Entrainement pour le DS n°2

Exercice 1 (Échauffement (3 points))

A et $B \neq A$ sont deux points. Caractériser et représenter l'ensemble des points M tels que :

① $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$, ② $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0[2\pi]$, ③ $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi[2\pi]$, ④ $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Exercice 2 (Parallélogramme (5 points))

Soient $ABCD$ un parallélogramme et x un réel non nul quelconque.

On appelle M, le point de (DC) tel que $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DC}$ et N, le point de (BC) tel que $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{x}\overrightarrow{BC}$.

a) Faire une figure pour le cas où $x = \frac{2}{5}$ et une autre pour le cas $x = -\frac{1}{2}$.
Pour les deux cas, prendre un parallélogramme qui ne soit ni un rectangle ni un losange (utiliser le quadrillage et la règle).
Quelle propriété semble vérifiée par les points A, M et N ?

b) Pour vérifier cette propriété, on va se placer dans le repère $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$:
Exprimer dans ce repère, les coordonnées des points D, C, A, B, M et N.

c) Montrer, en utilisant les coordonnées, que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont colinéaires, puis conclure.

Exercice 3 (Angles (6 points))

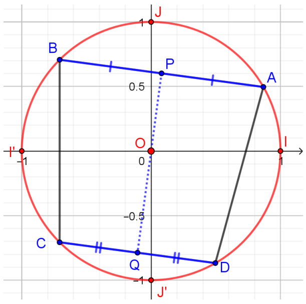
A, B, C, D sont des points du cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes respectives a, b, c, d.
On s'intéresse au cas où $(AB)//(CD)$

a) Déterminer a, b, c, d dans la situation de la figure ci-contre où :

- OAJ et OID sont des triangles équilatéraux
- B et C sont tels que $(OB)//(IJ)$ et $(OC)//(IJ')$

Montrer que, dans ce cas particulier, on a $a + b = c + d \ \ [2\pi](\star)$.

En appelant P et Q, les milieux des segments $[AB]$ et $[CD]$, déterminer, à l'aide des abscisses curvilignes de A, B, C, D calculées, les mesures de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP})$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OQ})$ et montrer que ces angles sont opposés ce qui prouve indirectement le parallélisme de (AB) et (CD).



b) Dans le cas général, montrer que si $(AB)//(CD)$, la propriété $\star$ est toujours vérifiée.
Raisonner sur les angles $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP})$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OQ})$ en envisageant les deux cas : angles opposés ou angles égaux.

c) Á l'aide du théorème de l'angle inscrit [1], déterminer $\widehat{BCD}$ et $\widehat{ABC}$, les deux angles du trapèze isocèle $ABCD$: dans le cas particulier de la question a) d'abord puis dans le cas général.

Exercice 4 (Algorithmique (6 points))

On veut mettre au point un programme qui prend six nombres `a1`, `b1`, `c1`, `a2`, `b2` et `c2` en entrée et qui affiche, selon les cas, les coordonnées du point d'intersection des droites D_1 `: a1*x+b1*y+c1=0` et D_2 `: a2*x+b2*y+c2=0` ou un des messages suivants : `"disjointes"` ou `"confondues"`.

a) Étude préalable :

- Proposer un 1er test qui permet de détecter si les droites D_1 et D_2 sont parallèles.
- Proposer un 2e test qui, lorsque $D_1//D_2$, permet de détecter si elles sont confondues.
- Dans le cas où les droites ne sont pas parallèles, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection en fonction des six paramètres d'entrée.

b) Algorithme :
Écrire en pseudo-français l'algorithme qui permet de répondre au problème.
Il n'y a pas de formalisme particulier attendu ici, il s'agit de faire le plan du programme que l'on va réaliser.

c) Programme :
Écrire la traduction de votre algorithme dans le langage de votre calculatrice.
Faire le travail d'abord sur la calculatrice et recopier le programme ensuite.
Exécuter le programme avec en entrée :
① `(1,-1,2,2,-2,6)`, ② `(2,-2,4,-3,3,-6)` puis ③ `(3,-3,6,4,-2,2)`.

