1re spé maths

DS n°1 : Polynômes

Exercice 1 (Trinômes (6 points))

a) Mettre le trinôme $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$ sous la forme canonique ;
en déduire l'extrémum de f sur $\mathbb{R}$ (préciser la nature cet extrémum).

b) Résoudre l'équation $E_1 : 20x^2 - x - 1 = 0$;
en déduire les solutions de $E_2 : 20x^4 - x^2 - 1 = 0$.

c) Étudier le signe du trinôme suivant : $-x^2 + 4x - 1$;
en déduire le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \frac{4x-1}{\sqrt{-x^2+4x-1}}$.

Exercice 2 (Factorisations (6 points))

a) Factoriser $x^3 - 1$ et $x^3 + 1$.

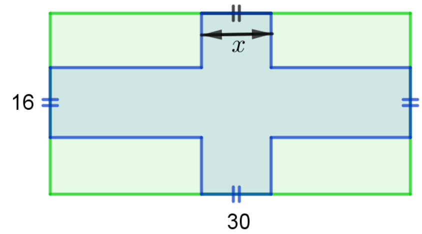
b) Montrer que 6 est une racine de $f(x) = x^4 - 6x^3 + x - 6$;
en déduire une 1re factorisation de $f(x)$;
utiliser la question a) pour en déduire la factorisation ultime de $f(x)$.

c) Montrer que $h(x) = 2x^4 - 9x^3 - 8x^2 + 16x - 5$ est divisible par $2x - 1$
(c'est-à-dire qu'il existe un polynôme g de degré 3 tel que $h(x) = (2x - 1)g(x)$) ;
en déduire une 1re racine du polynôme h.
Déterminer ensuite la factorisation ultime de h.

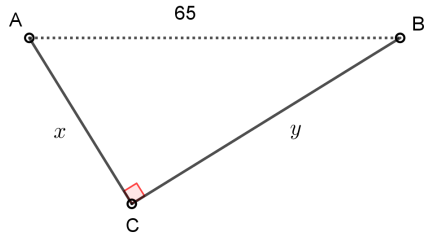
Exercice 3 (Problèmes (5 points))

a) Trouver tous les triplets d'entiers consécutifs dont le produit est égal à la somme.

b) Un terrain rectangulaire mesure $30m$ par $16m$. On souhaite tracer deux allées perpendiculaires de manière à ce que l'aire de cette double allée soit égale à l'aire restante qui est destinée a être végétalisée (voir l'illustration).
Quelle doit être la largeur x de cette double allée ?



c) Une ficelle longue de 89 cm est fixée en ses extrémités par deux clous A et B distants de 65 cm. On souhaite déterminer $x = AC$ et $y = BC$ de manière que le triangle ABC soit rectangle en C.
Si, au lieu de mesurer 89 cm, la ficelle mesure a cm, quelle condition doit vérifier le paramètre a pour que ce problème continue à avoir une solution ?



Exercice 4 (Paraboles (3 points))

Pour tout nombre réel m, on considère la fonction f_m définie par $f_m(x) = 2x^2 + (m - 5)x + m + 3$

a) Déterminer les coordonnées du sommet M_m de la parabole P_m représentant la fonction f_m (NB : celles-ci dépendent évidemment de m).

b) Montrer que les sommets M_m des paraboles P_m, lorsque m varie, sont situés sur une parabole $\mathscr{S}$ dont on déterminera l'abscisse m_0 du sommet.

Exercice 5 (BONUS (2 points))

Deux réels non nuls, inverses l'un de l'autre, sont tels que la somme du carré de leur somme avec la somme de leurs carrés soit égale à 7. Quels sont ces réels ? (Justifier)

Correction de l'exercice 1 (Trinômes (6 points))
a) Le trinôme $f(x)=-3x^2+5x-2$ s'écrit $-3\left((x^2-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}\right)=-3\left((x-\frac{5}{6})^2-(\frac{5}{6})^2+\frac{2}{3}\right)$
D'où $f(x)=-3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{75}{36}-\frac{72}{36}=-3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$
La forme canonique est donc $\boxed{-3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1}{12}}$
Comme $\forall x\in\mathbb{R}$, $\left(x-\frac{5}{6}\right)^2\geqslant 0$, on en déduit que $-3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2\leqslant 0 \Longleftrightarrow -3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1}{12}\leqslant\frac{1}{12}$
L'extrémum de f sur $\mathbb{R}$ est un $\boxed{\text{maximum}}$: il est égal à $\frac{1}{12}$ et il est atteint pour $x=\frac{5}{6}$ (on pouvait le trouver avec les formules)

