DS n°2 : Polynômes - Vecteurs

Exercice 1 (Développements et factorisations (7 points))

a) Développer $(x+1)^3$ puis $(x-1)^4$

b) Factoriser x^3+1 puis $f(x)=x^4-6x^3+x-6$

c) Expliquer pourquoi $g(x)=4(x-1)^4+x^4$ ne s'annule pour aucun réel ; en déduire que $g(x)$ est le produit de deux polynômes non factorisables du second degré ; factoriser $g(x)$.

d) Effectuer la division euclidienne de $h(x)=2x^4-9x^3-8x^2+16x-5$ par $2x-1$; en déduire une 1re racine du polynôme h ; montrer que ce polynôme possède une racine « évidente » entière ; déterminer alors la factorisation ultime de h.

Exercice 2 (Cubes (4 points))

a) soit P le polynôme défini par $P(x)=x^3-x$. Calculer $P(n)$ pour $n\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$; montrer que les valeurs calculées sont toutes divisibles par un même entier $k>1$; expliquer pourquoi cette propriété est valable pour tout entier n.

b) Montrer que 9^3+10^3 est divisible par $2\times 9+1$; montrer que cela se généralise, le polynôme $Q(x)=x^3+(x+1)^3$ étant divisible par $2x+1$. Déterminer la factorisation ultime de Q.

Exercice 3 (Algorithme (2 points))

Soient $\vec{u}(x_{\vec{u}};y_{\vec{u}})$ un vecteur tel que $x_{\vec{u}}\neq 0$ et $A(x_A;y_A)$ un point.

a) Écrire et justifier un algorithme qui affiche l'équation réduite $y=ax+b$ de la droite $d(A,\vec{u})$ (ou seulement ses coefficients a et b) lorsqu'on entre successivement $x_A, y_A, x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}$.

b) Traduire cet algorithme en un programme (écrit dans le langage de votre calculatrice). Qu'obtient-on à sa sortie lorsqu'on entre $1,2,-1,1$?

Bonus : Modifier l'algorithme pour traiter aussi les cas où on a $x_{\vec{u}}=0$ (tester avec l'entrée :$1,2,0,1$).

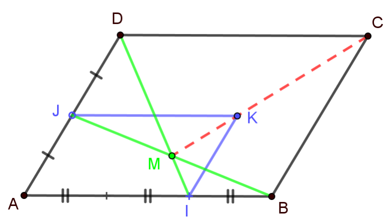
Exercice 4 (Parallélogrammes (3 points))

Soit $ABCD$ un parallélogramme. I et J sont définis par $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; K est tel que $AIKJ$ soit un parallélogramme ; M est le point d'intersection de (DI) et (BJ).
On se place dans le repère $(A,\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ})$.

a) Quelles sont les coordonnées de B, D, C et K ?

b) Déterminer une équation pour les droites (DI) et (BJ) ; en déduire les coordonnées du point M.

c) Démontrer que les points M, K et C sont alignés et déterminer le nombre λ tel que $\overrightarrow{CM}=\lambda\overrightarrow{CK}$.



Exercice 5 (Théorème de Ménélaüs (4 points))

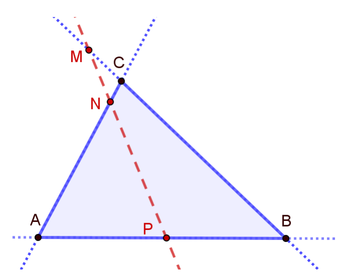
Soit ABC un triangle. Les points M, N et P sont situés respectivement sur (BC), (CA) et (AB) en posant $\overrightarrow{PA}=a\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{NC}=b\overrightarrow{NA}$ et $\overrightarrow{MB}=c\overrightarrow{MC}$.

a) Expliquer pourquoi les nombres a, b et c sont différents de 1.

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. En déduire les coordonnées de M dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

c) Faire de même pour les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AN}$, puis déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$.

d) En déduire ce résultat, appelé théorème de Ménélaüs[1], que les points M, N et P sont alignés si et seulement si $abc=1$.



