1S4

DS n°4 : Géométrie - Suite

Exercice 1 (Ensembles de points(4 points))

Placer dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ les points $A(-1;2)$ et $B(3;-1)$.

a) Déterminer et tracer l'ensemble E des points M vérifiant $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -1$

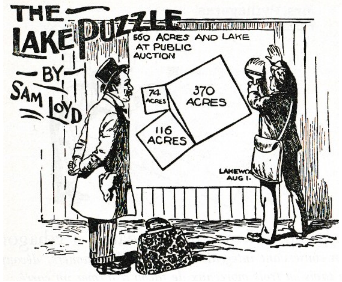
b) Déterminer et tracer l'ensemble F des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -1$

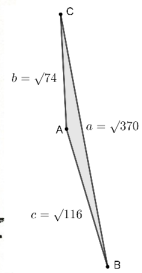
Exercice 2 (Formules de trigonométrie(3 points))

Rappeler la loi des sinus ($\star$) et la loi des cosinus ($\bullet$) dans le cas général d'un triangle ABC avec les notations habituelles $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Les deux questions suivantes sont indépendantes.

a) Le point I étant l'intersection de la bissectrice de $\widehat{A}$ et du côté $[BC]$, établir l'égalité $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$ à l'aide de $\star$.

b) Le lac de Sam Loyd (voir figure jointe) est un triangle ABC tel que $a^2 = 370$, $b^2 = 74$ et $c^2 = 116$. Déterminer $\cos \widehat{A}$ à l'aide de $\bullet$ et en déduire $\sin^2 \widehat{A}$ puis l'aire $\mathscr{S}$ du lac. (déterminer d'abord $\mathscr{S}^2$; rappel : $\mathscr{S} = \frac{bc \sin \widehat{A}}{2}$)





Exercice 3 (Fonction trigonométrique (3 points))

a) Montrer que, pour tout réel x : $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

b) En déduire le maximum et le minimum de la fonction $x \longmapsto \cos x + \sin x$ ainsi que la solution de l'équation $\cos x + \sin x = 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Suites définies conjointement (4 points))

On définit les suites (u_n) et (v_n) par les relations

$$u_0 = 1,\ v_0 = -\frac{3}{4},\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + 4v_n) \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{5}(3u_n + 2v_n)$$

a) Calculer u_1 et v_1 puis u_2 et v_2.

b) Écrire un programme qui détermine et affiche u_n et v_n pour toutes les valeurs de n inférieures à un entier $N \geqslant 1$. Donner le programme et ses résultats pour $N = 15$ dans un tableau.

c) On définit la suite (w_n) par la relation $w_n = 3u_n + 4v_n$. Montrer que $w_{n+1} = w_n$; en déduire v_n en fonction de u_n puis u_{n+1} en fonction u_n et v_{n+1} en fonction v_n.

Exercice 5 (Monotonie (4 points))

a) Étudier la monotonie de la suite (u_n) définie par la relation $u_n = 2^n - n$.

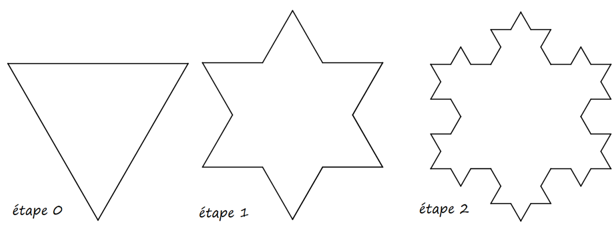
b) Étudier la monotonie de la suite (v_n) définie par la relation $v_n = \frac{n^2}{2^n}$.

c) Étudier la monotonie de la suite (w_n) définie par les relations $w_{n+1} = 2w_n - 1$ et $w_0 = 1,5$. Représenter les premiers termes la suite w en traçant la courbe de la fonction $f : w_n \longmapsto w_{n+1}$, la droite d'équation $y = x$ et en plaçant les termes sur les axes.

