DM n°4 : Géométrie

Exercice 1 (Pentagone régulier (***))

$\boxed{\textit{Partie 1}}$ x étant un réel quelconque, exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\sin x$.
Déterminer, en utilisant 2 méthodes différentes, l'ensemble des valeurs de x telles que $\sin(5x) = 0$.
En déduire les valeurs de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
Déterminer ensuite $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

$\boxed{\textit{Partie 2}}$ Soit $\mathscr{C}$, un cercle de centre O et de rayon r. Effectuer la construction suivante :

1. Tracer deux diamètres perpendiculaires $[AA']$ et $[HH']$
2. Placer le point I milieu de $[OH]$ et le point J tel que $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA'}$.
3. Tracer le cercle de centre J passant par I. Ce cercle coupe le diamètre $[AA']$ en K et L, L étant celui qui appartient à $[OA]$.
4. Tracer les perpendiculaires à $[AA']$ qui passent pas K et L. Ces droites coupent le cercle $\mathscr{C}$ en 4 points B, C, D et E qui forment avec le point A un pentagone régulier.

Pour justifier cette construction :
Déterminer les longueurs IJ, puis OK et OL. En déduire que $\overrightarrow{OL} = \cos\frac{2\pi}{5}\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OK} = \cos\frac{4\pi}{5}\overrightarrow{OA}$.

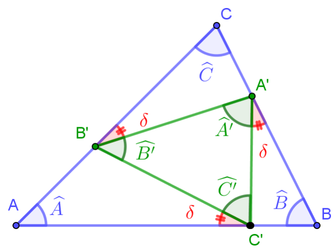
$\boxed{\textit{Partie 3}}$ Il y a d'autres manières de déterminer $\cos\left(\frac{n\pi}{5}\right)$ avec $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ dont celle-ci :

1. Montrer que $\sin\frac{\pi}{5}\left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5}\right) = 0$. Pour cela, on peut utiliser la propriété suivante (à vérifier) : $2\sin a\cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$.
2. En déduire que $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$ sont les solutions de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
3. Résoudre cette équation et conclure.

Exercice 2 (Triangle (**))

Dans un triangle ABC on en inscrit un autre $A'B'C'$ tel que $\widehat{BA'C'} = \widehat{CB'A'} = \widehat{AC'B'}$, cet angle commun étant noté δ.

1. Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont les mêmes angles, comme il est noté sur la figure ci-contre.
2. Déterminer le rapport d'agrandissement k entre ces deux triangles semblables en fonction de $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ et δ (*indication : on pourra utiliser la loi des sinus dans deux triangles, en cherchant à décomposer un côté de ABC comme la somme de deux longueurs, par exemple $BC = BA' + A'C$*).



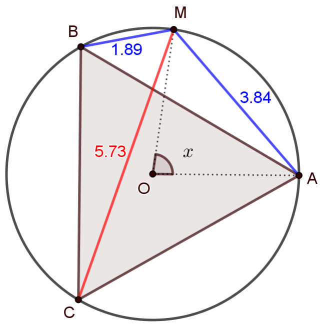
3. Montrer que ce rapport peut s'écrire sous la forme symétrique $k = \cos\delta + \sin\delta \times \frac{1+\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}}{\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}}$
4. Expliciter k lorsque $\delta = \frac{\pi}{2}$; faire une figure dans ce cas.

Exercice 3 (Triangle équilatéral (*))

Soit ABC un triangle équilatéral direct inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r.

On veut démontrer que pour tout point M appartenant au petit arc $\overset{\frown}{AB}$ on a $MA + MB = MC$.

1. On note x la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$. Exprimer $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM})$ en fonction de x.
2. Exprimer les distances MA, MB et MC en fonction de x et r (*indication : utiliser le théorème d'Al-Kashi*).
3. Montrer que la propriété se réduit alors à prouver que $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
4. Prouver cette dernière égalité et conclure.



EXERCICE 4 (AXE RADICAL DE DEUX CERCLES (**))

1. Réaliser une construction géométrique et conjecturer

En utilisant un logiciel de géométrie dynamique :

a) Créer un cercle $\mathscr{C}$ de centre O, et un point libre M.

b) Créer deux droites passant par M qui coupent le cercle $\mathscr{C}$ respectivement en A, B et P, Q.

c) Faire afficher les produits de longueurs $MA \times MB$ et $MP \times MQ$.

d) Faire varier le point M. Que peut-on conjecturer sur les produits $MA \times MB$ et $MP \times MQ$?

2. Démontrer

On désigne par R le rayon du cercle $\mathscr{C}$, et par A' le symétrique de A par rapport à O.

a) Montrer que $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA'}$ et que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

b) Démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA'}\right)$.

c) En déduire que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 - R^2$.

d) Démontrer le résultat conjecturé dans la question 1d. On notera par la suite $P_{\mathscr{C}}(M)$, la valeur commune trouvée ($P_{\mathscr{C}}(M) = OM^2 - R^2$).

e) Á l'aide d'une tangente (MT) à $\mathscr{C}$ passant par M, comparer $P_{\mathscr{C}}(M)$ et MT^2.

