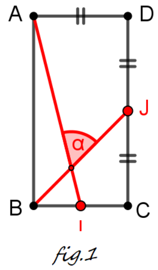
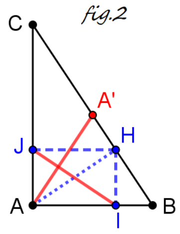
Exercice 1 (Produit scalaire(4 points))

Les questions qui suivent sont indépendantes.

a) Soient $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 2BC$, I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[CD]$ (voir fig.1).
Déterminer l'angle $(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{IA})$ en évaluant le produit scalaire $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{IA}$ de deux façons différentes.

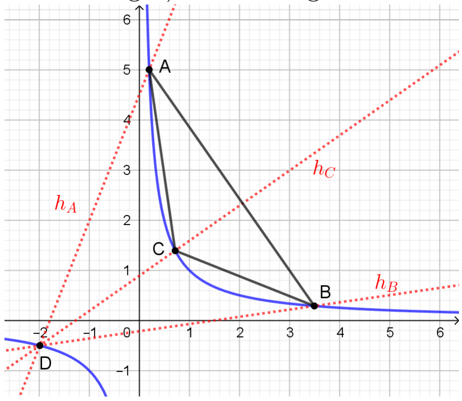
b) Soient ABC un triangle rectangle en A, A' le milieu de $[BC]$, H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$. H se projette orthogonalement en I sur $[AB]$ et en J sur $[AC]$ (voir fig.2).
Montrer que les droites (AA') et (IJ) sont perpendiculaires.





Exercice 2 (Orthocentre sur Hyperbole(5 points))

La figure ci-contre représente l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $y = \frac{1}{x}$ sur laquelle on a placé trois points A, B et C. On a ensuite tracé les hauteurs – h_A, h_B et h_C (en pointillés rouges) – du triangle ABC .



On constate alors que ces droites sont concourantes en un point D qui semble être sur $\mathscr{H}$.

a) a, b, c étant trois réels non nuls, les coordonnées de A, B et C sont $A(a, \frac{1}{a})$, $B(b, \frac{1}{b})$ et $C(c, \frac{1}{c})$. Déterminer l'équation des hauteurs h_A et h_B.

b) En déduire les coordonnées de l'orthocentre D du triangle ABC.

c) Montrer qu'on a bien $D \in \mathscr{H}$ pour tout triangle ABC dont les sommets appartiennent à $\mathscr{H}$ et conclure .

Exercice 3 (Algorithmique (5 points))

a) Montrer que l'équation d'un cercle de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rayon R se développe sous la forme $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ où a, b et c sont des nombres à exprimer en fonction de x_0, y_0 et R.

b) Réciproquement, expliquer pourquoi une équation du type $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ n'est pas forcément l'équation d'un cercle.

c) Mettre au point un programme qui prend a, b et c en entrée et détermine si une équation du type $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ est l'équation d'un cercle. Si c'est le cas, le programme affiche les valeurs de x_0, y_0 et R. Sinon, il affiche le texte « non cercle ».

d) Tester votre programme avec les valeurs $(a, b, c) = (-1, -3, 5)$ et $(a, b, c) = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 3)$.

Exercice 4 (Ensembles de points (5 points))

1) $ABCD$ étant un quadrilatère, on désigne par Γ l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right)=0$$

a) Simplifier la relation que doit vérifier un point M de Γ en introduisant les milieux I du segment $[AC]$ et J du segment $[BD]$. En déduire la nature de Γ.

b) L'ensemble Γ peut-il être réduit à un seul point ?
Si oui, préciser alors la nature du quadrilatère $ABCD$.

2) ABC étant un triangle, on désigne par Γ_1 et Γ_2 les ensembles de points M du plan tels que :

$$M \in \Gamma_1 \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0 \text{ et } M \in \Gamma_2 \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM}=0$$

a) Quelle est la nature des ensembles Γ_1 et Γ_2 ?

b) Montrer que l'intersection de Γ_1 et Γ_2 ne contient que deux points :
A et un autre point, nommé ici A', que l'on demande de situer.

