DS n°1 : Second degré

Exercice 1 (Formes du trinôme (3 points))

1. Mettre le trinôme $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$ sous la forme canonique ; en déduire l'extremum de f sur $\mathbb{R}$
2. Résoudre l'équation $20x^2 - x - 1 = 0$ puis factoriser le trinôme $g(x) = 20x^2 - x - 1$

Exercice 2 (Inéquations (3 points))

1. Étudier le signe du trinôme suivant : $-x^2 + 4x - 1$ puis donner le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \frac{4x-1}{\sqrt{-x^2+4x-1}}$
2. Résoudre l'inéquation : $(x-3)^2 - (3x+1)^2 \leqslant 0$

Exercice 3 (Déterminer deux nombres (3 points))

1. Deux entiers naturels ont pour différence 23 et la différence entre leur produit et 23 fois leur somme est égale à 41. Quels sont ces entiers ? (Justifier)
2. Deux réels non nuls, inverses l'un de l'autre, sont tels que la somme du carré de leur somme avec la somme de leurs carrés soit égale à 7. Quels sont ces réels ? (Justifier)

Exercice 4 (Intersection(s) d'une parabole et d'une droite (3 points))

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 4x - 5$, $\mathscr{P}$ sa parabole représentative, et $\mathscr{D}$ une droite d'équation $y = 6x + m$ où m est un paramètre réel.

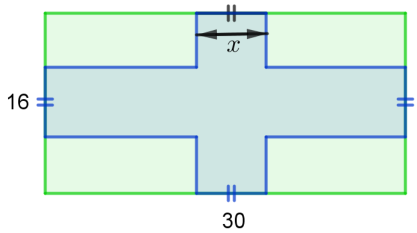
1. Déterminer pour quelles valeurs de m la courbe $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ ont zéro, un ou deux points d'intersection
2. Donner les coordonnées du point d'intersection lorsque celui-ci est unique
3. Lorsqu'il existe deux points d'intersection A et B, donner l'ensemble des coordonnées possibles des milieux de $[AB]$. Rappel : le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2})$

Exercice 5 (Paraboles (4 points))

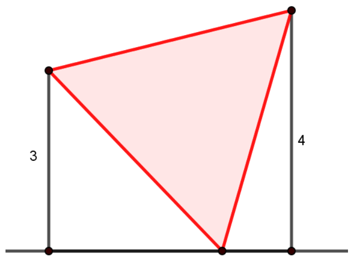
1. Existe t'il une parabole de sommet $S(\frac{-1}{2}; \frac{-9}{4})$ qui passe par le point de coordonnées $(-1; -2)$? Si oui, donner son équation.
2. Dans un repère, $\mathscr{P}$ est la parabole d'équation $y = 5x^2 + 3x - 2$ et A est le point d'abscisse 1 de $\mathscr{P}$. Parmi toutes les droites qui passent par A, en existe t'il une, non parallèle à l'axe des ordonnées, qui coupe $\mathscr{P}$ en un seul point ? Si oui, donner son équation et tracer courbe et droite sur la copie pour $x \in [0; 1,5]$.

Exercice 6 (Problèmes (4 points))

1. Un terrain rectangulaire mesure $30m$ par $16m$. On souhaite tracer deux allées perpendiculaires de manière à ce que l'aire de cette double allée soit égale à l'aire restante qui est destinée a être végétalisée (voir l'illustration).
Quelle doit être la largeur x de cette double allée ?



2. Un drapeau a la forme d'un triangle équilatéral. Si on accroche deux de ses sommets au sommet de deux perches de longueurs $3m$ et $4m$, le 3e sommet affleure au sol, dans le plan contenant les perches (voir l'illustration).
Établir que le côté x du drapeau mesure $\frac{2}{3}\sqrt{39}$.



indication : On peut introduire d'autres longueurs que x, écrire le théorème de Pythagore dans 3 triangles et calculer l'aire du trapèze extérieur de 2 façons différentes. Cette démarche, ou une autre, aboutit sur la valeur cherchée.