3. Axe radical de deux cercles

On se place dans un repère orthonormal (O, I, J). On considère le point $O'(10; 0)$, le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 3, et le cercle $\mathscr{C}'$ de centre O' et de rayon 5.

a) Déterminer une équation de $\mathscr{C}$ et une équation de $\mathscr{C}'$.

b) Soit M un point du plan tel que $P_{\mathscr{C}}(M) = P_{\mathscr{C}'}(M)$. On note Ω le milieu du segment $[OO']$, et K le projeté de M sur la droite (OO'). En calculant de deux manières différentes le produit scalaire $\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MO'}\right)$, démontrer que $2\overrightarrow{M\Omega} \cdot \overrightarrow{OO'} = 16$.

En déduire que $\overrightarrow{K\Omega} \cdot \overrightarrow{OO'} = 8$ puis déterminer les coordonnées de K.

Démontrer alors que M appartient à une droite $\mathscr{D}$ dont on donnera l'équation. Démontrer que, réciproquement, tous les points M de $\mathscr{D}$ vérifient l'égalité $P_{\mathscr{C}}(M) = P_{\mathscr{C}'}(M)$. La droite $\mathscr{D}$ est appelée axe radical des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

EXERCICE 5 (UNE FAMILLE DE COURBES (*))

On considère la famille de courbes $\mathscr{C}_m$ d'équation

$$x^2 - 2mx + y^2 - 2(m+2)y + 2m - 1 = 0 \text{ où } m \text{ est un nombre réel}$$

a) Déterminer la nature de $\mathscr{C}_0$ et de $\mathscr{C}_{-2}$, puis tracer ces deux ensembles.

b) Démontrer que, quelque soit le réel m, la courbe $\mathscr{C}_m$ est un cercle. Calculer les coordonnées de son centre K_m, ainsi que la valeur de son rayon R_m, en fonction de m.

c) Démontrer que l'intersection des deux ensembles $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_{-2}$ est constituée de deux points A et B, puis démontrer que A et B appartiennent à tous les cercles $\mathscr{C}_m$.

d) Démontrer que tous les points K_m appartient à une même droite dont on précisera l'équation.

e) Démontrer qu'il existe un unique cercle $\mathscr{C}_p$ tangent à l'axe des abscisses. Tracer ce cercle. Existe t'il de même un cercle $\mathscr{C}_q$ tangent à l'axe des ordonnées ?

Correction de l'exercice 1 (Pentagone régulier (***))

$\boxed{\textit{Partie 1}}$ Pour exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\sin x$, utilisons la formule d'addition :
Ainsi, $\sin(5x) = \sin(4x + x) = \sin(4x)\cos(x) + \cos(4x)\sin(x)$.
Mais, d'après les formules de duplication, on a
$\sin(4x) = \sin(2 \times 2x) = 2\sin(2x)\cos(2x) = 4\sin x \cos x \cos(2x) = 4\sin x \cos x(1 - 2\sin^2 x)$
D'autre part, à l'aide des mêmes formules
$\cos(4x) = \cos(2 \times 2x) = 2\left(\cos(2x)\right)^2 - 1 = 2\left(1 - 2\sin^2 x\right)^2 - 1$.
On en déduit que

$$\begin{aligned}\sin(5x) &= \left(4\sin x \cos x(1 - 2\sin^2 x)\right)\cos x + \left(2\left(1 - 2\sin^2 x\right)^2 - 1\right)\sin x \\ &= 4\sin x \cos^2 x(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x\left(1 - 2\sin^2 x\right)^2 - \sin x \\ &= 4\sin x(1 - \sin^2 x)(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x\left(1 - 2\sin^2 x\right)^2 - \sin x\end{aligned}$$

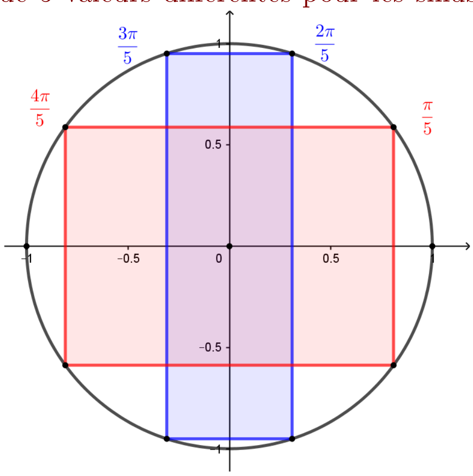
Développons cela et ordonnons les termes. Pour simplifier l'écriture, je note $X = \sin x$:
$\sin(5x) = 4X(1 - X^2)(1 - 2X^2) + 2X(1 - 2X^2)^2 - X = 16X^5 - 20X^3 + 5X = X(16X^4 - 20X^5 + 5)$.
On obtient donc finalement $\sin(5x) = \sin x\left(16\sin^4 x - 20\sin^2 x + 5\right)$.

