DS n°2 : Vecteurs & Angles

Exercice 1 (Parallélogramme (4 points))

$ABDC$ est un parallélogramme.

Les points M, N et P sont tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{CN}$ et $\overrightarrow{PC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

a) Faire une figure.

b) Donner les coordonnées des points M, N et P dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

c) Montrer avec un calcul que M, N et P sont alignés.

Exercice 2 (Droites (4 points))

D_m est une famille de droites d'équation $(m+2)x + 2(m+1)y + 2 = 0$ où m est un réel.

a) Tracer D_{-2} D_{-1} et D_0.

b) Montrer que les droites D_m passent par un point fixe A dont on donnera les coordonnées.

c) Déterminer la valeur de m pour que la droite D_m passe par le point $P(\alpha;\beta)$.

d) A quelle condition, sur α et β, cette valeur de m est-elle définie ? En déduire que les points par lesquels ne passent aucune droite D_m appartiennent tous à une droite Δ dont on donnera l'équation.

Exercice 3 (Trigonométrie (5 points))

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 2x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ puis en donner les solutions dans $[0; 2\pi[$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 3x = \cos(5x - \frac{\pi}{3})$ puis en donner les solutions dans $[0; 2\pi[$.

c) Quelle est la période T de la fonction $f : x \longmapsto 20 + 8\sin(0,4x + \frac{\pi}{3}) + 12\sin(0,1x - \frac{\pi}{4})$?
Justifier votre réponse. Montrer, de plus, que $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant f(x) \leqslant 40$.
En vous aidant de votre calculatrice, déterminer graphiquement (à 0,1 unité près) une solution de l'inéquation $f(x) > 37$ sur $[0; T]$.

Exercice 4 (Algorithme (3 points))

Soient $\vec{u}(u1; u2)$ un vecteur et $P(p1; p2)$ un point.

a) Déterminer comment obtenir les coefficients a et b de l'équation réduite $y = ax + b$ de la droite $d(P, \vec{u})$ (droite passant par P de vecteur directeur $\vec{u}$) en fonction de $p1, p2, u1, u2$ lorsque $u1 \neq 0$.

b) Traduire l'algorithme de la question a par un programme en Python.
Qu'obtient-on à la sortie de ce programme lorsqu'on entre $1, 2, -1, 1$?

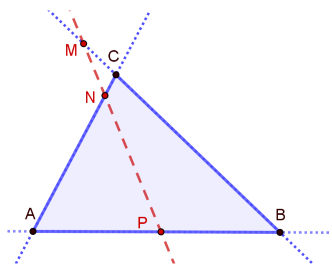
c) Que faut-il jouter dans ce programme pour traiter les cas où $u1 = 0$.
Qu'obtient-on avec l'entrée $1, 2, 0, 1$.

Exercice 5 (Théorème de Ménélaüs (4 points))

Soit ABC un triangle. Les points M, N et P sont situés respectivement sur (BC), (CA) et (AB) en posant $\overrightarrow{PA} = a\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{NC} = b\overrightarrow{NA}$ et $\overrightarrow{MB} = c\overrightarrow{MC}$.

a) Expliquer pourquoi les nombres a, b et c sont différents de 1.

b) Montrer que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{1-c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{c-1}\overrightarrow{AC}$.
En déduire les coordonnées de M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
Faire de même pour les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AN}$



c) Déterminer les composantes de $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

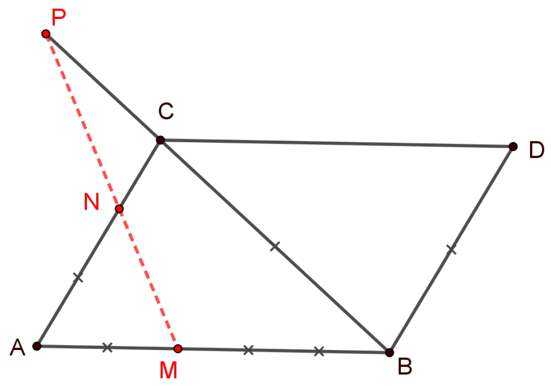
d) En déduire ce résultat, appelé théorème de Ménélaüs[1], que les points M, N et P sont alignés si et seulement si $abc = 1$.