Correction de l'exercice 1 (Formes du trinôme)
1. Le trinôme $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$ s'écrit $-3\left((x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}\right) = -3\left((x - \frac{5}{6})^2 - (\frac{5}{6})^2 + \frac{2}{3}\right) = -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{75}{36} - \frac{72}{36}$

La forme canonique est donc $\boxed{f(x) = -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{12}}$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 \geqslant 0$, on en déduit que $-3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 \leqslant 0 \iff -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{7}{12} \leqslant -\frac{7}{12}$

L'extrémum de f sur $\mathbb{R}$ est un $\boxed{\text{maximum}}$: il est égal à $-\frac{7}{12}$ et il est atteint pour $x = \frac{5}{6}$ (on pouvait le trouver avec les formules)

2. Le discriminant de l'équation $20x^2 - x - 1 = 0$ est positif : $\Delta = 1^2 + 4 \times 20 = 81 = 9^2$.
Il y a donc 2 solutions : $x = \frac{1+\sqrt{81}}{40} = \frac{1}{4}$ et $x = \frac{1-\sqrt{81}}{40} = \frac{-1}{5}$.
Le trinôme $g(x) = 20x^2 - x - 1$ se factorise en $\boxed{g(x) = 20(x - \frac{1}{4})(x + \frac{1}{5})}$

Correction de l'exercice 2 (Inéquations (3 points))
1. Le signe du trinôme $-x^2 + 4x - 1$ est celui de $a = -1$ (négatif) à l'extérieur des racines et le signe opposé (positif) à l'intérieur.
Le discriminant de l'équation $-x^2 + 4x - 1 = 0$ est positif : $\Delta = 16 - 4 = 12$.
Il y a donc 2 solutions : $x = \frac{-4+\sqrt{12}}{-2} = 2 - \sqrt{3}$ et $x = \frac{-4-\sqrt{12}}{-2} = 2 + \sqrt{3}$.
Le trinôme $-x^2 + 4x - 1$ est positif pour $2 - \sqrt{3} \leqslant x \leqslant 2 + \sqrt{3}$ et négatif pour $x \leqslant 2 - \sqrt{3}$ ou $x \geqslant 2 + \sqrt{3}$.
Le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \frac{4x-1}{\sqrt{-x^2+4x-1}}$ correspond aux valeurs de x pour lesquelles le dénominateur est strictement positif, soit $\boxed{D_f =]2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}[}$

2. L'inéquation : $(x - 3)^2 - (3x + 1)^2 \leqslant 0$ est équivalente à
$(x - 3 - (3x + 1))\,(x - 3 + (3x + 1)) \leqslant 0 \iff (-2x - 4)\,(4x - 2) \leqslant 0 \iff 4\,(x + 2)\,(-2x + 1) \leqslant 0$.
On peut alors faire un tableau de signes ou appliquer la règle vue en cours : le signe de a étant négatif ($a = -8$), le trinôme est négatif à l'extérieur des racines qui sont -2 et $\frac{1}{2}$.
Les solutions de l'inéquation se trouvent donc dans $\boxed{]-\infty; -2] \cup [\frac{1}{2}; +\infty[}$

Correction de l'exercice 3 (Déterminer deux nombres (3 points))
1. Les entiers sont notés x et y.
Leur différence est $y - x = 23 \iff y = x + 23$ (ou $x - y = 23$ mais cela revient à échanger x et y).
La différence entre leur produit et 23 fois leur somme est $xy - 23(x + y) = 41$.
La dernière égalité s'écrit $x(x + 23) - 23(x + x + 23) = 41 \iff x^2 + 23x - 46x - 23^2 = 41 \iff x^2 - 23x - 570 = 0$
Le discriminant de l'équation est positif : $23^2 + 4 \times 570 = 2809 = 53^2$.
Il y a donc 2 solutions : $x = \frac{23+53}{2} = 38$ et $x = \frac{23-53}{2} = -15$, mais seule la 1^re^ concerne deux naturels.
On en déduit les valeurs correspondantes de y : $y = x + 23 = 38 + 23 = 61$ et $y = x + 23 = -15 + 23 = 8$.
$\boxed{\text{Les entiers cherchés sont donc 38 et 61}}$

2. Les réels sont notés x et $y = \frac{1}{x}$.
La somme du carré de leur somme avec la somme de leurs carrés est $(x+y)^2 + x^2 + y^2 = 7 \iff (x + \frac{1}{x})^2 + x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7$.
Cette égalité s'écrit $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 \iff 2x^2 + \frac{2}{x^2} - 5 = 0$.
En multipliant tout par $x^2 \neq 0$ ($x \neq 0$ car sinon son inverse n'existe pas), on obtient $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$
Si on pose $x^2 = X$, cela devient $2X^2 - 5X + 2 = 0$ Le discriminant de cette équation est positif : $25 - 16 = 9 = 3^2$.
Il y a donc 2 solutions en $X = x^2$: $X = \frac{5+3}{4} = 2$ et $X = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$.
On en déduit les 4 valeurs correspondantes de $x = \pm\sqrt{X}$: $x = \pm\sqrt{2}$ et $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

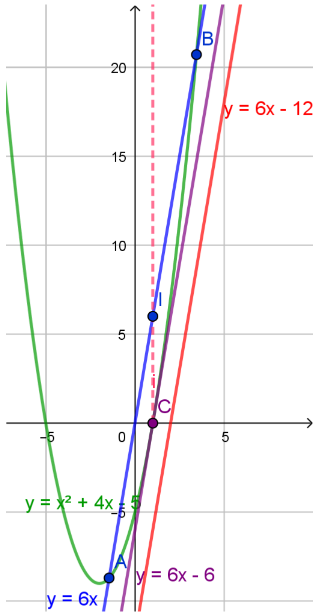
Les réels cherchés sont donc $\boxed{(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}) \text{ ou } (-\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})}$
NB : il n'y a que 2 couples solutions si on ne tient pas compte de l'ordre des nombres.