Exercice 6 (Flocon de Koch (2 points))

La figure ci-contre présente les premières étapes du flocon : au départ il y a un triangle équilatéral d'aire $a_0 = 1$, et puis à chaque étape on pose au centre de chaque segment un triangle équilatéral trois fois plus petit.

En admettant que l'accroissement de l'aire du flocon en arrivant à l'étape $n \geqslant 1$ est donnée par la relation $a_n - a_{n-1} = \frac{3 \times 4^{n-1}}{9^n}$, déterminer à partir de quelle étape n cet accroissement devient inférieur à 10^{-9} ; donner alors l'aire a_n du flocon à cette étape.



NB : on réalisera bien sûr cela à l'aide d'un programme, à écrire sur la copie.

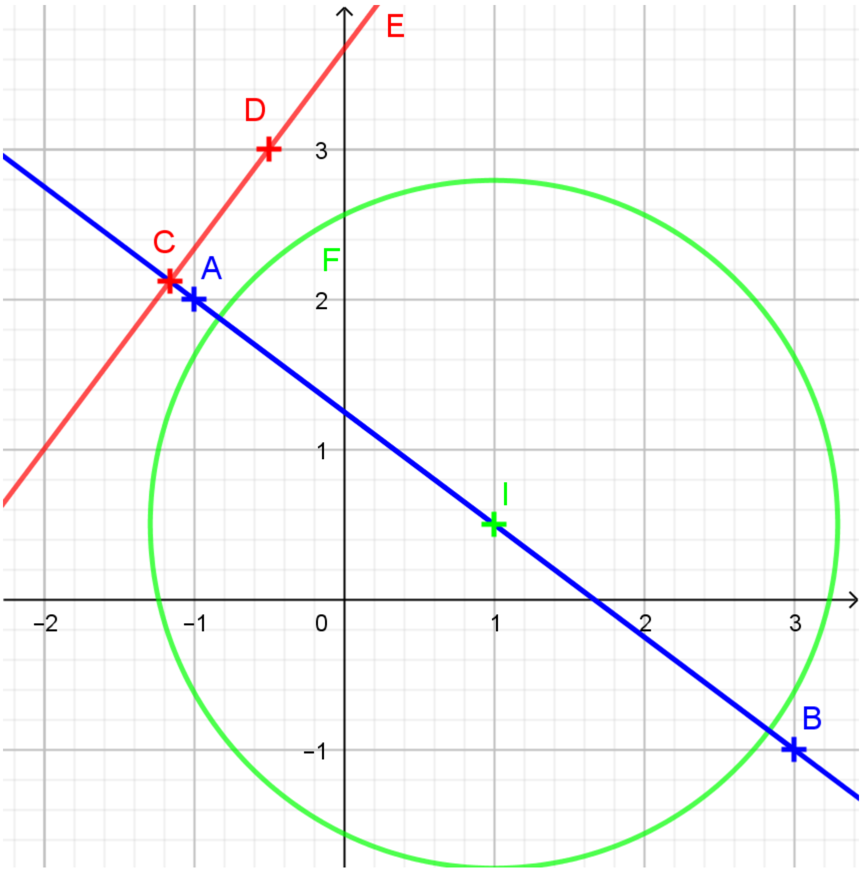
Correction de l'exercice 1 (Ensembles de points(4 points))

a) Les points M vérifiant $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-1$ ont tous le même projeté orthogonal C sur la droite (AB). Ce point $C\in(AB)$ vérifiant l'égalité $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$. On en déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de sens contraires et que $AB\times AC=1$, autrement dit $AC=\frac{1}{AB}=\frac{1}{\sqrt{(3+1)^2+(-1-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{16+9}}=\frac{1}{5}=0,2$. Comme les points M se projettent tous orthogonalement en C sur (AB), on en déduit qu'ils constituent E : la droite perpendiculaire à (AB) passant par C.

