,1
while v-u>0.001:
    n,u,v=n+1,0,0
    for i in range(1,n+1):
        u=u+1/(n+i)
    v=u+1/(2*n)
print("u(",n,")=",u)
print("v(",n,")=",v)
```

```
u( 501 )= 0.692648427566805
v( 501 )= 0.693646431558821
```

```
n,u,v=501,0,0
for i in range(1,n+1):
    u=u+1/(n+i)
v=u+1/(2*n)
print("u(",n,")=",u)
print("v(",n,")=",v)
```

```
u( 501 )= 0.692648427566805
v( 501 )= 0.693646431558821
```

Correction de l'exercice 6 (Suite auxiliaire arithmétique (4 points))

On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \geqslant 1$, par $u_1 = 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$.

a) $u_1 = 0$
$u_2 = \frac{1}{2-u_1} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$
$u_3 = \frac{1}{2-u_2} = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$
$u_4 = \frac{1}{2-u_3} = \frac{1}{2-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$
$u_5 = \frac{1}{2-u_4} = \frac{1}{2-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$.

b) Si $v_n = \frac{1}{u_n-1}$ alors $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}-1} = \frac{1}{\frac{1}{2-u_n}-1} = \frac{2-u_n}{1-(2-u_n)} = \frac{2-u_n}{u_n-1} = \frac{1-(u_n-1)}{u_n-1} = \frac{1}{u_n-1} - 1 = v_n - 1$.
La suite (v_n) est une suite arithmétique dd premier terme $v_1 = \frac{1}{u_1-1} = -1$ et de raison $r = -1$.

c) On en déduit $v_n = v_1 + (n-1) \times (-1) = -1 + (n-1) \times (-1) = -n$ et $u_n = 1 + \frac{1}{v_n} = 1 - \frac{1}{n}$.
Vérifications : $u_1 = 1 - \frac{1}{1} = 0$, $u_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $u_3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $u_4 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, etc.

Correction de l'exercice 7 (Suite auxiliaire géométrique (4 points))

a) D'après l'énoncé $p_{n+1} = p_n - \frac{20}{100}p_n + 120 = p_n(1 - \frac{20}{100}) + 120 = 0,8p_n + 120$.
p_{n+1} est bien de la forme $ap_n + b$ où $a = 0,8$ et $b = 120$.
λ est la solution de l'équation $x = 0,8x + 120 \iff 0,2x = 120 \iff x = \frac{120}{0,2} = 600$.
Si $q_n = p_n - 600$ alors $q_{n+1} = p_{n+1} - 600 = 0,8p_n + 120 - 600 = 0,8p_n - 480 = 0,8(p_n - 600) = 0,8q_n$.
La suite (q_n) est une suite géométrique de premier terme $q_0 = p_0 - 600 = 1000 - 600 = 400$ et de raison $q = 0,8$.

b) On en déduit $q_n = q_0 \times 0,8^n = 400 \times 0,8^n$ et $p_n = q_n + 600 = 400 \times 0,8^n + 600$.
Vérifications : $p_0 = 400 \times 0,8^0 + 600 = 400 + 600 = 1000$, $p_1 = 400 \times 0,8 + 600 = 400 + 600 = 920$ qui est bien égal à $p_1 = 0,8p_0 + 120 = 800 + 120$, etc.

La limite de (p_n) est égale à 600 car le terme $400 \times 0,8^n$ devient aussi proche de 600 que l'on veut. Pour s'en convaincre, il suffit de déterminer la valeur de n pour laquelle p_n devient aussi proche de 600 que l'on veut : pour cela, utilisons un programme très simple qui contient une boucle « while ». Je détermine n pour laquelle p_n devient inférieur à 650 : pour $n = 10$. J'ai mis une version avec la définition par récurrence (à gauche) et une version avec la définition explicite (à droite).