Correction de l'exercice 4 (Intersection(s) d'une parabole et d'une droite (3 points))
1 et 2. La parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 + 4x - 5$ coupe la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 6x + m$ lorsque
$$x^2 + 4x - 5 = 6x + m \iff x^2 - 2x - (5 + m) = 0$$

Le discriminant de cette équation est : $4+4(5+m)=4(6+m)$.

- Il y a donc 2 solutions lorsque $4(6+m)>0 \iff m>-6$.
  Les abscisses de ces points sont les solutions de l'équation :
  $x=\frac{2+2\sqrt{6+m}}{2}=1+\sqrt{6+m}$ et $x=\frac{2-2\sqrt{6+m}}{2}=1-\sqrt{6+m}$
  Leur ordonnée se calcule avec une des équations ($y=6x+m$)
- Il y a 1 seule solution lorsque $4(6+m)=0 \iff m=-6$: $x=\frac{2}{2}=1$.
  L'ordonnée du point trouvé est $y=6+m=0$ car $m=-6$
- Il y a 0 solution lorsque $4(6+m)<0 \iff m<-6$

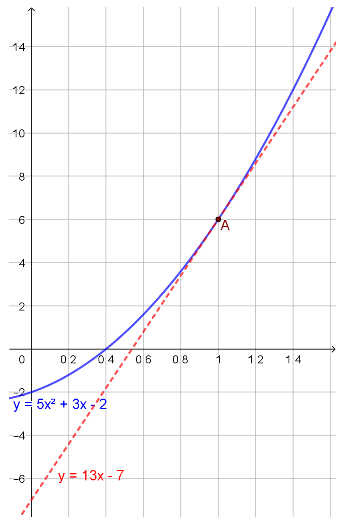
3. Lorsqu'il existe deux points d'intersection A et B, soit quand $m>-6$ (en bleu), l'abscisse du milieu de $[AB]$ est donnée par
$$x=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+\sqrt{6+m}+1-\sqrt{6+m}}{2}=\frac{2}{2}=1$$
Les points sont donc situés sur la droite verticale d'équation $x=1$.
La parabole étant tournée vers le haut (car $a>0$), les droites parallèles cessent de couper la parabole quand $m<-6$ (en rouge). Leur dernier contact est obtenu pour $m=-6$ (en violet) et l'ordonnée de ce point est 0 (déjà calculée).
Ainsi les milieux seront situés sur $\boxed{\text{la demi-droite d'équation } x=1 \text{ avec } y\geqslant 0}$
(la demi-droite $[CI[$ en tirets roses)



Correction de l'exercice 5 (Paraboles (4 points))

1. Le sommet de la parabole, si elle existe, a pour coordonnées $(x=\frac{-b}{2a};y=\frac{-b^2+4ac}{4a})$.
On peut donc directement affirmer que $\frac{-1}{2}=\frac{-b}{2a} \iff a=b$ et $\frac{-9}{4}=\frac{-b^2+4ac}{4a} \iff 36a=4b^2-16ac$.
En remplaçant a par b dans cette dernière $36b=4b^2-16bc \iff c=\frac{4b-36}{16}=\frac{b-9}{4}$.
L'équation de la parabole cherchée est donc de la forme $y=bx^2+bx+\frac{b-9}{4}$.
Comme la parabole doit passer par le point de coordonnées $(-1;-2)$, le coefficient b vérifie
$b-b+\frac{b-9}{4}=-2 \iff \frac{b-9}{4}=-2 \iff b=9-8=1$.
Finalement, la parabole existe et a pour équation $\boxed{y=1\times x^2+1\times x+\frac{1-9}{4}=x^2+x-2}$
Remarque : on peut écrire directement la forme canonique $y=a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$ puisqu'on connait les coordonnées du minimum. Il suffit ensuite de calculer a pour que le point de coordonnées $(-1;-2)$ vérifie l'équation :
$-2=a\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4} \iff \frac{a}{4}=\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4} \iff a=\frac{4}{4}=1$
L'équation de la parabole est $y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

