DS n°4 : Suites

Exercice 1 (Suite Récurrente Simple (5 points))

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier $n > 0$ par $u_{n+1} = \frac{4}{4-u_n}$.

a) À l'aide de la calculatrice, tracer la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \frac{4}{4-x}$ pour $x \in [0;2]$ ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$. Placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis construire u_1, u_2 et u_3 en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ (laisser les traits de construction).

b) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $0 < u_n < 2$.

c) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-2)^2}{4-u_n}$. La suite (u_n) est-elle monotone ?

d) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $v_n = \frac{1}{u_n-2}$.
Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{-1}{2}$.

e) En déduire v_n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 2 (Suite Récurrente Double (5 points))

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}+u_n}{2}$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

a) Calculer u_2 et u_3 ; la suite (u_n) semble t-elle monotone ?

b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$.
Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le 1er terme.

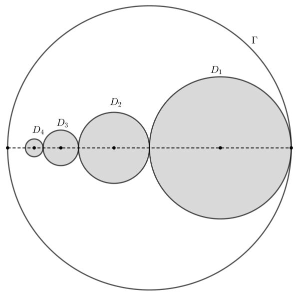
c) En déduire $s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$ puis u_n en fonction de n.

d) Déterminer la limite de u_n.

Exercice 3 (Suite de disques (5 points))

Rappel : l'aire d'un disque de rayon r est donnée par la formule $A = \pi r^2$.

On considère, pour tout entier n, une suite de disques tangents (D_n) illustrée sur la figure ci-contre.
Le rayon du grand disque Γ est R, celui de D_1 est $\frac{R}{2}$, celui de D_2 est $\frac{R}{4}$ et ainsi de suite, le rayon de D_{n+1} est la moitié de celui de D_n.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, d_n désigne le diamètre du disque D_n et la somme $d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ est notée L_n.



a) Exprimer L_n en fonction de n et R.

b) Montrer que la réunion de tous les disques D_n reste à l'intérieur du grand disque Γ.

c) On désigne par A_n l'aire de la partie du plan obtenue par la réunion des disques $D_1, D_2, \ldots, D_n$ (l'aire de la partie grisée sur l'illustration est A_4).
Montrer que la suite A_n converge et déterminer sa limite.

Exercice 4 (Somme harmonique (5 points))

On considère la suite (S_n) de terme général $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $S_{2n} \geqslant \frac{1}{2} + S_n$.

b) Démontrer par récurrence sur k que, pour tout k, il existe n tel que $S_n \geqslant k$.
En déduire que la suite (S_n) est divergente et donner sa limite éventuelle.

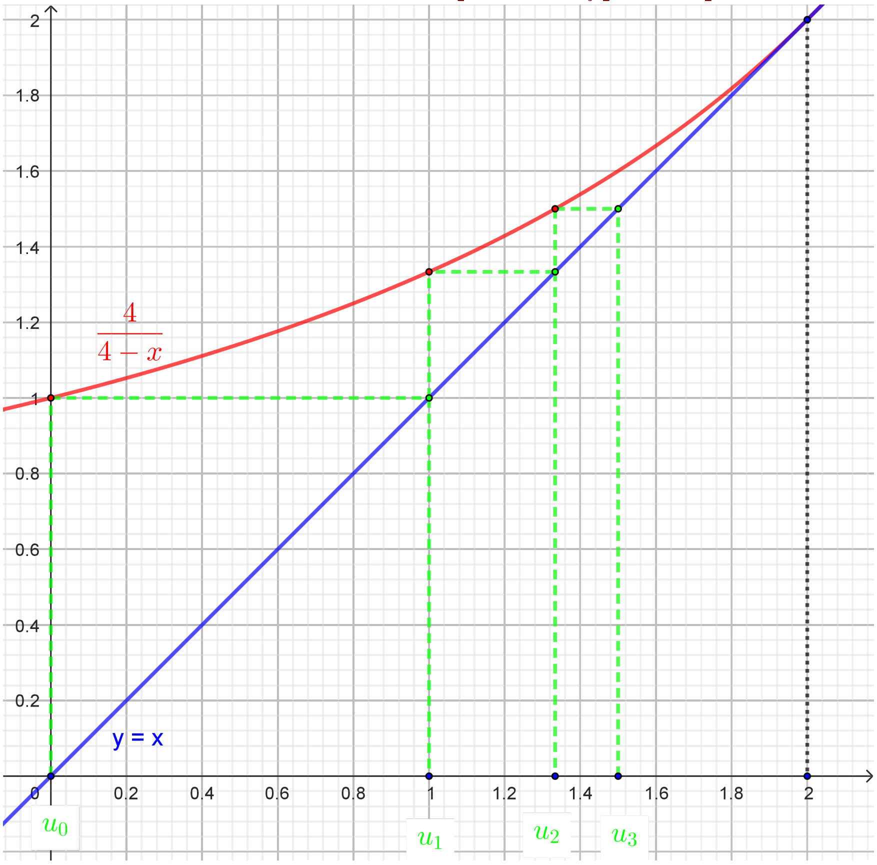
c) Écrire une fonction Python prenant k en argument et renvoyant la valeur de n telle que $S_n \geqslant k$.
Mettre dans un tableau les valeurs de n ainsi obtenue pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Exercice 5 (BONUS (2 points))