BONUS (1 point) : Soit k un réel. $M \in \Gamma_1 \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=k$ et $M \in \Gamma_2 \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM}=k$.
Montrer que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{E, F\}$ où E et F sont des points de la hauteur issue de A.

Correction de l'exercice 1 (Produit scalaire(4 points))

a) Évaluons le produit scalaire $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{IA}$ de deux façons différentes :

- $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{IA} = (\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ})\cdot(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CJ}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{CJ}\cdot\overrightarrow{BA}$.
  Mais $(BC)\perp(BA)$ et donc $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$ et, de même, $(CJ)\perp(IB)$ et donc $\overrightarrow{CJ}\cdot\overrightarrow{IB}=0$.
  Il reste $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{CJ}\cdot\overrightarrow{BA}$.
  Comme I est le milieu de $[BC]$, on a $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{IB} = -BC\times\frac{BC}{2} = \frac{-BC^2}{2}$ et comme J est le milieu de $[CD]$, on a $\overrightarrow{CJ}\cdot\overrightarrow{BA} = BA\times\frac{BA}{2} = \frac{BA^2}{2} = \frac{(2BC)^2}{2} = 2BC^2$.
  Finalement, on obtient $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{IA} = \frac{-BC^2}{2}+2BC^2 = \frac{3BC^2}{2}$.
- $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{IA} = BJ\times IA\times\cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CJ})$.
  D'après le théorème de Pythagore, on a $BJ^2 = BC^2+CJ^2 = BC^2+BC^2 = 2BC^2$ (car $CJ=\frac{BA}{2}=BC$) et $AI^2 = AB^2+BI^2 = (2BC)^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \frac{17BC^2}{4}$.
  On a donc $BJ\times IA = \sqrt{2}BC\times\frac{\sqrt{17}BC}{2} = \frac{\sqrt{34}BC^2}{2}$ et donc $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{IA} = \frac{\sqrt{34}BC^2}{2}\cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CJ})$.

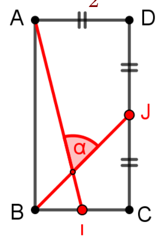
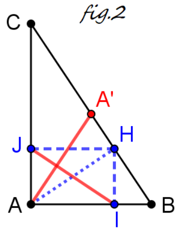


fig.1

fig.2


Par identification des deux formes du produit scalaire, on obtient $\frac{3BC^2}{2} = \frac{\sqrt{34}BC^2}{2}\cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CJ})$.
On en tire le cosinus de l'angle :
$\cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CJ}) = \frac{3BC^2}{2}\div\frac{\sqrt{34}BC^2}{2} = \frac{3\times2}{2\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}} \approx 0,5144957$.
L'angle cherché est donc $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CJ}) = \cos^{-1}(\frac{3}{\sqrt{34}}) \approx 1,03037rad$

b) Montrons que le produit scalaire $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{IJ}$ est nul :

$\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{IJ} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\cdot(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AJ}\right)$.
Mais $(AB)\perp(AJ)$ et donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AJ}=0$ et, de même, $(AC)\perp(IA)$ et donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IA}=0$.
Il reste $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AJ}\right)$.
Comme I est le projeté orthogonal de H sur (AB), le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IA}$ est égal à $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}$.
De même, J étant le projeté orthogonal de H sur (AC), on a $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$.
On en déduit que $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}\right) = \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH}$. Or, ce dernier produit scalaire est nul d'après l'énoncé (car H étant le projeté orthogonal de A sur (BC), on a $(BC)\perp(AH)$ et donc $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH}=0$).
Finalement $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{IJ}=0$. Les droites (AA') et (IJ) sont perpendiculaires.