2. La parabole passe par le point $A(1;5\times 1^2+3\times 1-2=6)$.
Une droite non parallèle à l'axe des ordonnées a pour équation $y=ax+b$.
Si cette droite passe par A alors on a $6=a+b \iff b=6-a$.
Les droites ont donc pour équation $y=ax+6-a$.
La droite cherchée coupe $\mathscr{P}$ en un seul point si l'équation suivante n'a qu'une seule solution :
$5x^2+3x-2=ax+6-a \iff 5x^2+(3-a)x+a-8=0$
Pour cela, le discriminant de cette équation doit être nul :
$(3-a)^2-4\times 5\times(a-8)=(3-a)^2-20(a-8)$.
Il y a donc 1 seule solution lorsque $(3-a)^2=20(a-8)$, c'est-à-dire
$9+a^2-6a=20a-160 \iff a^2-26a+169=(a-13)^2=0$.
On doit donc prendre $\boxed{a=13}$ pour n'avoir qu'une seule solution.
L'équation de la droite est donc $\boxed{y=13x-7}$
La courbe et la droite sont tracées ci-contre.



Correction de l'exercice 6 (Problèmes (4 points))

1. Le terrain rectangulaire mesure $30m$ par $16m$, l'allée mesure x de large.
L'aire de la double allée est $16x+30x-x^2=46x-x^2$ (le dernier terme pour enlever ce qui a été compté 2 fois).
On doit avoir $46x-x^2=\frac{30\times 16}{2}=240$. La largeur x doit vérifier l'équation $-x^2+46x-240=0$.
Le discriminant de l'équation est positif :$\Delta=46^2-4\times 240=1156=34^2$.
Il y a donc 2 solutions : $x=\frac{-46+34}{-2}=6$ et $x=\frac{-46-34}{-2}=40$.

La largeur de la bande ne peut dépasser $x = 8$ (la moitié de la largeur), donc seule la solution $x = 6$ est acceptée.
$\boxed{\text{La largeur de la bande est } 6m}$

2. Appelons x, y et z respectivement le côté du drapeau, l'écartement entre les perches (la distance AB sur la figure) et la distance de la plus grande au point d'affleurement (la distance BM sur la figure).

Avec ces notations, utilisons le théorème de Pythagore dans les triangles ADM, BCM et DCH, H étant le projeté orthogonal de D sur $[BC]$:

$$3^2 + (y-z)^2 = x^2,\ 4^2 + z^2 = x^2 \text{ et } 1^2 + y^2 = x^2$$

Des 2 dernières égalités on tire $z^2 = x^2 - 16$, $y^2 = x^2 - 1$

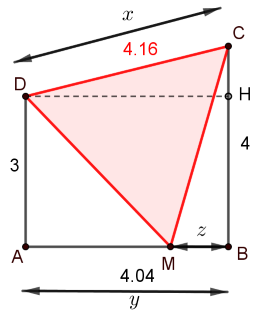
Reportées dans la 1^re^ $(9 + y^2 + z^2 - 2yz = x^2)$, on obtient

$9 + x^2 - 1 + x^2 - 16 - 2yz = x^2 \iff 2yz = x^2 - 8$.

Conservons ces expressions qui seront utilisées ultérieurement.

L'aire $\mathscr{A}$ du trapèze $ABCD$ peut être découpée de deux façons différentes :

1. Rectangle $ABHD$ et triangle CDH : $\mathscr{A} = 3y + \frac{y}{2}$
2. Triangle ADM, triangle BCM et triangle CDM :
   $\mathscr{A} = \frac{3}{2}(y-z) + \frac{4}{2}z + x^2\frac{\sqrt{3}}{4}$



De l'égalité de ces deux expressions on tire $3y + \frac{y}{2} = \frac{3y}{2} + \frac{z}{2} + x^2\frac{\sqrt{3}}{4} \iff \sqrt{3}x^2 = 8y - 2z$.
En élevant au carré cette égalité on obtient $3x^4 = 64y^2 + 4z^2 - 32yz$ et en remplaçant y^2, z^2 et $2yz$ par leur expression en fonction de x^2 on a $3x^4 = 64(x^2-1) + 4(x^2-16) - 16(x^2-8) = 52x^2$.
Finalement, x vérifie l'équation du 4^e^ degré $3x^4 = 52x^2 \iff x^2(3x^2 - 52) = 0$.
Mais comme x n'est pas nul (il est supérieur à 4 de façon évidente), on doit avoir $3x^2 - 52 = 0 \iff x^2 = \frac{52}{3}$ d'où $x = \sqrt{\frac{52}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{39} \approx 4,163332$.
$\boxed{\text{La longueur du côté du drapeau est environ égale à } 4,16m}$