Ménélaüs d'Alexandrie $(70-140)$ est un astronome et mathématicien grec

Correction de l'exercice 1 (Développements et factorisations (7 points))

a) Développons :
$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
$(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

b) Factorisons :
$x^3 + 1 = x^3 - (-1)^3 = (x+1)(x^2 - x + 1)$
$f(x) = x^4 - 6x^3 + x - 6 = x^3(x-6) + x - 6 = (x^3+1)(x-6) = (x+1)(x-6)(x^2-x+1)$

c) $g(x) = 4(x-1)^4 + x^4$ est la somme de deux termes positifs. Chacun des termes peut s'annuler, mais lorsque le 1er est nul (lorsque $x - 1 = 0 \iff x = 1$) le 2e ne l'est pas (il vaut $1^4 = 1$) et inversement, lorsque le 2e est nul (lorsque $x = 0$) le 1er ne l'est pas (il vaut $4(-1)^4 = 4$).
Le polynôme $g(x)$ n'est donc divisible par aucun facteur du 1er degré (s'il était divisible par $ax + b$ cela impliquerait qu'il s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$ ce qui n'est pas le cas). Il est donc le produit de deux polynômes du second degré qui ne s'annulent pas (pour la même raison : s'ils s'annulaient alors $g(x)$ s'annulerait aussi, ce qui n'est pas le cas).
Pour factoriser $g(x)$, il faut être astucieux et se rappeler l'identité de Sophie Germain :
$4(x-1)^4 + x^4 = \left[2(x-1)^2 + x^2\right]^2 - 2 \times 2(x-1)^2 \times x^2 = \left[3x^2 - 4x + 2\right]^2 - \left[2x(x-1)\right]^2$
La factorisation cherchée est donc $\boxed{\left(5x^2 - 6x + 2\right)\left(x^2 - 2x + 2\right)}$ car :
$\left(3x^2 - 4x + 2 + 2x(x-1)\right)\left(3x^2 - 4x + 2 - 2x(x-1)\right) = \left(5x^2 - 6x + 2\right)\left(x^2 - 2x + 2\right)$
Une autre méthode pour factoriser est l'identification des termes du développement du produit
$$(ax^2 + bx + c)(a'x^2 + b'x + c') = (aa')x^4 + (ab' + ba')x^3 + (ac' + bb' + ca')x^2 + (bc' + cb')x + (cc')$$
avec ceux du développement $4(x-1)^4 + x^4$ qui est, d'après la question a) égal à
Une autre méthode pour factoriser est l'identification des termes du développement du produit
$$4(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) + x^4 = 5x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 16x + 4$$
Cela n'est pas évident puisqu'il y a 5 équations et 6 inconnues...

d) Effectuons la division euclidienne de $h(x) = 2x^4 - 9x^3 - 8x^2 + 16x - 5$ par $2x - 1$:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -9x^3 & -8x^2 & +16x & -5 & 2x \quad -1 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & +x^3 & & & & x^3 \; -4x^2 \; -6x+5 \\ \cline{1-2}
 & -8x^3 & -8x^2 & & & \\
 & 8x^3 & -4x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & -12x^2 & +16x & & \\
 & & 12x^2 & -6x & & \\ \cline{3-4}
 & & & 10x & -5 & \\
 & & & -10x & +5 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Le reste étant nul, on en déduit la factorisation
$$h(x) = (x^3 - 4x^2 - 6x + 5)(2x - 1)$$
Si le polynôme $x^3 - 4x^2 - 6x + 5$ possède une racine « évidente » entière, il s'agit d'un diviseur du terme constant, donc un nombre de l'ensemble $\{1, -1, 5, -5\}$. Comme 1 et -1 ne sont pas des racines de h (car $h(1) = -4 \neq 0$ et $h(-1) = 6 \neq 0$), calculons $h(5) = 125 - 100 - 30 + 5 = 0$.
La racine « évidente » est donc 5.
On en déduit que $x^3 - 4x^2 - 6x + 5 = (x-5)(x^2 + \alpha x - 1)$. Le développement de $(x-5)(x^2 + \alpha x - 1)$ donne $x^3 + (\alpha - 5)x^2 + (-5\alpha - 1)x + 5$. Le nombre α doit vérifier $\alpha - 5 = -4 \iff \alpha = 5 - 4 = 1$, et on peut vérifier que l'autre condition donne la même valeur : $-5\alpha - 1 = -6 \iff \alpha = \frac{1-6}{-5} = \frac{-5}{-5} = 1$.
Ainsi $h(x) = (x-5)(x^2 + x - 1)(2x - 1)$.
La factorisation obtenue n'est pas ultime car le discriminant du trinôme $x^2 + x - 1$ est positif ($\Delta = 5$).
On peut écrire ce trinôme sous la forme $(x - x_1)(x - x_2)$ où $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
Finalement, la factorisation ultime est $\boxed{h(x) = (x-5)(x-x_1)(x-x_2)(2x-1)}$