Donner une définition explicite de u_n et étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ pour une suite (u_n) de terme général $u_{n+1} = \sqrt{2}u_n - 1$ et de premier terme $u_0 = \sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 1 (Suite récurrente simple (5 points))

a) Je trace la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \frac{4}{4-x}$ pour $x \in [0;2]$ ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.
Je place u_0 sur l'axe des abscisses et construis u_1, u_2 et u_3 en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ (la construction en escalier caractéristique de ce type de représentation est tracée en vert)



On constate que la suite (u_n) est croissante et on peut conjecturer que sa limite est 2. Les valeurs de u_1, u_2 et u_3 semblent être 1, $\frac{4}{3}$ et 1,5.

b) Démontrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $0 < u_n < 2$:

- pour $n = 1$, $u_1 = \frac{4}{4-u_0} = \frac{4}{4-0} = \frac{4}{4} = 1$ et $0 < 1 < 2$. La propriété est vraie au rang 1.
- supposons que pour un rang $n \geqslant 1$, on ait $0 < u_n < 2$.
  On a alors $-2 < -u_n < 0 \iff 4-2 < 4-u_n < 4+0 \iff 2 < 4-u_n < 4$ et, en inversant cet encadrement de nombres positifs $\frac{1}{4} < \frac{1}{4-u_n} < \frac{1}{2} \iff \frac{4}{4} < \frac{4}{4-u_n} < \frac{4}{2} \iff 1 < u_{n+1} < 2$ d'où, à fortiori, $0 < u_{n+1} < 2$.
- la propriété étant vraie au rang 1, se propage par hérédité, successivement, à tous les rangs $n \geqslant 1$.

c) Calculons $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{4-u_n} - u_n = \frac{4-u_n(4-u_n)}{4-u_n} = \frac{u_n^2-4u_n+4}{4-u_n} = \frac{(u_n-2)^2}{4-u_n}$.
Comme, pour tout $n \geqslant 1$, $0 < u_n < 2$, on a vu que $2 < 4-u_n < 4$.
Le dénominateur de la fraction $\frac{(u_n-2)^2}{4-u_n}$ est donc toujours positif, comme son numérateur (un carré).
On en déduit que $u_{n+1} - u_n > 0$ et donc la suite (u_n) est strictement croissante (donc monotone).

d) Comme $v_n = \frac{1}{u_n-2}$, calculons :
$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}-2} = \frac{1}{\frac{4}{4-u_n}-2} = \frac{1}{\frac{4-2(4-u_n)}{4-u_n}} = \frac{4-u_n}{4-2(4-u_n)} = \frac{4-u_n}{-4+2u_n} = \frac{4-u_n}{2(u_n-2)}$.
Or $\frac{4-u_n}{2(u_n-2)} = \frac{2+2-u_n}{2(u_n-2)} = \frac{2}{2(u_n-2)} + \frac{2-u_n}{2(u_n-2)} = \frac{1}{u_n-2} + \frac{-(u_n-2)}{2(u_n-2)} = v_n + \frac{-1}{2}$.
La suite (v_n) est donc une suite arithmétique de raison $\frac{-1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0-2} = \frac{-1}{2}$.

e) Par conséquent $v_n = v_0 + n \times \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{n}{2} = \frac{-(1+n)}{2}$.
Comme $v_n = \frac{1}{u_n-2}$, on a $u_n = 2 + \frac{1}{v_n}$ et donc $u_n = 2 + \frac{1}{v_n} = 2 - \frac{2}{1+n} = \frac{2(1+n)-2}{1+n} = \frac{2n}{1+n}$.
Vérifions : $u_0 = \frac{0}{1} = 0$, $u_1 = \frac{2}{2} = 1$, $u_2 = \frac{4}{3}$ et $u_3 = \frac{6}{4} = 1,5$ ce qui est conforme aux valeurs obtenues.

