Entraînement pour le DS3 (géométrie 2)

EXERCICE 1 (ENSEMBLES DE POINTS(4 POINTS))

Placer dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points $A(-1;2)$ et $B(3;-1)$.

a) Déterminer et tracer l'ensemble E des points M vérifiant $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -1$

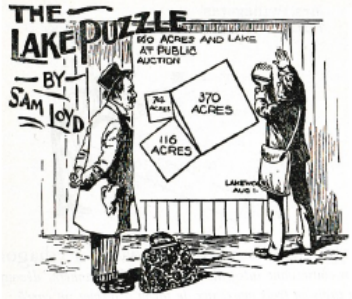
b) Déterminer et tracer l'ensemble F des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -1$

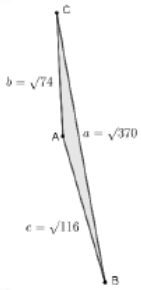
EXERCICE 2 (FORMULES DE TRIGONOMÉTRIE(3 POINTS))

Rappeler la loi des sinus ($\star$) et la loi des cosinus ($\bullet$) dans le cas général d'un triangle ABC avec les notations habituelles $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Les deux questions suivantes sont indépendantes.

a) Le point I étant l'intersection de la bissectrice de $\widehat{A}$ et du côté $[BC]$, établir l'égalité $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$ à l'aide de $\star$.

b) Le lac de Sam Loyd (voir figure jointe) est un triangle ABC tel que $a^2 = 370$, $b^2 = 74$ et $c^2 = 116$. Déterminer $\cos\widehat{A}$ à l'aide de $\bullet$ et en déduire $\sin^2\widehat{A}$ puis l'aire $\mathscr{S}$ du lac. (déterminer d'abord $\mathscr{S}^2$; rappel : $\mathscr{S} = \frac{bc\sin\widehat{A}}{2}$)





EXERCICE 3 (FONCTION TRIGONOMÉTRIQUE (3 POINTS))

a) Montrer que, pour tout réel x : $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

b) En déduire le maximum et le minimum de la fonction $x \longmapsto \cos x + \sin x$ ainsi que la solution de l'équation $\cos x + \sin x = 1$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4 (DROITE D'EULER(5 POINTS))

Soit ABC un triangle quelconque et Γ son cercle circonscrit de centre O.

Soient H le point tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et G le point tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

a) Justifier que H est l'orthocentre du triangle, c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs.
indication : pour commencer, calculer en le décomposant, le produit scalaire $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB}$ puis conclure.
rappel : une hauteur d'un triangle est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé.

b) Justifier que G est le centre de gravité du triangle, c'est-à-dire le point d'intersection des médianes.
indication : en appelant A' le milieu du segment $[BC]$, montrer que $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GA'}$ sont colinéaires puis conclure.
rappel : une médiane d'un triangle est une droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé.

c) Prouver que O, G et H sont alignés, toujours dans cet ordre, ou confondus.

EXERCICE 5 (RELATIONS MÉTRIQUES DANS TRIANGLE RECTANGLE(5 POINTS))

a) Soient ABC, un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC).
Faire une figure puis montrer que $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = AB^2$ et $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CB} = AC^2$

b) Montrer que $-\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = AH^2$ et en déduire que $HB \times HC = AH^2$

c) Réciproquement, en supposant qu'un triangle ABC vérifie :
$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = AB^2$ et $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CB} = AC^2$ avec H projeté orthogonal de A sur (BC),
montrer que ce triangle est rectangle en A.

d) Application pratique : expliquer comment, avec seulement la règle, l'équerre et le compas (sans calculatrice), en prenant $HB = 1$ et $HC = 13$ on peut construire un segment de longueur $\sqrt{13}$.