Correction de l'exercice 2 (Cubes (4 points))

a) $P(x) = x^3 - x$ donc on a

- $P(0) = 0^3 - 0 = 0 = 6 \times 0$
- $P(1) = 1^3 - 1 = 0 = 6 \times 0$
- $P(2) = 2^3 - 2 = 6 = 6 \times 1$
- $P(3) = 3^3 - 3 = 24 = 6 \times 4$
- $P(4) = 4^3 - 4 = 60 = 6 \times 10$
- $P(5) = 5^3 - 5 = 120 = 6 \times 20$
- $P(6) = 6^3 - 6 = 210 = 6 \times 35$

Tous ces nombres sont divisibles par 6.
Pour le montrer, factorisons $P(n) = n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est le produit de trois nombres entiers consécutifs.
Parmi ces nombres, il y en a toujours au moins un qui est pair et un qui est divisible par 3.
Le produit est donc toujours au moins divisible par $2 \times 3 = 6$.

b) $9^3 + 10^3 = 729 + 1000 = 1729 = 19 \times 91$, et $2 \times 9 + 1 = 19$.
Lorsque $n = 9$, $Q(n) = n^3 + (n+1)^3$ est donc divisible par $2 \times n + 1$.
Pour montrer que cela se généralise, divisons le polynôme $Q(x) = x^3 + (x+1)^3$ par $2x + 1$.
Mais tout d'abord développons avec l'aide de la question 1a) : $x^3 + (x+1)^3 = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +3x^2 & +3x & +1 & 2x\ +1 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & -x^2 & & & x^2\ +x\ +1 \\ \cline{1-2}
 & 2x^2 & +3x & & \\
 & -2x^2 & -x & & \\ \cline{2-3}
 & & 2x & +1 & \\
 & & -2x & -1 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Le reste étant nul, on en déduit la factorisation

$$Q(x) = x^3 + (x+1)^3 = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x^2 + x + 1)(2x + 1)$$

Pour un entier n, le nombre $Q(n) = n^3 + (n+1)^3$ est la somme de deux cubes consécutifs.
Comme on vient de le voir, cette somme est toujours divisible par $2n + 1$.
Pour la petite histoire, 1729 est le premier nombre qui est la somme de deux cubes d'entiers naturels de deux façons distinctes : $1729 = 9^3 + 10^3$ mais aussi $1729 = 12^3 + 1^3$. Le génial mathématicien indien Srinivasa Ramanujan (1887-1920) le fit remarquer à Godfrey Harold Hardy, un mathématicien anglais, lorsque celui-ci lui rendit visite en 1917. Mais ce nombre a d'autres propriétés intéressantes : il se décompose en un produit de deux nombres inversés (19×91) et est divisible par la somme de ses chiffres ($1 + 7 + 2 + 9 = 19$). Il n'y a que trois autres nombres à avoir cette propriété (1, 81 et 1458).
La factorisation de Q obtenue est ultime car, le discriminant du trinôme $x^2 + x + 1$ étant négatif ($\Delta = 1 - 4 = -3$), celui-ci ne se factorise pas.

Correction de l'exercice 3 (Algorithme (2 points))

a) Le point $M(x, y)$ appartient à la droite $d(A, \vec{u})$ si et seulement si $\vec{u}(x_{\vec{u}}; y_{\vec{u}})$ et $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$ sont colinéaires, soit si $det(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = 0$. Cela s'écrit :

$$(x - x_A) \times y_{\vec{u}} = (y - y_A) \times x_{\vec{u}} \iff y_{\vec{u}}x + (-x_{\vec{u}})y + (x_{\vec{u}}y_A - y_{\vec{u}}x_A) = 0$$

Comme on veut une équation réduite de la droite, il faut avoir $x_{\vec{u}} \neq 0$ et, dans ce cas, l'équation s'écrit :

$$y = \frac{y_{\vec{u}}}{x_{\vec{u}}}x + \frac{x_{\vec{u}}y_A - y_{\vec{u}}x_A}{x_{\vec{u}}}$$