Remarque : on peut arriver à ce résultat en employant les coordonnées. Si M a pour coordonnées $(x;y)$, alors $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x+1;y-2)$ tandis que $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(4;-3)$. Le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-1$ s'écrivant $4(x+1)-3(y-2)$, on a :

$$M\in E\iff 4(x+1)-3(y-2)=-1\iff 4x-3y+11=0$$

On reconnait là l'équation cartésienne d'une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}(4;-3)=\overrightarrow{AB}$, autrement dit une droite perpendiculaire à (AB). Pour tracer cette droite, il suffit de déterminer les coordonnées d'un point de E, par exemple le point $D(-\frac{1}{2};3)$.



b) Les points M vérifiant $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-1$ sont sur un cercle dont le centre est le milieu I de $[AB]$. On peut montrer cela avec le théorème de la médiane $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4}$ ou retrouver ce résultat en calculant $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=MI^2-IA^2$.

Comme $MI^2-IA^2=-1\iff MI^2=IA^2-1=\left(\frac{5}{2}\right)^2-1=\frac{21}{4}$, le rayon du cercle F est $\sqrt{\frac{21}{4}}\approx 2,29$.

Remarque : on peut arriver à ce résultat en employant les coordonnées. Si M a pour coordonnées $(x;y)$, alors $\overrightarrow{MA}$ a pour coordonnées $(-1-x;2-y)$ tandis que $\overrightarrow{MB}$ a pour coordonnées $(3-x;-1-y)$. Le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-1$ s'écrivant $(-1-x)(3-x)+(2-y)(-1-y)$, on a :

$$M\in F\iff(-1-x)(3-x)+(2-y)(-1-y)=-1\iff x^2-2x-3+y^2-y-2=-1$$
$$\iff(x-1)^2-1-3+(y-\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2-2=-1\iff(x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2=5+\frac{1}{4}=\frac{21}{4}$$

On retrouve là l'équation cartésienne d'un cercle de centre $(1;\frac{1}{2})$, autrement dit I le milieu de $[AB]$, et de rayon $\sqrt{\frac{21}{4}}$.

Correction de l'exercice 2 (Formules de trigonométrie(3 points))

- la loi des sinus ($\star$) : $\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})} = \frac{abc}{2\mathscr{S}}$
- loi des cosinus ($\bullet$) ou Théorème d'Al-Kashi : $\cos(\widehat{A}) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

a) I étant sur la bissectrice de $\widehat{A}$, on a $\widehat{IAB} = \widehat{IAC}$. Notons $\widehat{A}$ la mesure commune de ces angles.
D'après la loi des sinus dans le triangle IAC, on a $\frac{IC}{\sin(\widehat{A})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{AIC})}$.
D'après la loi des sinus dans le triangle IAB, on a $\frac{IB}{\sin(\widehat{A})} = \frac{AB}{\sin(\widehat{AIB})}$.
Il nous reste à utiliser le fait que les angles $\widehat{AIC}$ et $\widehat{AIB}$ sont supplémentaires (leur réunion forme un angle plat). Ils ont donc même sinus (car $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$. Notons $\sin(\widehat{I})$ ce sinus commun.
Ainsi, $\frac{IC}{\sin(\widehat{A})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{I})} \iff \frac{IC}{AC} = \frac{\sin(\widehat{A})}{\sin(\widehat{I})}$ d'une part et $\frac{IB}{\sin(\widehat{A})} = \frac{AB}{\sin(\widehat{AIB})} \iff \frac{IB}{AB} = \frac{\sin(\widehat{A})}{\sin(\widehat{I})}$ d'autre part.
On en déduit, finalement, que $\frac{IC}{AC} = \frac{IB}{AB} = \frac{\sin(\widehat{A})}{\sin(\widehat{I})}$; la première égalité s'écrit $\frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IC}$.