Correction de l'exercice 2 (Orthocentre sur Hyperbole(5 points))

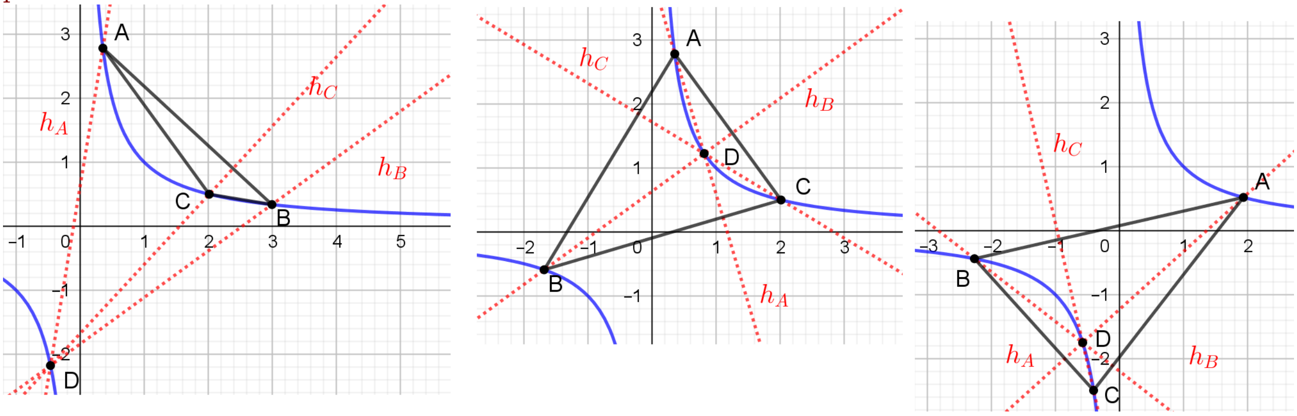
a) Soient $A(a,\frac{1}{a})$, $B(b,\frac{1}{b})$ et $C(c,\frac{1}{c})$, trois points de l'hyperbole.

- h_A, la hauteur issue de A admet pour vecteur normal $\overrightarrow{BC}(c-b,\frac{1}{c}-\frac{1}{b})$.
  $M(x,y)$ est sur h_A ssi $\overrightarrow{AM}(x-a,y-\frac{1}{a})$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$, soit $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0$
  Or, $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0 \iff (x-a)(c-b)+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)\left(y-\frac{1}{a}\right)=0$
  $\iff x(c-b)+y\frac{b-c}{bc} = a(c-b)+\frac{1}{a}\frac{b-c}{bc} \iff x=\frac{y}{bc}+a-\frac{1}{abc}$
- h_B, la hauteur issue de B admet une équation du même type que l'on obtient simplement en intervertissant A, B et C : $x=\frac{y}{ac}+b-\frac{1}{abc}$.
- ce n'était pas demandé mais h_C, la hauteur issue de C admet l'équation $x=\frac{y}{ab}+c-\frac{1}{abc}$.

b) L'orthocentre D du triangle ABC est le point d'intersection de deux hauteurs quelconques, par exemple $h_A\cap h_B$. Ses coordonnées vérifient donc les égalités $x_D=\frac{y_D}{bc}+a-\frac{1}{abc}$ et $x_D=\frac{y_D}{ac}+b-\frac{1}{abc}$.
On en déduit que $\frac{y_D}{bc}+a-\frac{1}{abc} = \frac{y_D}{ac}+b-\frac{1}{abc} \iff y_D\left(\frac{1}{bc}-\frac{1}{ac}\right)=b-a$.
Finalement, $y_D=-abc$ et, en remplaçant dans une des équations $x_D=\frac{-abc}{bc}+a-\frac{1}{abc}=-\frac{1}{abc}$.
L'orthocentre D du triangle ABC a pour coordonnées $(-\frac{1}{abc},-abc)$.