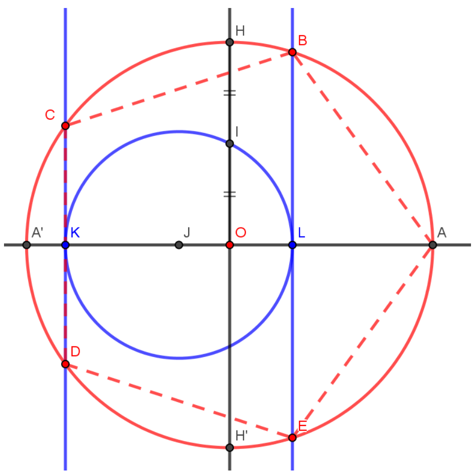
L'équation $\sin(5x) = 0$ peut être résolue en considérant l'équation $X(16X^4 - 20X^2 + 5) = 0$.
Le facteur $16X^4 - 20X^2 + 5$ s'annule pour $X^2 = \frac{20 \pm \sqrt{80}}{32} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$ qui sont deux nombres positifs.
Donc, il y a 4 solutions qui sont $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$, $-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$, $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ et $-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.
Á ces solutions, il convient bien sûr d'ajouter $X = 0$ qui est la valeur annulant le 1er facteur.
L'équation $\sin(5x) = 0$ peut aussi être résolue de façon trigonométrique $5x = 0[2\pi]$ ou $5x = \pi[2\pi]$, ce qui revient à $5x = 0[\pi]$, d'où en divisant par 5 : $x = 0[\frac{\pi}{5}]$. Sur le cercle trigonométrique, il y a 10 points qui correspondent à cette définition, mais cela ne fait que 5 valeurs différentes pour les sinus.

Par identification des valeurs trouvées, on en déduit que :

- $\sin(\frac{2\pi}{5}) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ (la plus grande valeur positive)
- $\sin(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ (la plus petite valeur positive)

Par symétrie $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \sin(\frac{2\pi}{5})$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin(\frac{\pi}{5})$.
Pour les cosinus, on utilise la formule $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$,
donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - 2 \times \frac{5-\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$,
et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 1 - 2\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - 2 \times \frac{5+\sqrt{5}}{8} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.
Pour le cosinus de $\frac{\pi}{5}$, on remarque que $\frac{\pi}{5} = \pi - \frac{4\pi}{5}$ et donc $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
De même, $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$.





$\boxed{\textit{Partie 2}}$ La construction est réalisée ci-contre et semble conduire à un pentagone régulier.
Déterminons les longueurs :
$IJ = \sqrt{\left(\frac{r}{4}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = r \times \frac{\sqrt{5}}{4}$.
$OK = OJ + JK = \frac{r}{4} + IJ = r \times \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
$OL = JL - JO = IJ - \frac{r}{4} = r \times \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Comme $OL = r \times \frac{1+\sqrt{5}}{4} = OA \times \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et comme $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont de sens contraires, on en déduit que $\overrightarrow{OK} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}\overrightarrow{OA} = \cos\frac{4\pi}{5}\overrightarrow{OA}$. Les points C et D qui sont situés sur la perpendiculaire à (OA)

passant par K, ont donc des abscisses curvilignes qui correspondent à cet angle $\frac{4\pi}{5}$ et à celui qui a le même cosinus, c'est-à-dire $-\frac{4\pi}{5}=\frac{6\pi}{5}$.
De même, comme $OL = r\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}=OA\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et comme $\overrightarrow{OL}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont de même sens, on en déduit que $\overrightarrow{OL}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\overrightarrow{OA}=\cos\frac{2\pi}{5}\overrightarrow{OA}$. Les points B et E qui sont situés sur la perpendiculaire à (OA) passant par L, on donc des abscisses curvilignes qui correspondent à cet angle $\frac{2\pi}{5}$ et à celui qui a le même cosinus, c'est-à-dire $-\frac{2\pi}{5}=\frac{8\pi}{5}$.
Finalement, les points A, B, C, D et E qui ont des abscisses curvilignes égales à $\frac{0\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$ et $\frac{8\pi}{5}$ sont les sommets d'un pentagone régulier.