b) D'après la loi des cosinus, $\cos(\widehat{A}) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{74+116-370}{2\sqrt{74}\sqrt{116}} = \frac{-45}{\sqrt{2146}} \approx -0,971399$.
On en déduit $\sin^2\widehat{A} = 1 - \cos^2\widehat{A} = 1 - \frac{45^2}{2146} = \frac{121}{2146} \approx 0,05638397$.
Le carré de l'aire $\mathscr{S}$ du lac est $\mathscr{S}^2 = \frac{b^2c^2\sin^2\widehat{A}}{4} = \frac{74\times116\times121}{4\times2146} = 121 = 11^2$.
L'aire $\mathscr{S}$ du lac est donc égale à 11 acres (mesure anglaise valant $4046,9\ m^2$), soit environ $44\,500\ m^2$.

Correction de l'exercice 3 (Fonction trigonométrique (3 points))

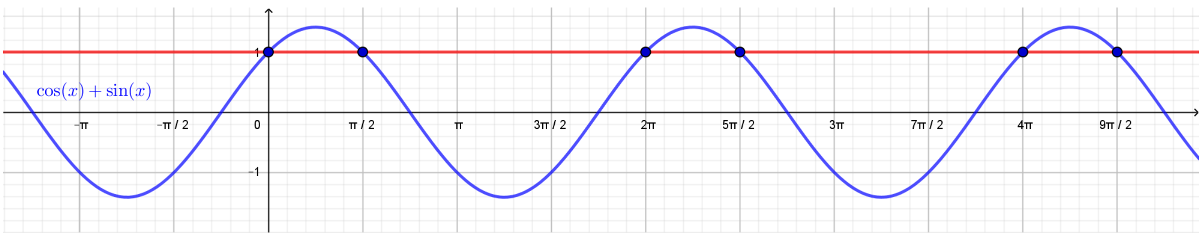
a) D'après la formule d'addition $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$, on a :
$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin(x)\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(x)\frac{\sqrt{2}}{2}$.
En multipliant le tout par $\sqrt{2}$, on trouve $\sqrt{2}\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin(x)\frac{(\sqrt{2})^2}{2} + \cos(x)\frac{(\sqrt{2})^2}{2} = \cos x + \sin x$.

b) Comme, pour tout réel x, on a $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, on en déduit que $-1 \leqslant \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$ et donc, en multipliant cet encadrement par $\sqrt{2}$, on obtient $-\sqrt{2} \leqslant \sqrt{2}\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) \leqslant \sqrt{2}$, soit $-\sqrt{2} \leqslant \cos x + \sin x \leqslant \sqrt{2}$.
La fonction $x \longmapsto \cos x + \sin x$ admet $-\sqrt{2}$ comme valeur minimum et $\sqrt{2}$ comme valeur maximum.

L'équation $\cos x + \sin x = 1$ équivaut à $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1$, soit $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
On en déduit deux types de solutions :

- $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \iff x = 0 \quad [2\pi]$
- $x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \iff x = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

On peut visualiser ces solutions en traçant la courbe d'équation $y = \cos x + \sin x$ (tracée en bleu) : ce sont les abscisses des points d'intersection de cette courbe avec la droite d'équation $y = 1$ (tracée en rouge).



Correction de l'exercice 4 (Suites définies conjointement (4 points))

a) $u_0 = 1$ et $v_0 = -\frac{3}{4} = -0,75$
$u_1 = \frac{1}{5}(u_0 + 4v_0) = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{3\times4}{4}\right) = \frac{-2}{5} = -0,4$
$v_1 = \frac{1}{5}(3u_0 + 2v_0) = \frac{1}{5}\left(3 - \frac{3\times2}{4}\right) = \frac{3}{10} = 0,3$
$u_2 = \frac{1}{5}(u_1 + 4v_1) = \frac{1}{5}\left(\frac{-2}{5} + \frac{6}{5}\right) = \frac{4}{25} = 0,16$
$v_2 = \frac{1}{5}(3u_1 + 2v_1) = \frac{1}{5}\left(\frac{-6}{5} + \frac{3}{5}\right) = \frac{-3}{25} = -0,12$