Comme $x_D=\frac{1}{y_D}$ on en déduit que $y_D=\frac{1}{x_D}$, le point D appartient bien à l'hyperbole $\mathscr{H}$.
La propriété conjecturée dans l'énoncé est ainsi vérifiée dans le cas général : si trois points appartiennent à $\mathscr{H}$, l'orthocentre du triangle qu'ils forment appartient également à $\mathscr{H}$. On peut ajouter

que si les trois points sont sur la même branche de l'hyperbole, les réels a, b et c ont le même signe, alors l'orthocentre est sur l'autre branche sont abscisse a un signe opposé aux trois autres. Dans le cas contraire (1 point sur une branche et les deux autres sur la 2e), l'orthocentre est du côté des deux points. Ci-dessous d'autres illustrations de ces situations.



Correction de l'exercice 3 (Algorithmique (5 points))

a) L'équation d'un cercle de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rayon R est $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.
Cela se transforme par développement en $x^2-2xx_0+x_0^2+y^2-2yy_0+y_0^2-R^2=0$.
Cela se réduit pour arriver sur la forme de l'énoncé : $x^2+y^2+2(-x_0)x+2(-y_0)y+x_0^2+y_0^2-R^2=0$.
On reconnait la forme $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ avec $a=-x_0$, $b=-y_0$ et $c=x_0^2+y_0^2-R^2$.

b) Une équation du type $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ n'est pas forcément l'équation d'un cercle car elle se réduit en $(x+a)^2+(y+b)^2=a^2+b^2-c$ et le 2e membre de cette égalité n'est pas forcément positif, comme il se doit pour un cercle.

- Si $a^2+b^2-c<0$ il ne peut y avoir de points de coordonnées (x, y) vérifiant l'équation. L'ensemble des solutions est vide.
- Si $a^2+b^2-c=0$ il n'y a qu'un point, de coordonnées $(-a, -b)$ qui vérifie l'équation : ce n'est pas un cercle.

c) Le programme suivant prend a, b et c en entrée et détermine si une équation du type $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ est l'équation d'un cercle. Si c'est le cas, il affiche les valeurs de $x_0=-a$, $y_0=-b$ et $R=\sqrt{x_0^2+y_0^2-c}$. Sinon, il affiche le texte « non cercle ».

```python
from math import sqrt

def cercle(a,b,c):
    if a**2+b**2-c>0:
        x0=-a
        y0=-b
        R=sqrt(a**2+b**2-c)
        return x0,y0,R
    else : return "non cercle"


print(cercle(-1,-3,5))
print(cercle(-1/2,-3/2,3))
```

exécution

```
>>>
(1, 3, 2.23606797749979)
non cercle
```

d) Ce programme reconnait un cercle avec les valeurs $(a, b, c)=(-1, -3, 5)$, son centre a pour coordonnées $(1, 3)$ et son rayon $R \approx 2.23606797749979$ a pour valeur exacte $\sqrt{5}$.
Avec les valeurs $(a, b, c)=(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 3)$, il n'y a pas de cercle.

Correction de l'exercice 4 (Ensembles de points (5 points))

1) $ABCD$ étant un quadrilatère, on désigne par Γ l'ensemble des points M du plan tels que :