```
u=1000
n=0
M=650
while u>M:
    n=n+1
    u=0.8*u+120
print("u(",n,")=",u)
```

```
u( 10 )= 642.9496729600002
```

```
u=1000
n=0
M=650
while u>M:
    n=n+1
    u=400*0.8**n+600
print("u(",n,")=",u)
```

```
u( 10 )= 642.94967296
```

Correction de l'exercice 8 (Nombre d'Apery (2 points))

a) Montrons par récurrence que $\forall n \geqslant 1, u_n \leqslant 2-\frac{1}{n}$:

- pour $n=1$, on a $u_1 \leqslant 2-\frac{1}{1}=1$. En effet, $u_1=\frac{1}{1^3}=1 \leqslant 1$. La relation est vraie au rang $n=1$.
- supposons que la relation soit vraie au rang n, que l'on ait $u_n \leqslant 2-\frac{1}{n}$. Au rang $n+1$, on a $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{(n+1)^3}$. Comme $u_n \leqslant 2-\frac{1}{n}$, on a $u_n+\frac{1}{(n+1)^3} \leqslant 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^3}$ soit $u_{n+1} \leqslant 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^3}$. Est-ce que l'on a toujours $2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^3}<2-\frac{1}{n+1}$?
  Oui, c'est ce que nous devons montrer.

$$\begin{aligned}
2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^3}<2-\frac{1}{n+1} &\Longleftrightarrow \frac{1}{(n+1)^3}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{(n+1)^3}<\frac{1}{n(n+1)}\\
&\Longleftrightarrow (n+1)^3>n(n+1)\\
&\Longleftrightarrow (n+1)^2>n\\
&\Longleftrightarrow n^2+n+1>0
\end{aligned}$$

Comme ce polynôme a un discriminant négatif ($\Delta=1-4$), il reste toujours du même signe, ici positif. La relation est donc toujours vraie ce qui achève la démonstration.

D'après ce qui précède, tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 2. La suite est bornée (tous les termes sont positifs). Or elle est évidemment croissante (on ajoute un terme positif à chaque étape). Forcément elle admet une limite comprise entre 0 et 2 que l'on va noter $\zeta(3)$ comme indiqué dans l'énoncé.

b) Déterminons $\zeta(3)$ avec une précision de 10^{-9} (tant que $u_{n+1}-u_n<10^{-9}$) :
Pour atteindre cette précision, on doit avoir $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^3}<10^{-9} \Longleftrightarrow (n+1)^3>10^9 \Longleftrightarrow n+1>10^3$.
il suffit donc de calculer u_{1000}. On trouve $\zeta(3) \approx 1,2020564036593433$.