b) Voici un programme en Python qui détermine et affiche u_n et v_n pour $0 \leqslant n \leqslant 15$. La sortie d'exécution (en bleu) est également donnée. J'ai arrondi les valeurs à 6 chiffres après la virgule pour simplifier mais ce n'était pas obligé. On remarque que, pour les deux suites, les termes sont alternativement positifs et négatifs et deviennent de plus en plus proches de 0.

```
def conjoint(N):
    u,v=1,-0.75
    print("u( 0 )=",u," - v( 0 )=",v)
    for n in range(N) :
        u,v=0.2*(u+4*v),0.2*(3*u+2*v)
        print("u(",n+1,")=",round(u,6)," - v(",n+1,")=",round(v,6))

conjoint(15)
```

```
u( 0 )= 1  - v( 0 )= -0.75                u( 8 )= 0.000655  - v( 8 )= -0.000492
u( 1 )= -0.4  - v( 1 )= 0.3               u( 9 )= -0.000262  - v( 9 )= 0.000197
u( 2 )= 0.16  - v( 2 )= -0.12             u( 10 )= 0.000105  - v( 10 )= -7.9e-05
u( 3 )= -0.064  - v( 3 )= 0.048           u( 11 )= -4.2e-05  - v( 11 )= 3.1e-05
u( 4 )= 0.0256  - v( 4 )= -0.0192         u( 12 )= 1.7e-05  - v( 12 )= -1.3e-05
u( 5 )= -0.01024  - v( 5 )= 0.00768       u( 13 )= -7e-06  - v( 13 )= 5e-06
u( 6 )= 0.004096  - v( 6 )= -0.003072     u( 14 )= 3e-06  - v( 14 )= -2e-06
u( 7 )= -0.001638  - v( 7 )= 0.001229     u( 15 )= -1e-06  - v( 15 )= 1e-06
```

c) La suite (w_n) étant définie par la relation $w_n = 3u_n + 4v_n$, on tire $w_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3 - 3 = 0$.
Au rang suivant $w_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3 \times \frac{u_n+4v_n}{5} + 4 \times \frac{3u_n+2v_n}{5} = 3u_n + 4v_n = w_n$.
La suite (w_n) est donc à la fois constante et nulle : $w_0 = w_1 = \cdots = w_n = 0$, tous les termes sont nuls.
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 3u_n + 4v_n = 0$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{-3}{4}u_n$ et aussi $v_{n+1} = \frac{-3}{4}u_{n+1}$.
Comme $v_{n+1} = \frac{3u_n+2v_n}{5} \iff 5v_{n+1} = 3u_n + 2v_n$, en remplaçant les termes de la suite v, on obtient : $3u_n + \frac{-3}{2}u_n = \frac{-15}{4}u_{n+1} \iff u_{n+1} = -\frac{2}{5}u_n$.
On peut alors faire de même pour la suite (v_n) car $v_n = \frac{-3}{4}u_n \iff u_n = \frac{-4}{3}v_n$ et on peut écrire $5v_{n+1} = 3u_n + 2v_n = -4v_n + 2v_n = -2v_n$ ce qui conduit à $v_{n+1} = -\frac{2}{5}v_n$, la même relation de récurrence que pour la suite (u_n), seuls les premiers termes changent.

Correction de l'exercice 5 (Monotonie (4 points))

a) Pour la suite (u_n) calculons :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2^{n+1} - (n+1) - (2^n - n) \\ &= 2^n(2-1) - (n+1) + n \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

La quantité $2^n - 1$ est positive sitôt que $2^n > 1$, c'est-à-dire dès que $n > 0$. La suite (u_n) est donc strictement croissante à partir du rang 1 car $\forall n > 1, u_{n+1} > u_n$. Pour confirmer ce résultat on peut déterminer les premiers termes : $u_0 = 2^0 - 0 = 1$, $u_1 = 2^1 - 1 = 1$, $u_2 = 2^2 - 2 = 2$, etc.