Correction de l'exercice 2 (Suite récurrente double (6 points))

a) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}+u_n}{2}$, donc $u_2 = \frac{u_1+u_0}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$
$u_3 = \frac{u_2+u_0}{1} = \frac{7}{4} = 1,75$.
La suite (u_n) n'est pas monotone dans son ensemble, car $u_0 < u_1$, $u_1 > u_2$ et $u_2 < u_3$.
Montrer que (u_n) n'est pas monotone à partir d'un certain rang n'est pas attendu ici mais on peut remarquer que, d'après la définition ($u_{n+2} = \frac{u_{n+1}+u_n}{2}$), u_{n+2} est toujours entre u_{n+1} et u_n puisqu'il s'agit de leur *moyenne arithmétique*. Par conséquent, si $u_{n+1} > u_n$ alors $u_{n+2} < u_{n+1}$ et si, au contraire, $u_{n+1} < u_n$ alors $u_{n+2} > u_{n+1}$. ce qui montre bien l'hérédité de cette propriété.

b) $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1}+u_n}{2} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1}+u_n-2u_{n+1}}{2} = \frac{u_n-u_{n+1}}{2} = \frac{-v_n}{2}$.
Par conséquent (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{-1}{2}$ et de 1er terme $v_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$.

c) La somme $s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$ est celle des n premiers termes de la suite (v_n), soit, d'après la formule :
$s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1-(\frac{-1}{2})^n}{1-(\frac{-1}{2})} = \frac{2^n-(-1)^n}{3\times 2^{n-1}} = \frac{2}{3} - \frac{(-1)^n}{3\times 2^{n-1}}$.
Si n est pair $s_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3\times 2^{n-1}}$ et si n est impair $s_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3\times 2^{n-1}}$

On peut, par ailleurs remarquer que :
$s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_0 = u_n - 1$.

d) De ces deux façons d'envisager s_n, on en tire l'égalité $u_n = 1 + s_n$
D'où $u_n = 1 + \frac{2}{3} - \frac{(-1)^n}{3\times 2^{n-1}}$.
Comme $\frac{-1}{3\times 2^{n-1}} \leqslant \frac{(-1)^n}{3\times 2^{n-1}} \leqslant \frac{1}{3\times 2^{n-1}}$ et comme chacune de ces bornes a pour limite 0.
En effet $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{3\times 2^{n-1}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3\times 2^{n-1}} = 0$,
d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{3\times 2^{n-1}} = 0$.
Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 + \frac{2}{3} + 0 = \frac{5}{3}$.

Correction de l'exercice 3 (Suite de disques (5 points))

a) Par définition $L_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n = \frac{2R}{2^1} + \frac{2R}{2^2} + \cdots + \frac{2R}{2^n} = 2R\left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$.
On reconnait là $2R$ fois la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de 1er terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$.
La formule du cours nous donne la solution : $L_n = \frac{2R}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2R}{2}\frac{\frac{2^n-1}{2^n}}{\frac{2-1}{2}} = 2R\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right) = 2R\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

b) La réunion de tous les disques D_n a une longueur totale égale $L_n = 2R\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ (terme d'une suite géométrique d'une raison $0 < q < 1$) ;
on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2R\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2R(1-0) = 2R$. On en déduit que $L_n < 2R$ (l'égalité est repoussée à l'infini, c'est-à-dire jamais), la réunion des disques reste donc contenue à l'intérieur du grand disque Γ.

c) On sait que l'aire d'un disque de rayon r est donnée par la formule $A = \pi r^2$; avec le diamètre $d = \frac{r}{2}$, cette formule devient $A = \frac{\pi d^2}{4}$.
L'aire du disque D_n est $\frac{\pi d_n^2}{4} = \frac{\pi\left(\frac{2R}{2^n}\right)^2}{4} = \frac{4\pi R^2}{4\times 2^2 n} = \frac{\pi R^2}{4^n}$.
On en déduit $A_n = \frac{\pi R^2}{4^1} + \frac{\pi R^2}{4^2} + \cdots + \frac{\pi R^2}{4^n} = \pi R^2\left(\frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n}\right)$.
On reconnait là πR^2 fois la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de 1er terme $\frac{1}{4}$ et de raison $\frac{1}{4}$.
La formule du cours nous donne la solution : $A_n = \frac{\pi R^2}{4}\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\pi R^2}{4}\frac{\frac{4^n-1}{4^n}}{\frac{4-1}{4}} = \frac{\pi R^2}{3}\left(\frac{4^n-1}{4^n}\right) = \frac{\pi R^2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4^n} = 0$ (terme d'une suite géométrique d'une raison $0 < q < 1$), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi R^2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) = \frac{\pi R^2}{3}$. La suite A_n converge vers $\frac{\pi R^2}{3}$, soit $\frac{1}{3}$ de l'aire du disque Γ.