1. un angle inscrit qui intercepte le même arc qu'un angle au centre mesure la moitié de cet angle au centre

Correction de l'exercice 1 (Échauffement (3 points))

① $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

C étant un point tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$ (sur ma figure, ABC est un triangle isocèle-rectangle en B), M est sur la demi-droite $[AC)$ (point M_1 de la figure, ensemble tracé en vert).

② $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0[2\pi]$

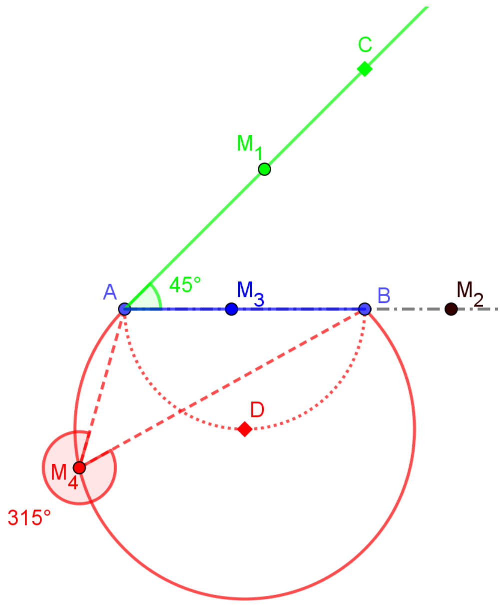
M est sur la demi-droite $[AB)$ (point M_2 de la figure, ensemble tracé en noir pointillé).

③ $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi[2\pi]$

M est sur le segment $[AB]$ (point M_3 de la figure, ensemble tracé en bleu).

④ $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

D étant le point tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{4}$ et $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}) = \frac{\pi}{2}$ (sur ma figure, ABD est un triangle isocèle-rectangle en D), M est sur le grand arc de cercle de centre D passant par A et B (point M_4 de la figure, ensemble tracé en rouge). La justification de cette construction n'était pas attendue, mais elle tient du théorème de l'angle inscrit.



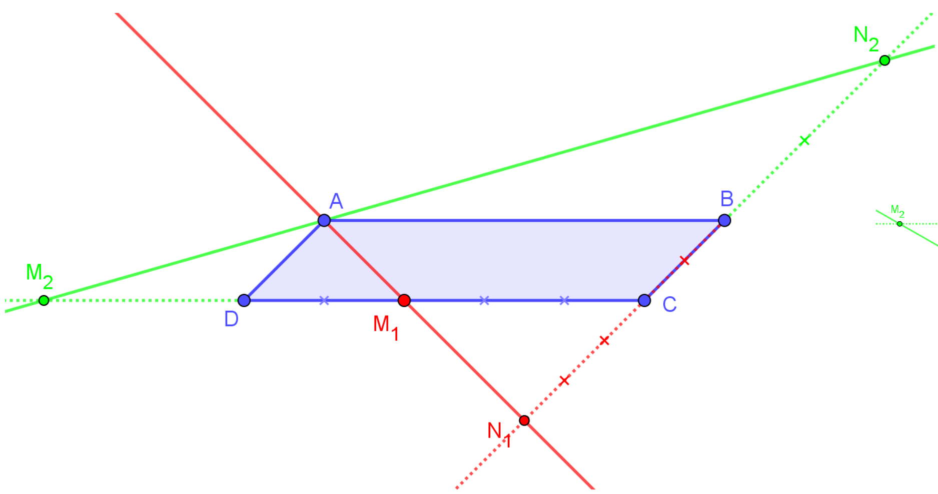
Correction de l'exercice 2 (Parallélogramme (5 points))