Il ne reste plus qu'à écrire l'algorithme qui donne les coefficients de cette droite :

1. Entrer successivement $x_A, y_A, x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}$
2. Calculer $a = \frac{y_{\vec{u}}}{x_{\vec{u}}}$
3. Calculer $b = \frac{x_{\vec{u}}y_A - y_{\vec{u}}x_A}{x_{\vec{u}}}$
4. Afficher « y= »a« x+ »b

b) Traduit en programme Python Numworks, cela s'écrit :

```python
def reduite(xA,yA,xU,yU):
  a=yU/xU
  b=(-xA*yU+yA*xU)/xU
  print("y=",a,"x+",b)
```

```
>>> reduite(1,2,-1,1)
y= -1.0 x+ 3.0
>>> reduite(1,2,0,1)
  File "myscript.py", line 2
ZeroDivisionError: division by zero
```

```python
def reduite(xA,yA,xU,yU):
  if xU!=0:
    a=yU/xU
    b=(-xA*yU+yA*xU)/xU
    print("y=",a,"x+",b)
  else: print("x=",xA)
```

```
>>> reduite(1,2,-1,1)
y= -1.0 x+ 3.0
>>> reduite(1,2,0,1)
x= 1
```

Lorsqu'on entre $1, 2, -1, 1$, le programme affiche « y=-1.0 x+3.0 » au lieu de « y=-x+3 » qui serait plus élégant. Mais nous ne cherchons pas ici à obtenir une forme élégante, seulement les coefficients. Un affichage tel que « a=-1.0, b=3.0 » serait tout aussi satisfaisant ; ou même « -1.0, 3.0 ».
NB : L'écriture du chiffre des dixièmes est surprenante pour un entier, mais il s'agit de la forme standard d'affichage d'un nombre flottant (version informatique d'un nombre réel). Du fait de la division par $x_{\vec{u}}$, les nombres entrés deviennent automatiquement des flottants. Essayez le programme en entrant $1, 2, 3, 4$ et vous obtiendrez « y=1.3333333333333333 x+0.6666666666666666 » ce qui est la forme flottante de l'équation réduite $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$.

Bonus (1 point) :
Pour traiter aussi les cas où $x_{\vec{u}} = 0$, il suffit d'ajouter un test de la valeur de $x_{\vec{u}}$. Si ce nombre est non nul, on fait comme précédemment et sinon (c'est-à-dire si $x_{\vec{u}} = 0$) on affiche l'équation de la droite « verticale » $x = x_A$.
J'ai traduit cette amélioration algorithmique à droite en langage Python.
Avec l'entrée : $1, 2, 0, 1$, on obtient l'équation $x = 1$.

Correction de l'exercice 4 (Parallélogrammes (3 points))

a) Quelles sont les coordonnées de B, D, C et K dans le repère $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$?
Nous ne sommes pas dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ comme certains l'ont pensé. Notez que le résultat final sera le même, mais pas les questions préliminaires.
Comme $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, on a $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$, d'où $B(\frac{3}{2}; 0)$.
Comme $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, on a $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AJ}$, d'où $D(0; 2)$.
$ABCD$ étant un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AJ}$, d'où $C(\frac{3}{2}; 2)$.
$AIKJ$ étant un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}$, d'où $K(1; 1)$.

b) La droite (DI) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{DI}(0 - 1; 2 - 0)$, soit $\overrightarrow{DI}(-1; 2)$.
Une équation de cette droite a pour forme $2x + y + c = 0$ et, comme $I(1; 0) \in (DI)$, on a $2 + c = 0 \iff c = -2$, d'où $\boxed{(DI) : 2x + y - 2 = 0}$
La droite (BJ) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BJ}(\frac{3}{2} - 0; 0 - 1)$, soit $\overrightarrow{BJ}(\frac{3}{2}; -1)$.
Une équation de cette droite a pour forme $x + \frac{3}{2}y + c = 0$ et, comme $J(0; 1) \in (BJ)$, on a $\frac{3}{2} + c = 0 \iff c = -\frac{3}{2}$, d'où $(BJ) : x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2} = 0$ ou, plus simplement, $\boxed{(BJ) : 2x + 3y - 3 = 0}$
Les coordonnées du point M vérifient le système formé par les deux équations :
Puisque $2x + y - 2 = 0$, on a $y = 2 - 2x$. Je reporte cette expression dans l'autre équation qui devient $2x + 3(2 - 2x) - 3 = 0 \iff -4x + 3 = 0 \iff x = \frac{3}{4}$.
Je calcule alors $y = 2 - 2 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$.
Le point M a donc pour coordonnées $\boxed{M(\frac{3}{4}; \frac{1}{2})}$