Correction de l'exercice 4 (Somme harmonique (5 points))

a) D'après la définition de la suite (S_n), $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$.
Or, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n \iff n+1 \leqslant n+k \leqslant n+n$, et en inversant cet encadrement $\frac{1}{n+k} \geqslant \frac{1}{n+n}$.
Comme on a, dans la somme $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$, n nombres supérieurs à $\frac{1}{n+n}$ (un seul, le dernier, est égal) on en déduit que cette somme est inférieure à $n \times \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2}$.
Finalement $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$ pour tout $n > 0$.

b) Montrons que la suite (S_n) dépasse n'importe quel nombre k fixé d'avance.
On suppose k entier, pour faire une démonstration par récurrence :

- pour $k = 1$ on doit montrer qu'à partir d'un certain rang n, $S_n \geqslant 1$. Or $S_1 = \frac{1}{1} = 1$, il suffit de prendre $n = 1$ pour que $S_n \geqslant 1$.
- supposons que pour un entier k donné, on ait $S_n \geqslant k$.
  D'après la question précédente, on sait que $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$, on en déduit que $S_{4n} - S_{2n} > \frac{1}{2}$ et donc, par addition de ces deux inégalités $S_{2n} - S_n + S_{4n} - S_{2n} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ce qui s'écrit $S_{4n} - S_n > 1$ soit $S_{4n} > S_n + 1$ et comme $S_n \geqslant k$, on en déduit que $S_{4n} > k + 1$. On a donc trouvé un entier ($N = 4n$) tel que $S_N \geqslant k + 1$.
- conclusion : on peut toujours trouver un rang n tel que $S_n \geqslant k$, quelque soit l'entier k. On pourra donc également dépasser n'importe quel nombre réel inférieur ou égal à n'importe quel entier k. La suite (S_n) diverge et a pour limite $+\infty$.

c) La fonction Python `harmonique` prend k en argument et renvoie la valeur de n telle que $S_n \geqslant k$.
Le tableau encadré fabriqué par les deux dernières lignes du programme donne les valeurs de n obtenue pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

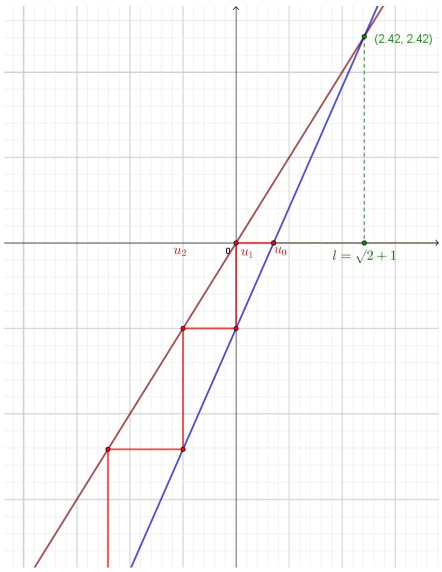
```
def harmonique(k):
    s,n=0,0
    while s<k:
        n+=1
        s+=1/n
    return n


for i in range(1,6):
    print("k=",i,"n=",harmonique(i))
```

```
k= 1 n= 1
k= 2 n= 4
k= 3 n= 11
k= 4 n= 31
k= 5 n= 83
```

Correction de l'exercice 5 (BONUS (2 points))

Si $u_{n+1} = \sqrt{2}u_n - 1$, on sait que la suite arithmético-arithmétique (u) a une limite potentielle l vérifiant $l = \sqrt{2}l - 1 \iff l(\sqrt{2} - 1) = 1 \iff l = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2} + 1$.



Définissons la suite (v) de terme général
$v_n = u_n - l = u_n - (\sqrt{2} + 1)$.
$v_{n+1} = u_{n+1} - (\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2}u_n - 1 - \sqrt{2} - 1 =$
$v_{n+1} == \sqrt{2}(u_n - \frac{2}{\sqrt{2}} - 1) = \sqrt{2}(u_n - \sqrt{2} - 1) = \sqrt{2}v_n$.
Ainsi (v) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et
$v_0 = u_0 - (\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2} - (\sqrt{2} + 1) = -1$.
On a donc $v_n = v_0(\sqrt{2})^n = -\sqrt{2}^n$ et
$u_n = v_n + (\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2}^n$.
Comme $\sqrt{2} > 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2}^n = -\infty$
(la suite est décroissante et non minorée).