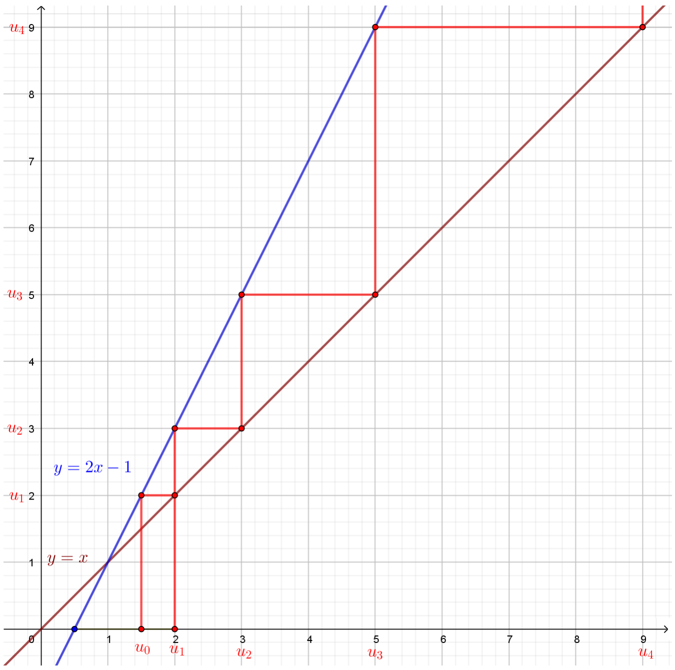
b) Pour la suite (v_n) calculons :

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{(n+1)^2}{2(n+1)} \times \frac{2^n}{n^2} \\ &= \frac{(n+1)^2}{2n^2} \end{aligned}$$

Les termes $v_n = \frac{n^2}{2^n}$ sont tous positifs car, au numérateur on a un carré et au dénominateur une puissance de 2. On en déduit que la position de $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ nous renseigne sur la croissance de la suite.
Or, $\frac{(n+1)^2}{2n^2} < 1 \iff (n+1)^2 < 2n^2 \iff n^2 - 2n - 1 > 0$. Le polynôme $n^2 - 2n - 1$ s'annule pour $n = \frac{2\pm\sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$ et est positif à l'extérieur des racines, soit pour $x > 1 + \sqrt{2}$ ou $x < 1 - \sqrt{2}$. En ce qui concerne la suite, seule l'inégalité $x > 1 + \sqrt{2}$ nous intéresse : pour $n > 1 + \sqrt{2} \geqslant 3$ on a $v_{n+1} < v_n$.
La suite v est strictement décroissante à partir du rang 3.
Pour confirmer ce résultat on peut déterminer les premiers termes : $v_0 = \frac{0^2}{2^0} = 0$, $v_1 = \frac{1^2}{2^1} = \frac{1}{2}$, $v_2 = \frac{2^2}{2^2} = 1$, $v_3 = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$, $v_4 = \frac{4^2}{2^4} = 1$, etc.

c) Pour la suite (w_n), la différence $w_{n+1} - w_n = w_n - 1$ ne nous renseigne que si l'on peut montrer que $w_n - 1$ garde un signe constant à partir d'un certain rang. Or comment montrer que l'on a $w_n - 1 > 0 \iff w_n > 1$ ou son contraire ?
Par récurrence :
Pour commencer $w_0 = 1,5 > 1$.