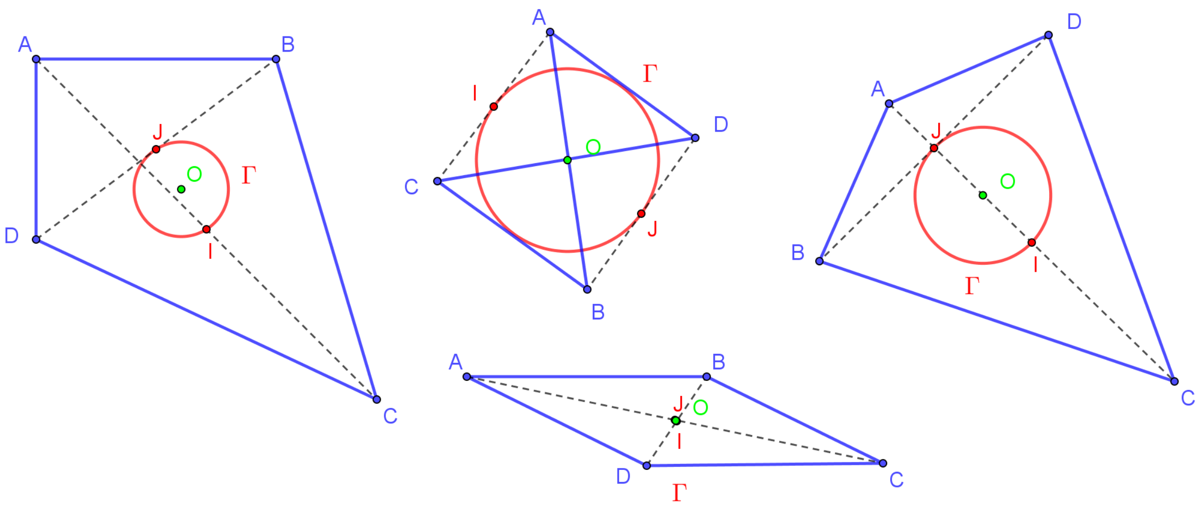
$$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right)=0$$

a) I et J étant les milieux des segments $[AC]$ et $[BD]$, on a :
$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)=2\overrightarrow{MI}$ et, de même, $\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right)=2\overrightarrow{MJ}$.
D'où, l'égalité vérifiée par M devient $\left(2\overrightarrow{MI}\right).\left(2\overrightarrow{MJ}\right)=0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}=0$.

On en déduit que l'ensemble Γ est le cercle de diamètre $[IJ]$.
On peut justifier cela de plusieurs manières :

- l'angle $\left(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}\right)$ doit être droit puisque les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MJ}$ sont orthogonaux. Et on sait que le cercle de diamètre $[IJ]$ contient tous les points M tels que $\left(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}\right) = \frac{\pi}{2}$.
- C'est aussi une conséquence du théorème de la médiane qui annonce que $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = MO^2 - \frac{IJ^2}{4}$, O étant le milieu de $[IJ]$. On a donc ici $MO^2 = \frac{IJ^2}{4} = OI^2$, ce qui traduit bien l'appartenance de M au cercle de centre O passant par I, soit le cercle de diamètre $[IJ]$.

b) L'ensemble Γ peut-il être réduit à un seul point ?
Oui, lorsque I et J sont confondus. Dans ce cas, le cercle de diamètre $[IJ]$ est réduit au point $I = J$ et l'ensemble Γ ne contient que ce point. Le quadrilatère $ABCD$ a alors ses deux diagonales qui se coupent en un même point : c'est un parallélogramme.