b) Le discriminant de l'équation $20x^2-x-1=0$ est positif : $\Delta=1^2+4\times 20=81=9^2$.
Il y a donc deux solutions : $x=\frac{1+\sqrt{81}}{40}=\frac{1}{4}$ et $x=\frac{1-\sqrt{81}}{40}=\frac{-1}{5}$.
L'équation E_2, avec le changement de variable $X=x^2$ s'écrit $20X^2-X-1=0$ comme E_1.
Les solutions de cette dernière ne conviennent pas toutes car on doit avoir $X>0$ (car $\forall x\in\mathbb{R}, X=x^2>0$).
On retient donc seulement $X=\frac{1}{4}$, d'où $x^2=\frac{1}{4}$ et par conséquent $x=\pm\frac{1}{2}$.
Les solutions de E_2 sont finalement $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

c) Le signe du trinôme $-x^2+4x-1$ est celui de $a=-1$ – donc négatif – à l'extérieur des racines et le celui de son opposé (positif) à l'intérieur.
Le discriminant de l'équation $-x^2+4x-1=0$ est positif : $\Delta=16-4=12$.
Il y a donc 2 solutions : $x=\frac{-4+\sqrt{12}}{-2}=2-\sqrt{3}$ et $x=\frac{-4-\sqrt{12}}{-2}=2+\sqrt{3}$.
Le trinôme $-x^2+4x-1$ est positif pour $2-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 2+\sqrt{3}$ et négatif pour $x\leqslant 2-\sqrt{3}$ ou $x\geqslant 2+\sqrt{3}$.
Le domaine de définition de la fonction $x\mapsto\frac{4x-1}{\sqrt{-x^2+4x-1}}$ correspond aux valeurs de x pour lesquelles le dénominateur est strictement positif, soit $\boxed{D_f=]2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}[}$

Correction de l'exercice 2 (Factorisations (6 points))
a) Dans le cours, on a vu l'identité remarquable $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
Avec $a=x$ et $b=1$, cela s'écrit $\boxed{x^3-1^3=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)}$.
Avec $a=x$ et $b=-1$, cela s'écrit $\boxed{x^3-(-1)^3=x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)}$.

b) Comme $f(6)=6^4-6\times 6^3+6-6==64-64+6-6=0$, 6 est une racine de f.
On peut donc mettre $(x-6)$ en facteur dans f :
$f(x)=x^4-6x^3+x-6=(x-6)(ax^3+bx^2+cx+d)$.
La méthode d'identification indique que $a=1$, $b-6a=-6$, $c-6b=0$, $d-6c=1$ et $-6d=-6$.
On en déduit $a=1$, $b=-6+6=0$, $c=6b=0$, $d=6c+1=1$ ou $d=1$.
Par conséquent $f(x)=x^4-6x^3+x-6=(x-6)(x^3+1)$.
Remarque : on aurait pu le remarquer directement car $f(x)=x^4-6x^3+x-6=x^3(x-6)+1\times(x-6)$.
En utilisant le résultat du a) , on obtient finalement $\boxed{f(x)=(x-6)(x+1)(x^2-x+1)}$.
Ceci est la factorisation ultime de f car le discriminant de x^2-x+1 étant négatif (-3), ce facteur est irréductible.