Ensuite, $w_n > 1 \Longrightarrow 2w_n > 2 \Longrightarrow 2w_n - 1 > 2 - 1 = 1 \Longleftrightarrow w_{n+1} > 1$.
La suite w est donc strictement croissante depuis le début.
Représentons cette suite w à l'aide de la courbe de la fonction $f : x \longmapsto 2x - 1$ qui est telle que $f(u_n) = u_{n+1}$ (droite bleue). Le va et vient entre cette droite et la droite d'équation $y = x$ nous donne les premiers termes de la suite w que l'on observe bien croissante.



Correction de l'exercice 6 (Flocon de Koch (2 points))

L'accroissement de l'aire du flocon en arrivant à l'étape $n \geqslant 1$ étant donné par la relation $a_n - a_{n-1} = \frac{3\times 4^{n-1}}{9^n}$, l'aire du flocon à l'étape $n \geqslant 1$ est $a_n = a_{n-1} + \frac{3\times 4^{n-1}}{9^n}$. Il suffit de calculer cette aire a_n, tout en conservant l'aire précédente a_{n-1} jusqu'à ce que la différence soit inférieure à 10^{-9} pour la première fois. Mon programme réalise cela et donne la solution : il faut aller jusqu'à l'étape 26 pour obtenir cette précision du millionième. L'aire du flocon est alors égale à $1,6$.

```
def flocon(p):
    a2,a1,n=1,0,0
    while a2-a1>p :
        n+=1
        a2,a1=a2+3*4**(n-1)/9**n,a2
        print("a(",n,")=",round(a2,9)," - a(",n,")-a(",n-1,")=",round(a2-a1,9))

flocon(10**-9)
```

```
a( 1 )= 1.333333333  - a( 1 )-a( 0 )= 0.333333333
a( 2 )= 1.481481481  - a( 2 )-a( 1 )= 0.148148148
a( 3 )= 1.547325103  - a( 3 )-a( 2 )= 0.065843621
a( 4 )= 1.576588935  - a( 4 )-a( 3 )= 0.029263832
a( 5 )= 1.589595082  - a( 5 )-a( 4 )= 0.013006147
a( 6 )= 1.595375592  - a( 6 )-a( 5 )= 0.00578051
a( 7 )= 1.597944708  - a( 7 )-a( 6 )= 0.002569116
a( 8 )= 1.599086537  - a( 8 )-a( 7 )= 0.001141829
a( 9 )= 1.599594016  - a( 9 )-a( 8 )= 0.00050748
a( 10 )= 1.599819563  - a( 10 )-a( 9 )= 0.000225546
a( 11 )= 1.599919806  - a( 11 )-a( 10 )= 0.000100243
a( 12 )= 1.599964358  - a( 12 )-a( 11 )= 4.4552e-05
a( 13 )= 1.599984159  - a( 13 )-a( 12 )= 1.9801e-05
a( 14 )= 1.59999296  - a( 14 )-a( 13 )= 8.8e-06
a( 15 )= 1.599996871  - a( 15 )-a( 14 )= 3.911e-06
a( 16 )= 1.599998609  - a( 16 )-a( 15 )= 1.738e-06
a( 17 )= 1.599999382  - a( 17 )-a( 16 )= 7.73e-07
a( 18 )= 1.599999725  - a( 18 )-a( 17 )= 3.43e-07
a( 19 )= 1.599999878  - a( 19 )-a( 18 )= 1.53e-07
a( 20 )= 1.599999946  - a( 20 )-a( 19 )= 6.8e-08
a( 21 )= 1.599999976  - a( 21 )-a( 20 )= 3e-08
a( 22 )= 1.599999989  - a( 22 )-a( 21 )= 1.3e-08
a( 23 )= 1.599999995  - a( 23 )-a( 22 )= 6e-09
a( 24 )= 1.599999998  - a( 24 )-a( 23 )= 3e-09
a( 25 )= 1.599999999  - a( 25 )-a( 24 )= 1e-09
a( 26 )= 1.6  - a( 26 )-a( 25 )= 1e-09
```