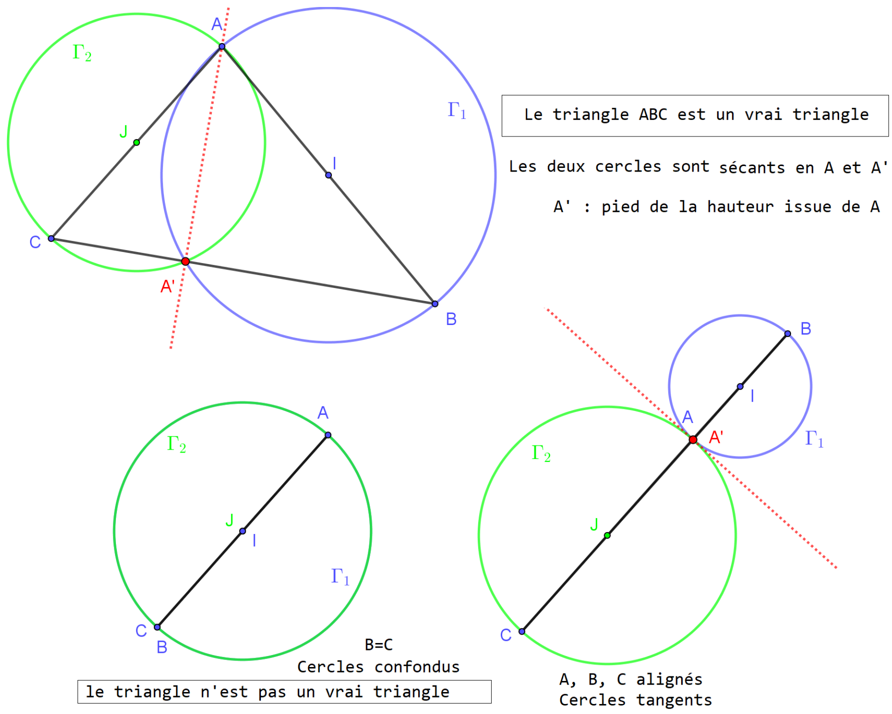
2) ABC étant un triangle, on désigne par Γ_1 et Γ_2 les ensembles de points M du plan tels que :

$$M \in \Gamma_1 \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \text{ et } M \in \Gamma_2 \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} = 0$$

a) $M \in \Gamma_1 \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \iff \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.
On reconnait la définition du cercle de diamètre $[AB]$ (voir justification dans la partie 1-a).
Pour la même raison, $M \in \Gamma_2 \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} = 0$ est la définition du cercle de diamètre $[AC]$.

b) L'intersection de Γ_1 et Γ_2 est l'intersection de deux cercles passant par A.
Deux cercles peuvent être confondus, sécants en deux points, tangents en en seul point ou bien disjoints. Comme ils contiennent A, les cercles Γ_1 et Γ_2 sont confondus, sécants ou tangents.

- Ils sont confondus si B et C sont confondus, ce qui n'est pas le cas pour un vrai triangle.
- Ils sont tangents si A, B et C sont alignés, ce qui n'est pas le cas pour un vrai triangle.
- Dans le cas général, ils sont sécants en deux points, A étant le premier de ces points. L'autre point d'intersection, A', est sur le cercle de diamètre $[AB]$ ($\widehat{AA'B}$ est donc droit) et aussi sur le cercle de diamètre $[AC]$ ($\widehat{AA'C}$ est donc aussi droit).
  On en déduit que les droites $(A'B)$ et $(A'C)$ sont confondues (car toutes deux perpendiculaires à $(A'A)$). On se rend mieux compte de cela sur une figure (voir ci-dessous). La conséquence est que A' est le point de (BC) tel que $(BC) \perp (AA')$: c'est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.



BONUS : Si k un réel et si $M \in \Gamma_1 \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = k$ et $M \in \Gamma_2 \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} = k$, alors on a :

$$\begin{aligned} M \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \implies \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} &\iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} = 0 \\ &\iff \overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\right) = 0 \\ &\iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0 \end{aligned}$$

Cette égalité prouve que si $M \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ alors M est sur la hauteur issue de A (car $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BC}$).
Pourquoi n'y a t-il que deux points de cette hauteur, et pas toute la hauteur : car Γ_1 et Γ_2 sont des cercles... faut-il encore le prouver ? Cela a été fait dans le cours : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k \iff MI^2 = \frac{AB^2}{4} + k$.
Les cercles n'existent pas toujours (pour que Γ_1 existe, il faut que $k \geqslant -\frac{AB^2}{4}$), et s'ils existent tous les deux alors ils ne se coupent pas forcément. Mais quand ils se coupent, c'est en deux points E et F (éventuellement confondus avec E) de la hauteur issue de A.
L'illustration ci-dessous montre ces différentes situations pour un même triangle.