```
s,n=0,0
while n<1000:
    n=n+1
    s=s+1/n**3
print("s(",n,")=",s)
```

```
s( 1000 )= 1.2020564036593433
```

Correction de l'exercice 9 (Limites (5 points))

a) Étudions le comportement à l'infini des suites (a_n), (b_n) et (c_n) :
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^2-5}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n}{1}=+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=+\infty$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^2-5}{n^2(n+1)}=\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n^3}=\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n}=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=0$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n-2n=\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2n^2-5}{n+1}-\frac{2n(n+1)}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^2-5-2n(n+1)}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-5-2n}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2n}{n}=-2$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=-2$.

b) Déterminons la limite de la suite (u_n) :
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^n+4^n}{3^n+2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^n\left(1+\left(\frac{4}{3}\right)^n\right)}{3^n\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\left(\frac{4}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty.$

c) Déterminons la limite des suites (v_n) et (w_n) :
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\cdots+\frac{1}{7^n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{7}\times\frac{1-\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1-\frac{1}{7}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{7}\times\frac{1}{\frac{6}{7}} = \frac{1}{6}.$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$

d) Déterminons la limite de la suite (r_n) :
$\lim\limits_{n\to+\infty} 19\times\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\cdots+\frac{1}{100^n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 19\times\left(\frac{1}{100}\times\frac{1-\left(\frac{1}{100}\right)^n}{1-\frac{1}{100}}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 19\times\frac{1}{100}\times\frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{19}{99}.$

e) Étudions le comportement à l'infini des suites (p_n) et (q_n) :
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\frac{1}{n} = \cos 0 = 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} n\cos\frac{1}{n} = +\infty$.
Pour éviter d'appliquer un résultat non étudié (limite d'une composition de fonctions), on peut remarquer que $n \geqslant 1 \Longrightarrow \frac{1}{n} \leqslant 1 \Longrightarrow \cos\frac{1}{n} \geqslant \cos 1 \approx 0,54$, soit $\cos\frac{1}{n} > 0,5$ et, par conséquent $n\cos\frac{1}{n} > 0,5n$.
Comme, de plus, $\forall n\in\mathbb{N}, \cos\frac{1}{n} < 1$, on obtient l'encadrement $0,5n < n\cos\frac{1}{n} < n$.
D'après le théorème des gendarmes, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5n = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n\cos\frac{1}{n} = +\infty$.
Comme $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}\cos n \leqslant \frac{1}{n}$.
D'après le théorème des gendarmes, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\cos n = 0$.

Correction de l'exercice 10 (Convergences (5 points))

a) La suite de Erdös est croissante : $u_1 = 0,2$, $u_2 = 0,23$, $u_3 = 0,235$, $u_4 = 0,2357$, $u_5 = 0,235711$, etc. car on passe de u_n à u_{n+1} en ajoutant un nombre positif (le $(n+1)^{ime}$ nombre premier divisé par la puissance de 10 qui convient). Cette suite est majorée par 1 et aussi par $0,24$ ou $0,235712$ puisque, selon son procédé de fabrication, aucune terme n'allant augmenter les chiffres déjà écrits, on peut majorer la suite entière en prenant n'importe quel terme auquel on ajoute 1 à son dernier chiffre. La suite converge car elle est croissante et majorée. Sa limite n'est pas connue mais on peut en calculer autant de décimales que l'on souhaite.

b) Les termes de la suite v étant tous strictement positifs à partir de $n = 1$, étudions

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3^{n+1}n^2}{3^n(n+1)^2} = \frac{3n^2}{(n+1)^2}$$

La suite est croissante si et seulement si $\frac{3n^2}{(n+1)^2} > 1 \Longleftrightarrow 3n^2 > (n+1)^2 \Longleftrightarrow 2n^2-2n-1 > 0$.
Le discriminant de ce trinôme étant positif, celui-ci s'annule pour deux valeurs dont la plus grande est $\frac{2+\sqrt{12}}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1,366$. La suite v est donc strictement croissante à partir de $n = 2$.
