DS n°3 : Géométrie 2

Exercice 1 (Ensembles de points(5 points))

On suppose que les points A et B sont tels que $AB = 4$.

a) Déterminer et tracer l'ensemble Γ_1 des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$.

b) Déterminer et tracer l'ensemble Γ_2 des points M tels que $MA^2 - MB^2 = -AB^2$.
Indication : on pourra montrer que le point A est sur la ligne de niveau cherchée

Exercice 2 (Trigonométrie (4 points))

a) Montrer que, pour tous réels a et b, on a : $2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

b) En déduire que $2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\right) = \sin\frac{6\pi}{7}$.

c) Déterminer alors la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}$.

Exercice 3 (Orthocentre (4 points))

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(-1;1)$, $B(1;1)$ et $C(c;0)$ avec $c \in \mathbb{R}$. On se propose de montrer que lorsque c décrit $\mathbb{R}$, l'orthocentre H du triangle ABC se déplace sur une courbe que l'on identifiera.

a) Déterminer l'équation de la hauteur issue de B, notée h_B.

b) Déterminer l'équation de la hauteur issue de C, notée h_C.

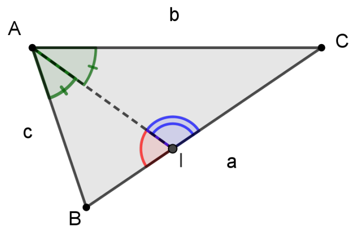
c) Calculer les coordonnées du point d'intersection $H = h_B \cap h_C$ en fonction de c.

d) La relation entre les coordonnées de H conduit à l'équation d'une courbe, laquelle ?

Exercice 4 (Bissectrice(5 points))

Soit ABC un triangle quelconque et les notations $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.
La bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A}$ coupe le côté $[BC]$ en un point I.

a) Montrer que $\frac{IB}{IC} = \frac{c}{b}$.
Indication : utiliser la loi des sinus dans ABI et ACI.

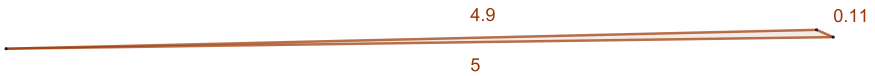


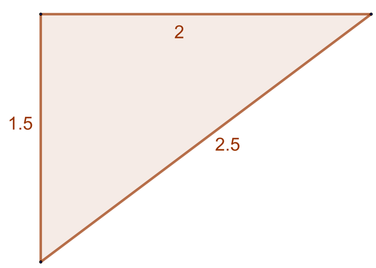
b) Justifier que $b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$.
En déduire que $IB = \frac{ac}{b+c}$ et que $IC = \frac{ab}{b+c}$.

c) Montrer que $a \times IA^2 = b^2 \times IB + c^2 \times IC - a \times IB \times IC$.
Indication : utiliser la loi des cosinus dans AIB et AIC relativement aux angles supplémentaires $\widehat{AIB}$ et $\widehat{AIC}$.
En déduire que $AI^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}(b+c-a)(b+c+a)$.

Exercice 5 (Programme (2 points))

Écrire une fonction Python `aire` qui prend en argument trois nombre positifs `a,b,c` et qui calcule l'aire du triangle de côtés `a`, `b` et `c` à l'aide de la formule de Héron qui, on le rappelle, donne cette aire égale à $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ avec $p = \frac{a+b+c}{2}$.
Tester avec `(a,b,c)=(1.5,2,2.5)` puis avec `(a,b,c)=(5,4.9,0.11)`.
Donner les résultats d'exécution.