Ménélaüs d'Alexandrie $(70 - 140)$ est un astronome et mathématicien grec

Correction de l'exercice 1 (Parallélogramme (3 points))

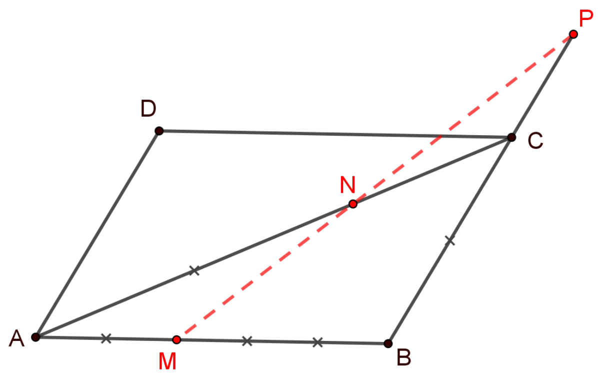
Avec l'énoncé corrigé ($ABDC$ parallélogramme) :

a) La figure :



Avec l'énoncé original ($ABCD$ parallélogramme) :

a) La figure :



Commentaire : fort heureusement, ce changement d'énoncé n'a pas d'impact sur la propriété à montrer. Par la suite, on n'utilise pas le point D et donc, cela ne change rien.

b) Les coordonnées des points M, N et P dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$:

- $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ d'où $M(\frac{2}{5}, 0)$
- $\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{CN} \iff \overrightarrow{NA} = 2(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC})\, 3\overrightarrow{NA} = -2\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ où $N(0, \frac{2}{3})$
- $\overrightarrow{PC} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP} = \frac{-1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \iff \overrightarrow{AP} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ d'où $P(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2})$

c) Montrons que M, N et P sont alignés en évaluant le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$:

- $\overrightarrow{MN}(0 - \frac{2}{5}, \frac{2}{3} - 0)$ donc $\overrightarrow{MN}(-\frac{2}{5}, \frac{2}{3})$
- $\overrightarrow{MP}(\frac{-1}{2} - \frac{2}{5}, \frac{3}{2} - 0)$ donc $\overrightarrow{MP}(\frac{-9}{10}, \frac{3}{2})$

$\det(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = -\frac{2}{5} \times \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \times \frac{-9}{10} = \frac{-6}{10} - \frac{-18}{30} = \frac{-18}{30} + \frac{18}{30} = 0.$

Comme $\det(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont colinéaires.

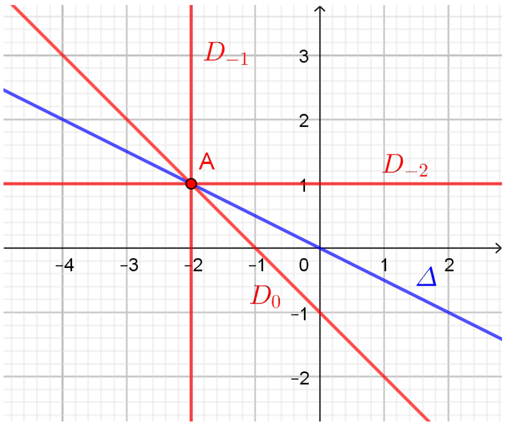
Les points M, N et P sont donc alignés.

Correction de l'exercice 2 (Droites (3 points))

a) On sait que $D_m : (m+2)x + 2(m+1)y + 2 = 0$ donc :

- $D_{-2} : (-2+2)x + 2(-2+1)y + 2 = 0 \iff -2y + 2 = 0 \iff y = 1$
- $D_{-1} : (-1+2)x + 2(-1+1)y + 2 = 0 \iff x + 2 = 0 \iff x = -2$
- $D_0 : (0+2)x + 2(0+1)y + 2 = 0 \iff 2x + 2y + 2 = 0 \iff y = -x - 1$

Traçons D_{-2} D_{-1} et D_0 :



b) Les droites D_m tracées passent par toutes par le point $A(-2,1)$.
Montrons que $\forall m \in \mathbb{R}, A \in D_m$. Remplaçons dans l'équation de D_m les coordonnées (x,y) par $(-2,1)$: $(m+2)\times(-2)+2(m+1)\times 1+2=0 \iff -2m-4+2m+2+2=0 \iff 0=0$. Cette égalité étant vraie pour toute valeur de m , on en déduit que $A(-2,1)$ est bien le point fixe des droites D_m.