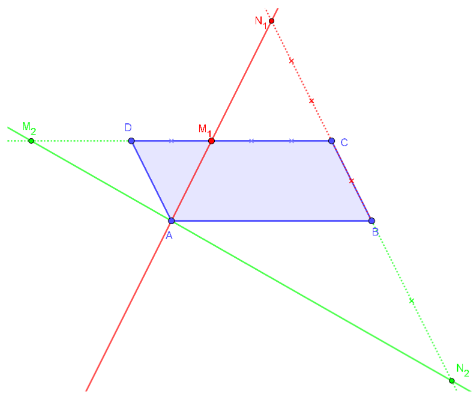
M est le point de (DC) tel que $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DC}$

N est le point de (BC) tel que $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{x}\overrightarrow{BC}$.

a) La figure pour le cas où $x = \frac{2}{5}$ est en rouge (points M_1 et N_1).

La figure pour le cas $x = -\frac{1}{2}$ est en vert (points M_2 et N_2).





Dans les deux cas, les points A, M et N semblent alignés.

b) Dans le repère $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$, on a :
- $D(0;0)$, $C(1;0)$, $A(0;1)$ et $B(1;1)$
- $M(x;0)$ car $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DC} + 0\overrightarrow{DA}$
- $N(1; 1-\frac{1}{x})$ car

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DN} &= \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BN} && \text{(Chasles)}\\
&= \overrightarrow{DB} + \frac{1}{x}\overrightarrow{BC} && \text{(définition)}\\
&= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} - \frac{1}{x}\overrightarrow{DA} && \text{(parallélogramme}ABCD)\\
&= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}\left(1-\frac{1}{x}\right) && \text{(factorisation)}
\end{aligned}$$

c) Les coordonnées de points nous donnent les composantes des vecteurs dans la base $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$:
- $\overrightarrow{AM}(x-0, 0-1) = (x, -1)$
- $\overrightarrow{AN}(1-0; 1-\frac{1}{x}-1) = (1; -\frac{1}{x})$.

Montrons que ces deux vecteurs sont colinéaires :
$det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = x \times \left(-\frac{1}{x}\right) - 1 \times (-1) = -1+1 = 0$
Le déterminant de ces vecteurs étant nul, les vecteurs sont colinéaires.
Les points A, M et N sont donc bien alignés.
NB : Le seul cas qui pose problème n'est pas envisagé ici, mais quand $x = 0$, le point M est en D et le point N à priori n'existe pas : il est repoussé à l'infini sur (BC). En considérant qu'il n'y a qu'un seul point infini... N est à l'infini sur (AD) également, et les trois points restent alignés.

Correction de l'exercice 3 (Angles (6 points))

a) OAJ étant un triangle équilatéral, on a $\widehat{AOJ} = \frac{\pi}{3}$ et $\widehat{IOA} = \frac{\pi}{6}$ d'où $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{6}$ et donc $a = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.
De même OID étant un triangle équilatéral, on a $\widehat{IOD} = \frac{\pi}{3}$ d'où $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD}) = -\frac{\pi}{3}$ et donc $d = -\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}\ [2\pi]$.
B étant tel que $(OB)//(IJ)$, on a $\widehat{IOB} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$ d'où $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4}$ et donc $b = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.
C étant tel que $(OC)//(IJ')$, on a $\widehat{IOC} = \frac{-\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$ d'où $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}) = -\frac{3\pi}{4}$ et donc $c = -\frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}\ [2\pi]$.

Calculons dans ce cas $a+b-c-d\ [2\pi]$:

$$\begin{aligned}
a+b-c-d &= \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\\
&= \frac{2\pi}{12} + \frac{9\pi}{12} - \frac{15\pi}{12} + \frac{4\pi}{12}\\
&= \frac{(2+9-15+4)\pi}{12} = 0\ [2\pi]
\end{aligned}$$

La somme $a+b-c-d\ [2\pi]$ étant nulle, on a bien $a+b = c+d\ [2\pi]$, ce qu'il fallait prouver.