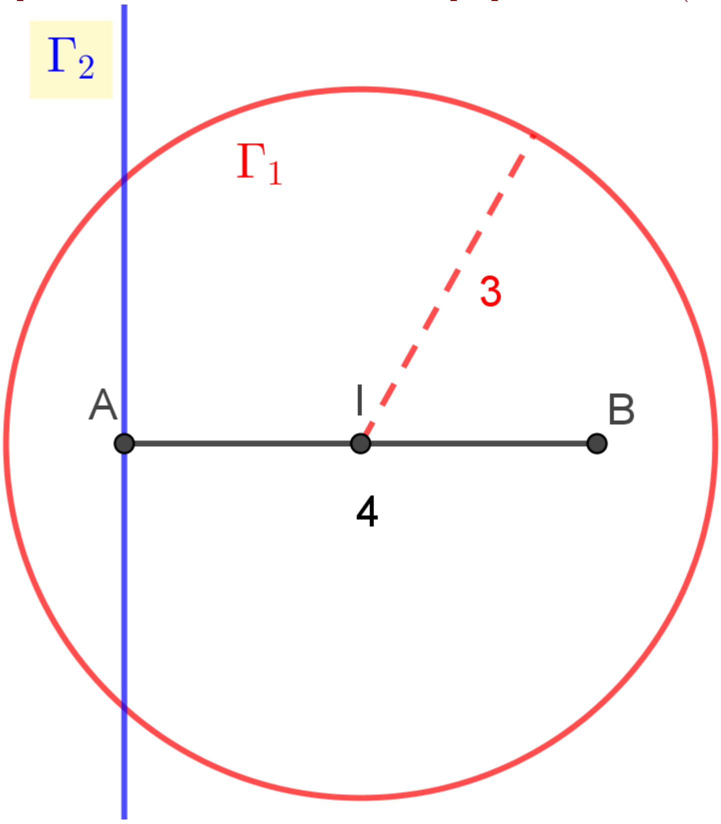




Correction de l'exercice 1 (Ensembles de points(5 points))

a) Les points M vérifiant $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=5$ sont sur un cercle dont le centre est le milieu I de $[AB]$.
On peut montrer cela avec le théorème de la médiane $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4}$.
Comme $AB=4$, on a $MI^2-\frac{4^2}{4}=5 \iff MI^2=IA^2-1=5+4=9$, le rayon du cercle Γ_1 est $\sqrt{9}=3$.

b) Le second théorème de la médiane nous indique que $MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$, avec toujours I milieu de $[AB]$.
Comme ici $AB=4$ et $MA^2-MB^2=-AB^2$, on a $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{-4^2}{2}=-8$.
Les points M vérifiant $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=-8$ ont tous le même projeté orthogonal C sur la droite (AB).
Le point $C\in(AB)$ vérifiant l'égalité $\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{AB}=-8$ est défini par $IC\times AB=8 \iff IC=\frac{8}{4}=2$ car $AB=4$. D'autre part $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont de sens contraires donc $C\in[IA)$ avec $IC=2$, autrement dit $C=A$. L'indication n'était pas trompeuse : le point A est bien sur la ligne de niveau cherchée.
Les points M de Γ_2 sont sur la droite perpendiculaire à (AB) passant par A.



Correction de l'exercice 2 (Trigonométrie (4 points))

a) On sait que $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$ et $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$.
En additionnant ces deux égalités membre à membre, il vient :
$\sin(a+b)+\sin(a-b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a+\sin a\cos b-\sin b\cos a=2\sin a\cos b$, ce qu'il fallait démontrer.

b) Développons l'expression $A=2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right)$:
$A=2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$.
En utilisant la propriété du **a** pour les deux derniers termes et la propriété de duplication du sinus ($2\sin a\cos a=\sin 2a$) pour le premier, on a :
$A=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{3\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{7}-\frac{3\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{5\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{7}-\frac{5\pi}{7}\right)$.
Cela se réduit en :
$A=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)+\sin\left(-\frac{4\pi}{7}\right)$.
Comme $\sin -a=-\sin a$, on obtient une somme d'où 4 termes s'éliminent :
$A=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)=\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)$.

c) Comme $2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right)=\sin\frac{6\pi}{7}$, en divisant par $2\sin\frac{\pi}{7}$, on obtient : $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{\sin\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$.
Et comme $\sin\frac{6\pi}{7}=\sin\left(\pi-\frac{6\pi}{7}\right)=\sin\left(\frac{7\pi-6\pi}{7}\right)=\sin\frac{\pi}{7}$, la valeur exacte cherchée est : $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{2}$.