c) Si la droite D_m passe par le point $P(\alpha;\beta)$, alors on a :
$(m+2)\alpha+2(m+1)\beta+2=0 \iff m(\alpha+2\beta)=-2\alpha-2\beta-2 \iff m=\frac{-2\alpha-2\beta-2}{\alpha+2\beta}=-2\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha+2\beta}$.

d) Les points par lesquels ne passent aucune droite D_m correspondent au cas où $\alpha=-2\beta$ puisque dans ce cas, on ne peut trouver la valeur de m (le dénominateur étant nul). Or les points $P(\alpha;\beta)$ pour lesquels $\alpha=-2\beta$ sont sur la droite Δ d'équation $-2y=x \iff y=-\frac{x}{2}$. Ils appartient à cette droite sans en constituer la totalité puisque $A(-2;1)$ y appartient aussi, et A est sur toutes les droites D_m. Pour le dire autrement : les droites D_m coupent toujours la droite $\Delta : y=-\frac{x}{2}$ en $A(-2;1)$ et, comme cette droite Δ n'est pas elle-même une droite D_m (car l'équation $(m+2)x+2(m+1)\times\frac{-x}{2}+2=0 \iff (m+2)x-(m+1)x+2=0 \iff 2x-x+2=0 \iff x=-2$ ne donne pas la valeur de m mais la seule abscisse du point A), les points de cette droite (sauf A) ne sont sur aucune droite D_m.

Correction de l'exercice 3 (Trigonométrie (4 points))

a) $\cos 2x=\frac{-\sqrt{3}}{2}=\cos(\pi-\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{5\pi}{6}) \iff 2x=\pm\frac{5\pi}{6}[2\pi]$.
En divisant par 2 on trouve $x=\pm\frac{5\pi}{12}[\pi]$. Dans $[0;2\pi[$, on a $x=\frac{5\pi}{12}$, $x=\frac{5\pi}{12}+\pi=\frac{17\pi}{12}$; d'autre part, on a $x=-\frac{5\pi}{12}+\pi=\frac{7\pi}{12}$, $x=-\frac{5\pi}{12}+2\pi=\frac{19\pi}{12}$.
L'ensemble des solutions dans $[0;2\pi[$ est donc $\{\frac{5\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\frac{17\pi}{12},\frac{19\pi}{12}\}$.

b) $\sin 3x=\cos(5x-\frac{\pi}{3}) \iff \cos(\frac{\pi}{2}-3x)=\cos(5x-\frac{\pi}{3}) \iff \frac{\pi}{2}-3x=\pm(5x-\frac{\pi}{3})[2\pi]$.
Il y a donc deux types de solutions :

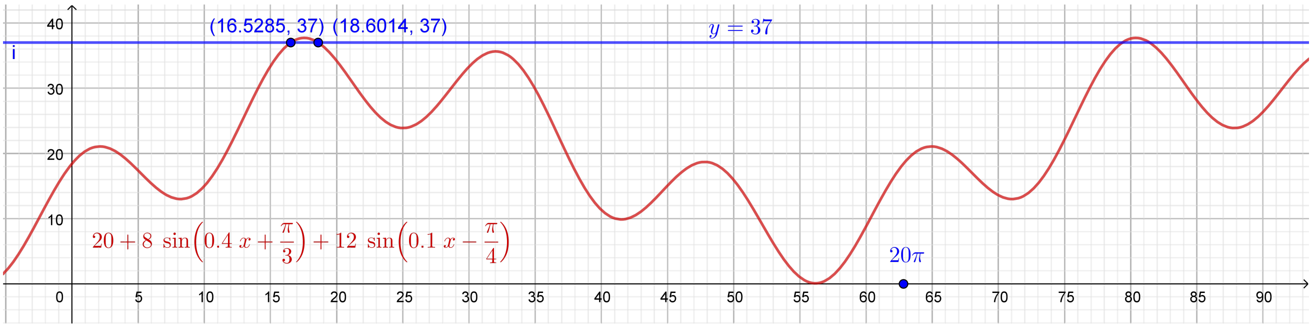
- $\frac{\pi}{2}-3x=5x-\frac{\pi}{3}[2\pi] \iff 8x=\frac{5\pi}{6}[2\pi] \iff x=\frac{5\pi}{48}[\frac{\pi}{4}]$
- $\frac{\pi}{2}-3x=-5x+\frac{\pi}{3}[2\pi] \iff 2x=\frac{-\pi}{6}[2\pi] \iff x=\frac{-\pi}{12}[\pi]$