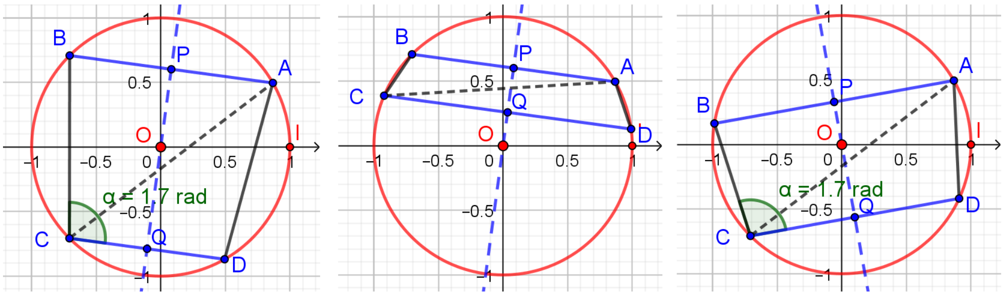
En appelant P le milieu du segment $[AB]$, on a :

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP}) &= (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP})\\
&= a + \frac{1}{2}(b-a) = \frac{a+b}{2}
\end{aligned}$$

De même, Q étant le milieu de $[CD]$, on a $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OQ}) = \frac{c+d}{2}$.
Dans le cas particulier de la figure, on a :
$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{11\pi}{24}$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OQ}) = \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{5\pi}{3}\right) = \frac{35\pi}{24}$.
On remarque que $\frac{35\pi}{24} = \frac{24\pi}{24} + \frac{11\pi}{24} = \pi + \frac{11\pi}{24}$ et donc $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OQ}) = \pi + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP})$, les deux angles sont

opposés. Par conséquent $(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}) = (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OQ}) - (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OP}) = \pi$: les points P, O et Q sont alignés dans cet ordre. Les droites (OP) et (OQ) sont les médiatrices des cordes $[AB]$ et $[CD]$. Puisque ces médiatrices sont confondues, les cordes sont parallèles (selon le principe bien connu qu'une droite étant perpendiculaire à deux autres droites, ces deux autres droites sont parallèles entre elles). Les cordes $[AB]$ et $[CD]$ sont donc parallèles.

b) Supposons $(AB)//(CD)$.
On a vu que $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OP}) = \frac{a+b}{2}\ [2\pi]$
De même, $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OQ}) = \frac{c+d}{2}\ [2\pi]$
Dans le cas où ces angles sont opposés (la situation est celle de l'illustration et des figures de droite et gauche ci-dessous), on aura donc $\frac{a+b}{2} = \frac{c+d}{2} + \pi\ [2\pi]$ et on en déduit que $a+b = c+d+2\pi\ [2\pi]$ d'où $a+b = c+d\ [2\pi]$.
Dans le cas où ces angles sont égaux (la situation est illustrée ci-dessous, au centre), on aura $\frac{a+b}{2} = \frac{c+d}{2}\ [2\pi]$ et donc $a+b = c+d\ [2\pi]$.
Dans les deux cas, l'égalité $\star$ est vérifiée.



c) L'angle inscrit dans le cercle de centre O – $\widehat{BCD}$ – intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{BOD}$; d'après le théorème de l'angle inscrit, sa mesure est la moitié de celle de $\widehat{BOD}$, soit la valeur absolue de la mesure principale de $\frac{b-d}{2}\ [2\pi]$ (on cherche un angle géométrique, c'est-à-dire positif et inférieur à 180).
Dans le cas particulier de la question a) cela donne $\widehat{BCD} = \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{3}\right) = \frac{13\pi}{24} \approx 1,7$rad.
Pour l'autre angle – $\widehat{ABC}$ – sachant que les cordes $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles, on sait déjà que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ sont supplémentaires (leur somme mesure π radians).
On a donc, dans le cas particulier de la question a) : $\widehat{ABC} = \pi - \frac{13\pi}{24} = \frac{11\pi}{24}$.
Dans le cas général, $\widehat{ABC} = \pi - \widehat{BCD}$.