La relation $v_n \geqslant 2^n$ est vraie pour $n = 13$ car $v_{13} = \frac{3^{13}}{13^2} \approx 9433$ et $2^n = 2^{13} = 8192 < 9433$.
Supposons que $v_n \geqslant 2^n$ et montrons qu'alors $v_{n+1} \geqslant 2^{n+1}$:
$v_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}$ or $\frac{3^n}{n^2} \geqslant 2^n \Longleftrightarrow \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2n^2} \geqslant \frac{3\times2^n}{(n+1)^2} \Longleftrightarrow v_{n+1} \geqslant \frac{3\times2^n\times n^2}{(n+1)^2}$;
la relation que l'on doit montrer s'écrit donc $\frac{3\times2^n\times n^2}{(n+1)^2} \geqslant 2^{n+1} \Longleftrightarrow 3n^2 \geqslant 2(n+1)^2 \Longleftrightarrow n^2-4n-2 \geqslant 0$.
Le trinôme de cette inéquation a un discriminant positif, il s'annule pour deux valeurs dont la plus grande est $\frac{4+\sqrt{24}}{2} = 2+\sqrt{6} \approx 4,449$. Á partir de $n = 5$, le trinôme est positif et l'inéquation vérifiée.
Cela achève donc cette démonstration : à partir de $n \geqslant 13$ on a $v_n \geqslant 2^n$.
Les termes de la suite v dépassent ceux de la suite géométrique de raison 2 qui est connue pour diverger vers $+\infty$. Par conséquent celle-ci aussi diverge vers $+\infty$.

c) L'équation $x^2-x-1 = 0$ a pour solutions $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. La solution positive est $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$.
Comme φ vérifie l'égalité, on a $\varphi^2-\varphi-1 = 0 \Longleftrightarrow \varphi+1 = \varphi^2$. En prenant la racine carrée de cette égalité, on obtient $\sqrt{\varphi+1} = \varphi$.
Montrons par récurrence que $0 \leqslant w_n \leqslant \varphi$:
Pour $n = 0$, comme $w_0 = 0$, on a bien $0 \leqslant w_0 \leqslant \varphi$.
Supposons que $0 \leqslant w_n \leqslant \varphi$ et montrons que $0 \leqslant w_{n+1} \leqslant \varphi \Longleftrightarrow 0 \leqslant \sqrt{w_n+1} \leqslant \varphi$. Comme les nombres de cet encadrement sont tous positifs, élevons-le au carré (cala ne change pas le sens des

inégalités) : $0 \leqslant w_n + 1 \leqslant \varphi^2$. $0 \leqslant w_n + 1$ est vraie car $0 \leqslant w_n \iff 1 \leqslant w_n + 1$ et $w_n + 1 \leqslant \varphi^2$ est vraie aussi car elle équivaut à $w_n \leqslant \varphi^2 - 1$ et comme $\varphi^2 - 1 = \varphi$, elle équivaut finalement à $w_n \leqslant \varphi$ ce qui est précisément contenu dans l'hypothèse. La suite (w_n) est donc bornée. Montrons qu'elle est croissante, c'est-à-dire que $w_n \leqslant w_{n+1} \iff w_n \leqslant \sqrt{w_n+1} \iff w_n^2 - w_n - 1 \leqslant 0$.
Pour $n = 0$, comme $w_0 = 0$, on a bien $w_n^2 - w_n - 1 = -1 \leqslant 0$.
Supposons que $w_n^2 - w_n - 1 \leqslant 0$ et montrons que $w_{n+1}^2 - w_{n+1} - 1 \leqslant 0$. Remplaçons w_{n+1} par $\sqrt{w_n+1}$: $w_n + 1 - \sqrt{w_n+1} - 1 \leqslant 0 \iff w_n \leqslant \sqrt{w_n+1}$. En élevant cette inégalité au carré on retombe sur l'hypothèse réputée vraie. La suite (w_n) est donc croissante et majorée par φ, par conséquent elle convergente. Sa limite est φ car elle doit vérifier l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ et être positive (la suite étant minorée par 0). Pourquoi doit-elle vérifier $x^2 - x - 1 = 0$? car les limites de w_{n+1} et w_n sont égales, ce qui s'écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n \iff \sqrt{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n + 1} = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ et cette égalité élevée au carré s'écrit, en remplaçant $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ par l : $l + 1 = l^2 \iff l^2 - l - 1 = 0$, équation qui a pour solution positive $l = \varphi$.

Archimède — Gottfried Wilhelm Leibniz — Paul Erdős

Correction de l'exercice 11 (Série de Leibniz (5 points))

a) $u_0 = \frac{(-1)^0}{2\times0+1} = 1$ et $S_0 = 4u_0 = 4$

$u_1 = \frac{(-1)^1}{2\times1+1} = \frac{-1}{3}$ et $S_1 = 4 \times (u_0 + u_1) = 4 \times (1 - \frac{1}{3}) = \frac{8}{3} \approx 2,67$

$u_2 = \frac{(-1)^2}{2\times2+1} = \frac{1}{5}$ et $S_2 = 4 \times (u_0 + u_1 + u_2) = 4 \times (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}) = \frac{52}{15} \approx 3,47$

b et c) Programmons le calcul de S_n pour la calculatrice. J'ai écrit comme d'habitude une solution en Python. Ce que doit faire le programme : déterminer le nouveau terme u à ajouter à la somme S ; ce n'est qu'à la fin (en sortie de boucle) que l'on multiplie par 4.