c) Les points M, K et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont colinéaires.
$\overrightarrow{CM}$ a pour composantes $(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}; \frac{1}{2} - 2)$, soit $(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{2})$.
$\overrightarrow{CK}$ a pour composantes $(1 - \frac{3}{2}; 1 - 2)$, soit $(-\frac{1}{2}; -1)$.
On remarque alors que $4\overrightarrow{CM}$ a pour composantes $(-3; -6)$ alors que $6\overrightarrow{CK}$ a pour composantes $(-3; -6)$

d'où $4\overrightarrow{CM} = 6\overrightarrow{CK} \Longleftrightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{6}{4}\overrightarrow{CK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CK}$. Les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont bien colinéaires et les points M, K et C sont bien alignés.
Le nombre λ tel que $\overrightarrow{CM} = \lambda\overrightarrow{CK}$ est égal à $\frac{3}{2}$.

Correction de l'exercice 5 (Théorème de Ménélaüs (4 points))

a) Puisque $\overrightarrow{PA} = a\overrightarrow{PB}$, si a était égal à 1, on aurait $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ ce qui n'est pas possible puisque A et B sont des points à priori différents. Par conséquent $a \neq 1$.
Le même raisonnement s'applique pour expliquer que b et c sont différents de 1.

b) Exprimons le vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$:
$\overrightarrow{MB} = c\overrightarrow{MC} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = c(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}(c-1) = -\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{1-c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{c-1}\overrightarrow{AC}$.
Les coordonnées de M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont donc $\boxed{M(\frac{1}{1-c}; \frac{c}{c-1})}$

c) De même, $\overrightarrow{PA} = a\overrightarrow{PB} \Longleftrightarrow -\overrightarrow{AP} = a(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AP}(a-1) = a\overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{a}{a-1}\overrightarrow{AB}$.
Les coordonnées de P dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont donc $\boxed{P(\frac{a}{a-1}; 0)}$
$\overrightarrow{NC} = b\overrightarrow{NA} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AN} = b(-\overrightarrow{AN}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AN}(b-1) = -\overrightarrow{AC} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{1-b}\overrightarrow{AC}$.
Les coordonnées de N dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont donc $\boxed{N(0; \frac{1}{1-b})}$

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{MP}$ sont donc $(\frac{a}{a-1} - \frac{1}{1-c}; 0 - \frac{c}{c-1})$, soit $(\frac{a(1-c)-(a-1)}{(a-1)(1-c)}; \frac{c}{1-c})$ ou encore $(\frac{1-ac}{(a-1)(1-c)}; \frac{c}{1-c})$. De même, les composantes du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $(0 - \frac{1}{1-c}; \frac{1}{1-b} - \frac{c}{c-1})$, soit $(\frac{1}{c-1}; \frac{(c-1)-c(1-b)}{(c-1)(1-b)})$ ou encore $(\frac{1}{c-1}; \frac{bc-1}{(c-1)(1-b)})$.

d) Les points M, N et P sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si le déterminant de ces deux vecteurs est nul : $\frac{1-ac}{(a-1)(1-c)} \times \frac{bc-1}{(c-1)(1-b)} - \frac{c}{1-c} \times \frac{1}{c-1} = 0$.
Cette condition s'écrit $\frac{(1-ac)(bc-1)}{(a-1)(1-c)(c-1)(1-b)} - \frac{c}{(1-c)(c-1)} = 0$.
En mettant tout au même dénominateur $\frac{(1-ac)(bc-1)-c(a-1)(1-b)}{(a-1)(1-c)(c-1)(1-b)} = 0$.
Comme le dénominateur n'est pas nul, on doit avoir $(1-ac)(bc-1) - c(a-1)(1-b) = 0 \Longleftrightarrow bc - 1 - abc^2 + ac - ac + abc + c - bc = 0 \Longleftrightarrow -1 + abc + c(1-abc) = 0 \Longleftrightarrow (c-1)(1-abc) = 0$.
Comme $c - 1 \neq 0$, on doit nécessairement avoir $abc = 1$.