c) Divisons $h(x)=2x^4-9x^3-8x^2+16x-5$ par $2x-1$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -9x^3 & -8x^2 & +16x & -5 & 2x \quad -1 \\
\cline{6-6}
-2x^4 & +x^3 & & & & x^3 -4x^2 -6x+5 \\
\cline{1-2}
 & -8x^3 & -8x^2 & & & \\
 & 8x^3 & -4x^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & & -12x^2 & +16x & & \\
 & & 12x^2 & -6x & & \\
\cline{3-4}
 & & & 10x & -5 & \\
 & & & -10x & +5 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Le reste étant nul, on en déduit la factorisation $h(x) = (x^3 - 4x^2 - 6x + 5)(2x - 1)$.
Si le polynôme $x^3 - 4x^2 - 6x + 5$ possède une racine « évidente », c'est-à-dire entière, il s'agit d'un diviseur du terme constant, donc un nombre de l'ensemble $\{1; -1; 5; -5\}$.
Comme 1 et -1 ne sont pas des racines de h (car $h(1) = -4 \neq 0$ et $h(-1) = 6 \neq 0$), calculons $h(5) = 125 - 100 - 30 + 5 = 0$.
La racine« évidente » est donc 5.
On en déduit que $x^3 - 4x^2 - 6x + 5 = (x - 5)(x^2 + \alpha x - 1)$.
Le développement de $(x - 5)(x^2 + \alpha x - 1)$ donne $x^3 + (\alpha - 5)x^2 + (-5\alpha - 1)x + 5$.
Le nombre α doit vérifier $\alpha - 5 = -4 \iff \alpha = 5 - 4 = 1$, et on peut vérifier que l'autre condition donne la même valeur : $-5\alpha - 1 = -6 \iff \alpha = \frac{1-6}{-5} = \frac{-5}{-5} = 1$.
Ainsi $h(x) = (x - 5)(x^2 + x - 1)(2x - 1)$.
La factorisation obtenue n'est pas ultime car le discriminant du trinôme $x2 + x - 1$ est positif $(\Delta = 5)$.
On peut écrire ce trinôme sous la forme $(x - x_1)(x - x_2)$ où $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
Finalement, la factorisation ultime est $\boxed{h(x) = (x - 5)(x - x_1)(x - x_2)(2x - 1)}$.

Correction de l'exercice 3 (Problèmes (5 points))
a) Les triplets d'entiers consécutifs s'écrivent $(n - 1,\ n,\ n + 1)$.
Le produit de ces entiers vaut $n(n - 1)(n + 1) = n(n^2 - 1) = n^3 - n$
La somme de ces entiers vaut $n + (n - 1) + (n + 1) = 3n$
Si la somme est égale au produit alors on a l'équation $n^3 - n = 3n \iff n^3 - 4n = 0 \iff n(n^2 - 4) = 0 \iff n(n - 2)(n + 2) = 0$
Il y a donc trois valeurs de n qui conviennent : 0, 2 et -2.
Les triplets correspondants sont $\boxed{(-1,\ 0,\ 1),\ (1,\ 2,\ 3) \text{ et } (-3,\ -2,\ -1)}$ pour lesquels le produit et la somme valent, respectivement, 0, 6 et -6.

b) Le terrain rectangulaire mesure $30m$ par $16m$, l'allée mesure x de large.
L'aire de la double allée est $16x + 30x - x^2 = 46x - x^2$ (le dernier terme pour enlever ce qui a été compté 2 fois).
On doit avoir $46x - x^2 = \frac{30\times 16}{2} = 240$. La largeur x doit vérifier l'équation $-x^2 + 46x - 240 = 0$.
Le discriminant de l'équation est positif :$\Delta = 46^2 - 4 \times 240 = 1156 = 34^2$.
Il y a donc 2 solutions : $x = \frac{-46+34}{-2} = 6$ et $x = \frac{-46-34}{-2} = 40$.
La largeur de la bande ne peut dépasser $x = 8$ (la moitié de la largeur), donc seule la solution $x = 6$ est acceptée. $\boxed{\text{La largeur de la bande est } 6m}$

c) La ficelle mesure $x + y = 89$ cm et l'hypoténuse du triangle rectangle ABC mesure $AB = 65$ cm.
D'après le théorème de Pythagore, on a $65^2 = x^2 + y^2$. En substituant à y la valeur $89 - x$ donnée par la première équation, on obtient $65^2 = x^2 + (89 - x)^2 \iff 2x^2 - 178x + 3696 = 0$.
Les solutions de cette équations sont $x = \frac{178\pm\sqrt{178^2-8\times 3696}}{4} = \frac{178\pm 46}{4}$, soit 56 et 33 qui sont les valeurs cherchées de x et y (on peut échanger ces deux nombres).
Si, au lieu de mesurer 89 cm, la ficelle mesure a cm, l'équation devient :
$65^2 = x^2 + (a - x)^2 \iff 2x^2 - 2ax + a^2 - 4225 = 0$.
Le problème aura une solution si le discriminant reste positif ou nul.