```
def leibniz(n):
    s=0
    for i in range(n+1):
        u=(-1)**i/(2*i+1)
        s=s+u
    print(n,4*s)
```

```
leibniz(0)        0 4.0
leibniz(1)        1 2.666666666666667
leibniz(2)        2 3.466666666666667
leibniz(10)       10 3.232315809405594
leibniz(100)      100 3.1514934010709914
leibniz(1000)     1000 3.1425916543395442
leibniz(10000)    10000 3.1416926435905346
```

On peut conjecturer que la limite λ de cette suite est le nombre π. On constate que la convergence n'est pas très rapide : après 1000 termes, on n'a que 2 chiffres corrects après la virgule.

d) Les suites (p_n) et (q_n) d'Archimède définies par $p_1 = 3$, $q_1 = 2\sqrt{3}$, $q_{n+1} = \frac{2p_nq_n}{p_n+q_n}$ et $p_{n+1} = \sqrt{p_nq_{n+1}}$ convergent plus rapidement vers π. Le programme ci-dessous permet d'en calculer quelques termes. Pour vérifier qu'il fonctionne déterminons les termes suivants :

$q_2 = \frac{2\times3\times2\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} = 24 - 12\sqrt{3} \approx 3,21539$ et $p_2 = \sqrt{p_1q_2} = \sqrt{3\,(24-12\sqrt{3})} = \sqrt{72 - 36\sqrt{3}} \approx 3,105828$.

```
from math import sqrt
def archimede(n):
    p,q=3,2*sqrt(3)
    for i in range(1,n):
        q=(2*p*q)/(p+q)
        p=sqrt(p*q)
    print(n,p)
```

```
archimede(1)        1 3
archimede(2)        2 3.1058285412302493
archimede(10)       10 3.1415921059992713
archimede(100)      100 3.141592653589792
archimede(1000)     1000 3.141592653589792
archimede(10000)    10000 3.141592653589792
```

Remarquez qu'il faut ici déterminer q_{n+1} en premier puisque sa valeur est utilisée pour le calcul de p_{n+1} (certains ont mal lu et ont confondu $\sqrt{p_nq_{n+1}}$ et $\sqrt{p_nq_n+1}$), il faut bien reconnaître que ces deux expressions se ressemblent...
Les vitesses de convergence du procédé d'Archimède et de celui de Leibniz sont sans commune mesure : avec seulement 10 termes, le procédé d'Archimède donne déjà 6 décimales exactes !

Correction de l'exercice 12 (Suite de points (5 points))

a) Coordonnées du point A_0 : $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = 0$.

Coordonnées du point A_1 : $x_1 = x_0 - \sqrt{3}y_0 = \frac{1}{2}$, $y_1 = \sqrt{3}x_0 + y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Coordonnées du point A_2 : $x_2 = x_1 - \sqrt{3}y_1 = \frac{1}{2} - \frac{(\sqrt{3})^2}{2} = -\frac{2}{2} = -1$, $y_2 = \sqrt{3}x_1 + y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

La distance $OA_0 = \sqrt{x_{A_0}^2 + y_{A_0}^2} = \sqrt{\frac{1}{2^2} + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

La distance $OA_1 = \sqrt{x_{A_1}^2 + y_{A_1}^2} = \sqrt{\frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^2}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

La distance $OA_2 = \sqrt{x_{A_2}^2 + y_{A_2}^2} = (-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = \sqrt{1+3} = 2$

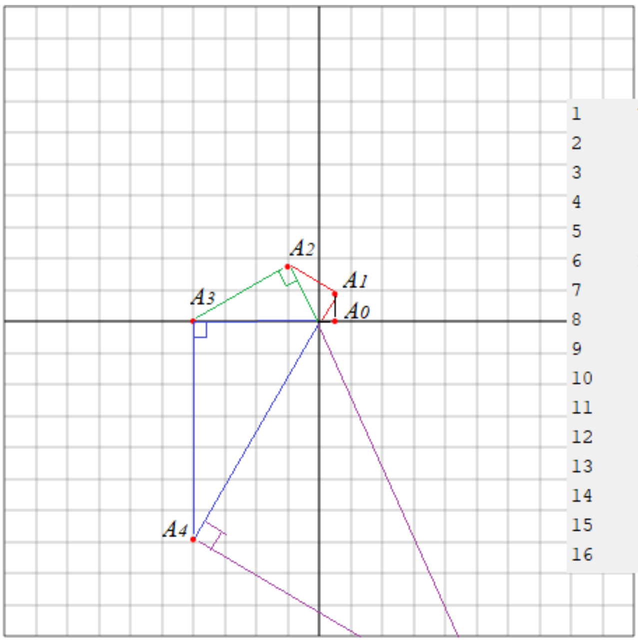
La distance $A_0A_1 = \sqrt{(x_{A_0} - x_{A_1})^2 + (y_{A_0} - y_{A_1})^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

La distance $A_1A_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + 1\right)^2 + \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$

b) Si $u_n = OA_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ alors $u_{n+1} = OA_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2} = \sqrt{(x_n - \sqrt{3}y_n)^2 + (\sqrt{3}x_n + y_n)^2} = \sqrt{4x_n^2 + 4y_n^2} = 2\sqrt{x_n^2 + y_n^2} = 2OA_n$. La suite u est une suite géométrique de raison 2.

c) Calculons $v_n = A_nA_{n+1} = \sqrt{\left(x_{A_n} - x_{A_{n+1}}\right)^2 + \left(y_{A_n} - y_{A_{n+1}}\right)^2} = \sqrt{(x_n - x_{n+1})^2 + (y_n - y_{n+1})^2} = \sqrt{\left(x_n - x_n + \sqrt{3}y_n\right)^2 + \left(y_n - \sqrt{3}x_n - y_n\right)^2} = \sqrt{3y_n^2 + 3x_n^2} = \sqrt{3}\sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \sqrt{3}u_n$.

d) Faisons une figure avec les premiers points de cette suite de points. J'ai opté pour un programme avec Algobox car cet exercice est extrait de votre manuel Belin (activité 2 page 128) et il y était mentionné ce programme Algobox.