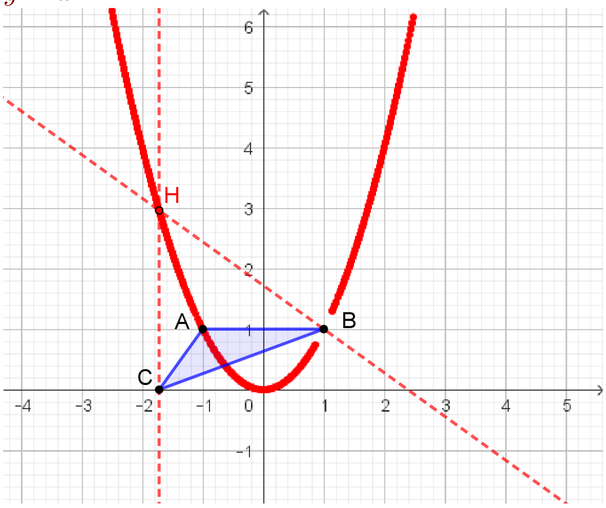
Correction de l'exercice 3 (Orthocentre (4 points))

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, on a les points $A(-1;1)$, $B(1;1)$ et $C(c;0)$ avec $c\in\mathbb{R}$. a) $M(x,y)$ appartient à la hauteur issue de B, notée h_B, si et seulement si $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.
Les composantes des vecteurs étant $\overrightarrow{MB}(1-x;1-y)$ et $\overrightarrow{AC}(c+1;-1)$, on obtient l'équation de h_B : $(1-x)(c+1)+(1-y)(-1)=0\iff c+1-cx-x-1+y=0\iff y=(c+1)x-c$.

b) $M(x,y)$ appartient à la hauteur issue de C, notée h_C, si et seulement si $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.
Les composantes des vecteurs étant $\overrightarrow{MC}(c-x;-y)$ et $\overrightarrow{AB}(2;0)$, on obtient l'équation de h_C : $2(c-x)=0\iff x=c$ (droite verticale).

c) Les coordonnées du point d'intersection $H=h_B\cap h_C$ vérifient $y=(c+1)x-c$ et $x=c$, d'où : $y=(c+1)c-c=c^2$. On a donc $H(c;c^2)$, soit $y_C=x_C^2$.

d) Lorsque c décrit $\mathbb{R}$, l'orthocentre H du triangle ABC se déplace sur la parabole d'équation $y=x^2$.



Correction de l'exercice 4 (Bissectrice(5 points))

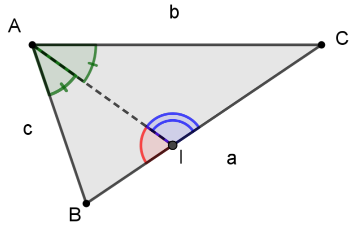
Soit ABC un triangle quelconque et les notations $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.
La bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A}$ coupe le côté $[BC]$ en un point I.
a) I étant sur la bissectrice de $\widehat{A}$, on a $\widehat{IAB}=\widehat{IAC}$. Notons $\widehat{A}$ la mesure commune de ces angles.
D'après la loi des sinus dans le triangle IAC, on a $\frac{IC}{\sin(\widehat{A})}=\frac{AC}{\sin(\widehat{AIC})}$.
D'après la loi des sinus dans le triangle IAB, on a $\frac{IB}{\sin(\widehat{A})}=\frac{AB}{\sin(\widehat{AIB})}$.
Il nous reste à utiliser le fait que les angles $\widehat{AIC}$ et $\widehat{AIB}$ sont supplémentaires (leur réunion forme un angle plat). Ils ont donc même sinus (car $\sin\alpha=\sin(\pi-\alpha)$. Notons $\sin(\widehat{I})$ ce sinus commun.
Ainsi, $\frac{IC}{\sin(\widehat{A})}=\frac{AC}{\sin(\widehat{I})}\iff\frac{IC}{AC}=\frac{\sin(\widehat{A})}{\sin(\widehat{I})}$ d'une part et $\frac{IB}{\sin(\widehat{A})}=\frac{AB}{\sin(\widehat{I})}\iff\frac{IB}{AB}=\frac{\sin(\widehat{A})}{\sin(\widehat{I})}$ d'autre part. On en déduit, finalement, que $\frac{IC}{AC}=\frac{IB}{AB}=\frac{\sin(\widehat{A})}{\sin(\widehat{I})}$; la première égalité s'écrit $\frac{IB}{IC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$.