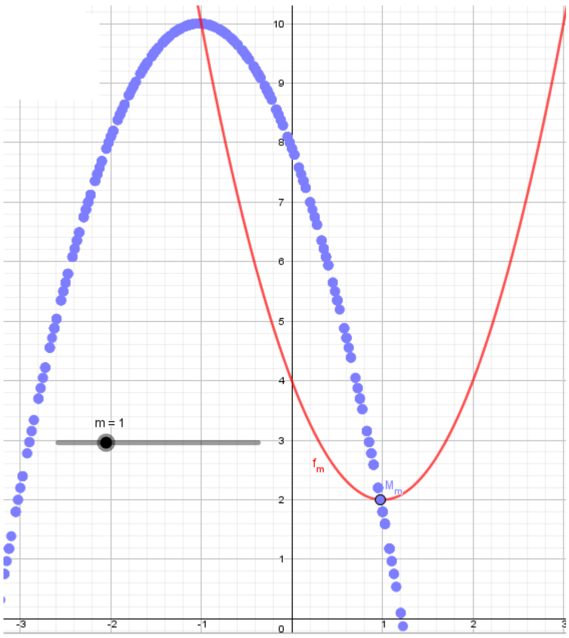
Or celui-ci vaut $4a^2 - 8(a^2 - 4225) = 33800 - 4a^2 = 4(8450 - a^2)$.
Il faut donc avoir $8450 - a^2 \geq 0 \iff a^2 \leq 8450 \iff -65\sqrt{2} \leq a \leq 65\sqrt{2}$.
Une autre contrainte portant sur a est $a > 65$ car un triangle n'existe pas si un des côtés est plus grand que la somme des deux autres (inégalité triangulaire).
Finalement, on doit avoir $65 < a \leq 65\sqrt{2}$. La ficelle peut mesurer entre 65 cm et environ 91,9 cm.

Correction de l'exercice 4 (Paraboles (3 points))

a) Le sommet de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ a pour coordonnées $(x = \frac{-b}{2a} ; y = \frac{-b^2+4ac}{4a})$.
On peut donc affirmer que le sommet M_m de la parabole P_m d'équation $y = 2x^2 + (m-5)x + m + 3$ a pour coordonnées $(x_m = \frac{-(m-5)}{4} ; y_m = \frac{-(m-5)^2+8(m+3)}{8})$.

b) Lorsque m varie l'ordonnée $y_m = \frac{-(m^2-10m+25)+8m+24}{8} = \frac{-m^2+18m-1}{8}$ est un trinôme en m.
C'est aussi un polynôme du second degré en x_m car $x_m = \frac{-(m-5)}{4} \iff 4x_m = -m+5 \iff m = 5-4x_m$.
En remplaçant dans l'équation du trinôme, on obtient :
$y_m = \frac{-(5-4x_m)^2+18(5-4x_m)-1}{8} = \frac{-16x_m^2+(40-72)x_m-25+90-1}{8} = \frac{-16x_m^2-32x_m+64}{8} = -2x_m^2 - 4x_m + 8$.
Ce polynôme admet un maximum pour $x_{m_0} = \frac{4}{-4} = -1$, c'est-à-dire pour $m_0 = 5-4\times(-1) = 5+4 = 9$.
NB : on peut déterminer cette valeur sans avoir l'expression de y_m en fonction de x_m ; l'expression de y_m en fonction de m suffit puisque le maximum de $-m^2+18m-1$ est obtenu pour $m = m_0 = \frac{-18}{-2} = 9$.

La courbe rouge ci-dessous est notre parabole paramétrique P_m d'équation $y = 2x^2 + (m-5)x + m + 3$, tracée ici pour $m = 1$. Mais en activant la trace du sommet M_m de cette courbe, on obtient, en faisant varier la valeur de m au moyen du curseur, la belle parabole bleue dont le sommet a pour abscisse $m_0 = -1$.



Correction de l'exercice 5 (BONUS (2 points))

Les réels sont notés x et $y = \frac{1}{x}$.
La somme du carré de leur somme avec la somme de leurs carrés est $(x+y)^2 + x^2 + y^2 = 7 \iff (x + \frac{1}{x})^2 + x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7$.
Cette égalité s'écrit $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 \iff 2x^2 + \frac{2}{x^2} - 5 = 0$.
En multipliant tout par $x^2 \neq 0$ ($x \neq 0$ car sinon son inverse n'existe pas), on obtient $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$
Si on pose $x^2 = X$, cela devient $2X^2 - 5X + 2 = 0$ Le discriminant de cette équation est positif : $25 - 16 = 9 = 3^2$.
Il y a donc 2 solutions en $X = x^2$: $X = \frac{5+3}{4} = 2$ et $X = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$.
On en déduit les 4 valeurs correspondantes de $x = \pm\sqrt{X}$: $x = \pm\sqrt{2}$ et $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Les réels cherchés sont donc $\boxed{(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}) \text{ ou } (-\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})}$
NB : il n'y a que 2 couples solutions si on ne tient pas compte de l'ordre des nombres.