```
VARIABLES
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  I EST_DU_TYPE NOMBRE
  X EST_DU_TYPE LISTE
  Y EST_DU_TYPE LISTE
DEBUT_ALGORITHME
  X[0] PREND_LA_VALEUR 0.5
  Y[0] PREND_LA_VALEUR 0
  LIRE N
  POUR I ALLANT_DE 0 A N
    DEBUT_POUR
    TRACER_POINT (X[I],Y[I])
    X[I+1] PREND_LA_VALEUR X[I]-sqrt(3)*Y[I]
    Y[I+1] PREND_LA_VALEUR sqrt(3)*X[I]+Y[I]
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

Xmin: -10 ; Xmax: 10 ; Ymin: -10 ; Ymax: 10 ; GradX: 1 ; GradY: 1

Le triangle A_nOA_{n+1} est rectangle en A_n si et seulement si les distances vérifient la relation de Pythagore $OA_{n+1}^2 = OA_n^2 + A_{n+1}A_n^2$. Comme on vient de le montrer $OA_{n+1} = 2OA_n$ et donc $OA_{n+1}^2 = 4OA_n^2$. D'autre part, on sait aussi que $A_nA_{n+1} = \sqrt{3}OA_n$ et donc $A_nA_{n+1}^2 = 3OA_n^2$. On peut en déduire que, pour tout n, on a $A_nO^2 + A_{n+1}A_n^{=}OA_n^2 + 3OA_n^2 = 4OA_n^2 = OA_{n+1}^2$. Les triangles A_nOA_{n+1} sont toujours rectangles.

La mesure de l'angle $\widehat{A_nOA_{n+1}}$ est connue par un rapport trigonométrique : comme $A_nA_{n+1} = \sqrt{3}OA_n$, on en déduit que $\frac{A_nA_{n+1}}{OA_n} = \sqrt{3}$, or $\frac{A_nA_{n+1}}{OA_n} = \tan \widehat{A_nOA_{n+1}}$.

L'angle mesure $\widehat{A_nOA_{n+1}} = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$.