Dans $[0;2\pi[$, on a 8 solutions avec la 1re série : $\frac{5\pi}{48}$, $\frac{17\pi}{48}$, $\frac{29\pi}{48}$, $\frac{41\pi}{48}$, $\frac{53\pi}{48}$, $\frac{65\pi}{48}$, $\frac{72\pi}{48}$ et $\frac{84\pi}{48}$ (j'ajoute à chaque fois $\frac{\pi}{4}=\frac{12\pi}{48}$).
La 2e série apporte 2 solutions : $\frac{11\pi}{12}=\frac{44\pi}{48}$ et $\frac{23\pi}{12}=\frac{92\pi}{48}$ (j'ajoute à chaque fois $\pi=\frac{12\pi}{12}$).

c) La période T_1 de l'expression $8\sin(0,4x+\frac{\pi}{3})$ est $\frac{2\pi}{0{,}4}=5\pi$.
La période T_2 de l'expression $12\sin(0,1x-\frac{\pi}{4})$ est $\frac{2\pi}{0{,}1}=20\pi$.
La période commune T est donc 20π, puisqu'il faut 4 périodes T_1 pour une période T_2.
La fonction f est donc périodique de période $T=20\pi$.

On sait que $-1\leqslant\sin(0,4x+\frac{\pi}{3})\leqslant 1 \iff -8\leqslant 8\sin(0,4x+\frac{\pi}{3})\leqslant 8$.
D'autre part, $-1\leqslant\sin(0,1x-\frac{\pi}{4})\leqslant 1 \iff -12\leqslant 12\sin(0,4x+\frac{\pi}{3})\leqslant 12$.
Par addition, membre à membre de ces inégalités, on obtient :
$-8-12\leqslant 8\sin(0,4x+\frac{\pi}{3})+12\sin(0,4x+\frac{\pi}{3})\leqslant 8+12$.
Et donc, en ajoutant 20 aux trois membres de cet encadrement, on trouve $0\leqslant f(x)\leqslant 40$.

Avec la calculatrice, en tapant $y=20+8\sin(0,4x+\frac{\pi}{3})+12\sin(0,1x-\frac{\pi}{4})$, on obtient :



Graphiquement, on lit que les solutions de l'inéquation $f(x) > 37$ sur $[0, 20\pi \approx 63]$ vérifient $16,5 < x < 18,6$ (au dixième près).

Correction de l'exercice 4 (Algorithme (2 points))

a) Le point $M(x, y)$ appartient à la droite $d(A, \vec{u})$ si et seulement si $\vec{u}(u1; u2)$ et $\overrightarrow{AM}(x - p1; y - p2)$ sont colinéaires, soit si $det(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = 0$. Cela s'écrit :

$$(x - p1) \times u2 = (y - p2) \times u1 \iff u2x + (-u1)y + (u1p2 - u2p1) = 0$$

Comme on veut une équation réduite de la droite, il faut avoir $u1 \neq 0$ et, dans ce cas, l'équation s'écrit :

$$y = \frac{u2}{u1}x + \frac{u1p2 - u2p1}{u1}$$

Il ne reste plus qu'à écrire l'algorithme qui donne les coefficients de cette droite :

1. Entrer successivement $p1, p2, u1, u2$
2. Calculer $a = \frac{u2}{u1}$
3. Calculer $b = \frac{u1p2 - u2p1}{u1}$
4. Afficher a et b

b) Traduit en programme Python, cela s'écrit :

```
def reduite(p1,p2,u1,u2) :
    a=u2/u1
    b=(-p1*u2+p2*u1)/u1
    print("a=",a,"b=",b)
```

```
reduite(1,2,-1,1)    a= -1.0 b= 3.0
reduite(1,2,3,4)     a= 1.3333333333333333 b= 0.6666666666666666
reduite(1,2,0,1)     ZeroDivisionError: division by zero
```

Lorsqu'on entre $1, 2, -1, 1$, le programme affiche $a = -1.0$, $b = 3.0$.
NB : L'écriture du chiffre des dixièmes est surprenante pour un entier, mais il s'agit de la forme standard d'affichage d'un nombre flottant (version informatique d'un nombre réel). Du fait de la division par $u1$, les nombres entrés deviennent automatiquement des flottants. Essayez le programme en entrant $1, 2, 3, 4$ et vous obtiendrez 1.333333333333333 et 0.666666666666666 ce qui est les coefficients flottants de l'équation réduite $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$.