Correction de l'exercice 4 (Algorithmique (6 points))

On veut mettre au point un programme qui prend six nombres `a1`, `b1`, `c1`, `a2`, `b2` et `c2` en entrée et qui affiche, selon les cas, les coordonnées du point d'intersection des droites D_1 `: a1*x+b1*y+c1=0` et D_2 `: a2*x+b2*y+c2=0` ou un des messages suivants : `"disjointes"` ou `"confondues"`.

a) Étude préalable : Test qui permet de détecter si les droites D_1 et D_2 sont parallèles : il est fourni par le déterminant des deux vecteurs directeurs, soit des vecteurs de coordonnées (`-b1` ;`a1`) et (`-b2` ;`a2`). Ce déterminant devant être nul pour que les droites soient parallèles, le test est `-b1*a2+b2*a1=0` ou `b2*a1=b1*a2`.

Lorsque $D_1//D_2$, pour savoir si les droites sont confondues il suffit de tester si l'ordonnée des deux points ayant même abscisse sont égales. En prenant $x = 0$ par exemple, il suffit de tester si $\frac{-c1}{b1} = \frac{-c2}{b2}$ soit $\frac{c1}{b2} = \frac{c2}{b1}$ ou encore $b2 * c1 = b1 * c2$. Il y a un problème si les droites sont verticales, soit lorsque `b1=b2=0`. Dans ce cas, il suffit de tester si $\frac{-c1}{a1} = \frac{-c2}{a2}$ soit $a2 * c1 = a1 * c2$.

Dans le cas où les droites ne sont pas parallèles, leur point d'intersection vérifie les deux égalités. En résolvant le système, je trouve $x = \frac{c2*b1-c1*b2}{b2*a1-b1*a2}$ et $y = \frac{c2*a1-c1*a2}{a2*b1-a1*b2}$.

b) Algorithme :
Pour répondre au problème posé, l'algorithme commence par les entrées, puis les tests et finit par les affichages :

1. Entrer `a1`, `b1`, `c1`, `a2`, `b2` et `c2`
2. Si `b2*a1=b1*a2`
3. alors si ($b1 \neq 0$ et $\frac{c1}{b2} = \frac{c2}{b1}$) ou si ($b1 = 0$ et $a2 * c1 = a1 * c2$)
4. alors afficher « confondues »
5. sinon afficher « disjointes »
6. fin du si
7. sinon afficher « x= »,$\frac{c2*b1-c1*b2}{b2*a1-b1*a2}$;« y= »,$\frac{c2*a1-c1*a2}{a2*b1-a1*b2}$
8. fin du si

C'est tout !

c) Programme :

Traduisons cet algorithme pour un calculatrice programmable en Python, puis exécutons le programme avec en entrée : ① `(1,-1,2,2,-2,6)`, ② `(2,-2,4,-3,3,-6)` puis ③ `(3,-3,6,4,-2,2)`.

```
def droites(a1,b1,c1,a2,b2,c2) :
    if b2*a1==b1*a2 :
        if b1!=0 and c1*b2==c2*b1 or b1==0 and c1*a2==c2*a1 :
            print("confondues")
        else : print("disjointes")
    else :
        print("x=",(c2*b1-c1*b2)/(b2*a1-b1*a2),"y=",(c2*a1-c1*a2)/(a2*b1-a1*b2))

droites(1,-1,2,2,-2,6)
droites(2,-2,4,-3,3,-6)
droites(3,-3,6,4,-2,2)
```

```
>>>
disjointes
confondues
x= 1.0 y= 3.0
```

On constate que dans le cas ①, les droites sont parallèles et disjointes ; dans le cas ②, les droites sont parallèles et confondues ; dans le cas ③, les droites sont sécantes et leur point d'intersection a pour coordonnées (1 ;3).