b) Par construction, les vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires et opposés. Leurs longueurs vérifient, d'après la question précédente : $\frac{IB}{IC}=\frac{c}{b}\iff bIB=cIC$.
On en déduit que $b\overrightarrow{IB}=-c\overrightarrow{IC}\iff b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.
Décomposons avec Chasles le vecteur $\overrightarrow{IC}$: $b\overrightarrow{IB}+c(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC})=\vec{0}\iff(b+c)\overrightarrow{IB}=c\overrightarrow{CB}\iff\overrightarrow{IB}=\frac{c}{b+c}\overrightarrow{CB}$.
Comme $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{CB}$ étant colinéaires et de même sens, on en déduit $IB=\frac{c}{b+c}CB=\frac{ac}{b+c}$.

De même, en échangeant B et C, $IC = \frac{b}{b+c}CB = \frac{ab}{b+c}$.

c) La loi des cosinus dans AIB relativement à l'angle $\widehat{AIB}$:
$\cos(\widehat{AIB}) = \frac{IB^2+IA^2-AB^2}{2IB\times IA}$.
La loi des cosinus dans AIC relativement à l'angle $\widehat{AIC}$ qui, étant le supplémentaire de $\widehat{AIB}$, a un cosinus opposé :
$\cos(\widehat{AIC}) = \frac{IC^2+IA^2-AC^2}{2IC\times IA}$.
Comme $\cos(\widehat{AIB}) = -\cos(\widehat{AIC})$ on en déduit :
$\frac{IB^2+IA^2-AB^2}{2IB\times IA} = -\frac{IC^2+IA^2-AC^2}{2IC\times IA} \iff 2IC \times IA(IB^2 + IA^2 - c^2) = -2IB \times IA(IC^2 + IA^2 - b^2)$
On a donc, en simplifiant par $2IA$:
$IC(IB^2+IA^2-c^2) = -IB(IC^2+IA^2-b^2) \iff (IB+IC)IA^2 = IC\times c^2+IB\times b^2-IB\times IC(IB+IC)$
En remplaçant $IB + IC$ par a :
$aIA^2 = IC \times c^2 + IB \times b^2 - a \times IB \times IC$.

Enfin, en remplaçant IB et IC par les expressions obtenues précédemment :
$aIA^2 = \frac{ab}{b+c} \times c^2 + \frac{ac}{b+c} \times b^2 + a \times \frac{ac}{b+c} \times \frac{ab}{b+c}$.
Mettons au même dénominateur les deux parties du membre de droite :
$aIA^2 = \frac{abc^2+acb^2}{b+c} - a \times \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$.
Simplifions par a :
$IA^2 = \frac{bc(b+c)}{b+c} - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = bc\left(\frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2}\right) = \frac{bc}{(b+c)^2}(b+c-a)(b+c+a)$.



CORRECTION DE L'EXERCICE 5 (PROGRAMME (2 POINTS))

Voici une fonction `aire(a,b,c)` qui calcule l'aire du triangle de côtés `a`, `b` et `c` à l'aide de la formule de Héron :

```
from math import *
def aire(a,b,c):
    p=(a+b+c)/2
    s=p*(p-a)*(p-b)*(p-c)
    return sqrt(s)

print(aire(1.5,2,2.5))
print(aire(5,4.9,0.11))
```

```
1.5
0.1134117470767454
```

`aire(1.5,2,2.5)` a pour résultat $1,5$
`aire(5,4.9,0.11)` a pour résultat approximatif $0,1134$.
Les aires de deux triangles ci-dessous sont correctement calculées par ce programme.