c) Pour traiter aussi les cas où $u1 = 0$, il suffit d'ajouter un test de la valeur de $u1$. Si ce nombre est non nul, on fait comme précédemment et sinon (c'est-à-dire si $u1 = 0$) on affiche l'équation de la droite « verticale » $x = p1$.
J'ai traduit cette amélioration algorithmique à droite en langage Python.
Avec l'entrée : $1, 2, 0, 1$, on obtient l'équation $x = 1$.

```
def reduite(p1,p2,u1,u2) :
    if u1!=0 :
        a=u2/u1
        b=(-p1*u2+p2*u1)/u1
        print("a=",a,"b=",b)
    else : print("k=",p1)
```

```
reduite(1,2,-1,1)    a= -1.0 b= 3.0
reduite(1,2,3,4)     a= 1.3333333333333333 b= 0.6666666666666666
reduite(1,2,0,1)     k= 1
```

Correction de l'exercice 5 (Théorème de Ménélaüs (4 points))

a) Puisque $\overrightarrow{PA} = a\overrightarrow{PB}$, si a était égal à 1, on aurait $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ ce qui n'est pas possible puisque A et B sont des points à priori différents. Par conséquent $a \neq 1$.
Le même raisonnement s'applique pour expliquer que b et c sont différents de 1.

b) Exprimons le vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$:
$\overrightarrow{MB} = c\overrightarrow{MC} \iff \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = c(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) \iff \overrightarrow{AM}(c-1) = -\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$.
On en déduit que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{1-c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{c-1}\overrightarrow{AC}$.
Les coordonnées de M dans le repère $(A,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont donc $(\frac{1}{1-c},\frac{c}{c-1})$.

De même :
$\overrightarrow{PB} = a\overrightarrow{PB} \iff -\overrightarrow{AP} = a(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) \iff \overrightarrow{AP}(a-1) = a\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AP} = \frac{a}{a-1}\overrightarrow{AB}$.
Les coordonnées de P dans le repère $(A,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont donc $(\frac{a}{a-1},0)$.
$\overrightarrow{NC} = b\overrightarrow{NA} \iff \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AN} = b(-\overrightarrow{AN}) \iff \overrightarrow{AN}(b-1) = -\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AN} = \frac{1}{1-b}\overrightarrow{AC}$.
Les coordonnées de N dans le repère $(A,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont donc $(0,\frac{1}{1-b})$.

c) Les composantes du vecteur $\overrightarrow{MP}$ sont donc $(\frac{a}{a-1} - \frac{1}{1-c},0 - \frac{c}{c-1})$, soit $(\frac{a(1-c)-(a-1)}{(a-1)(1-c)},\frac{c}{1-c})$ ou encore $(\frac{1-ac}{(a-1)(1-c)},\frac{c}{1-c})$.
De même, les composantes du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $(0 - \frac{0}{1-c}, \frac{1}{1-b} - \frac{c}{c-1})$, soit $(\frac{1}{c-1},\frac{(c-1)-c(1-b)}{(c-1)(1-b)})$ ou encore $(\frac{1}{c-1},\frac{bc-1}{(c-1)(1-b)})$.

d) Les points M, N et P sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si le déterminant de ces deux vecteurs est nul. Or $\det(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MN}) = \frac{1-ac}{(a-1)(1-c)} \times \frac{bc-1}{(c-1)(1-b)} - \frac{c}{1-c} \times \frac{1}{c-1}$.
On a donc $\det(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MN}) = 0 \iff \frac{(1-ac)(bc-1)}{(a-1)(1-c)(c-1)(1-b)} - \frac{c}{(1-c)(c-1)} = 0$
En mettant tout au même dénominateur $\det(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MN}) = 0 \iff \frac{(1-ac)(bc-1)-c(a-1)(1-b)}{(a-1)(1-c)(c-1)(1-b)} = 0$

Comme le dénominateur n'est pas nul, on doit avoir $(1-ac)(bc-1) - c(a-1)(1-b) = 0$ soit, en développant $bc-1-abc^2+ac-ac+abc+c-bc = 0 \iff -1+abc+c(1-abc) = 0 \iff (c-1)(1-abc) = 0$.
Comme $c - 1 \neq 0$, on en déduit que $1 - abc = 0 \iff abc = 0 = 1$.