Partie 3

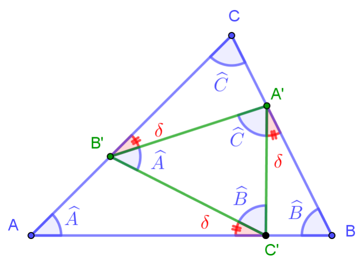
Vérifions $\sin(a+b)+\sin(a-b)=(\sin a\cos b+\cos a\sin b)+(\sin a\cos b-\cos a\sin b)=2\sin a\cos b$.
Remplaçons donc $2\sin a\cos b$ par $\sin(a+b)+\sin(a-b)$ dans le produit de l'énoncé, après l'avoir développé :

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{5}\left(1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}\right) &= \sin\frac{\pi}{5}+2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}+2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}\\
&= \sin\frac{\pi}{5}+\left(\sin\frac{3\pi}{5}+\sin\frac{-\pi}{5}\right)+\left(\sin\frac{5\pi}{5}+\sin\frac{-3\pi}{5}\right)\\
&= \left(\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{-\pi}{5}\right)+\left(\sin\frac{3\pi}{5}+\sin\frac{-3\pi}{5}\right)+\sin\pi\\
&= 0+0+0=0
\end{aligned}$$

Comme $\sin\frac{\pi}{5}\neq 0$, on en déduit que $1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}=0$.
Mais $\cos\frac{4\pi}{5}=2\cos^2\frac{2\pi}{5}-1$ d'après la propriété $\cos 2x=2\cos^2 x-1$.
On en déduit, en posant $X=\cos\frac{2\pi}{5}$, que $1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\left(2\cos^2\frac{2\pi}{5}-1\right)=1+2X+2(2X^2-1)=0$.
En développant et ordonnant $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation $4X^2+2X-1=0$.
Mais $\cos\frac{2\pi}{5}=\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\frac{8\pi}{5}$, on en déduit que $1+2\cos\frac{4\pi}{5}+2\cos\frac{8\pi}{5}=0$ et donc, en posant $X=\cos\frac{4\pi}{5}$, on trouve que $\cos\frac{4\pi}{5}$ est solution de la même équation $4X^2+2X-1=0$.
$\cos\frac{4\pi}{5}$ est la solution négative de cette équation alors que $\cos\frac{2\pi}{5}$ en est la solution positive.
Ces solutions étant $X=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$, on en déduit que $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

Correction de l'exercice 2 (Triangle (**))

Dans le triangle $A'BC'$ l'angle $\widehat{BC'A'}$ qui n'est pas noté, est égal à $\pi-\delta-\widehat{B}$ (somme des angles d'un triangle). On en déduit que l'angle $\widehat{C'}$ est égal à $\pi-\left(\pi-\delta-\widehat{B}\right)=\widehat{B}$ (alignement de A, C', B).
De même, on montre que $\widehat{B'}=\pi-\left(\pi-\delta-\widehat{A}\right)=\widehat{A}$ et que $\widehat{A'}=\pi-\left(\pi-\delta-\widehat{C}\right)=\widehat{C}$.
Les triangles ABC et $A'B'C'$ ont donc les mêmes angles, ils sont dits semblables. Le plus grand, ABC, est un agrandissement de rapport $k>1$ du plus petit, $A'B'C'$. On cherche k. Pour cela calculons $BC=BA'+A'C$ en déterminant BA' et $A'C$ à l'aide de la loi des sinus :



Dans le triangle $BA'C'$, on a $\frac{A'C'}{\sin\widehat{B}}=\frac{BA'}{\sin(\pi-\delta-\widehat{B})}=\frac{BA'}{\sin(\delta+\widehat{B})}$.
Dans le triangle $CA'B'$, on a $\frac{A'B'}{\sin\widehat{C}}=\frac{A'C}{\sin\delta}$.
On en déduit que $BC=BA'+A'C=\frac{A'C'\sin(\delta+\widehat{B})}{\sin\widehat{B}}+\frac{A'B'\sin\delta}{\sin\widehat{C}}$.
Mais $k\times A'C'=BC$ et $k\times A'B'=AC$ (côtés homologues des triangles semblables), donc la relation précédente s'écrit
$k\times BC=\frac{BC\sin(\delta+\widehat{B})}{\sin\widehat{B}}+\frac{AC\sin\delta}{\sin\widehat{C}}$.
On en tire $k=\frac{\sin(\delta+\widehat{B})}{\sin\widehat{B}}+\frac{AC\sin\delta}{BC\sin\widehat{C}}$.

Simplifions le dernier terme à l'aide de la loi des sinus : $\frac{AC}{\sin\widehat{B}} = \frac{BC}{\sin\widehat{A}}$ et donc $\frac{AC}{BC} = \frac{\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{A}}$, d'où

$$\begin{aligned}
k &= \frac{\sin(\delta+\widehat{B})}{\sin\widehat{B}} + \frac{\sin\widehat{B}\sin\delta}{\sin\widehat{A}\sin\widehat{C}} \\
&= \frac{\sin\widehat{A}\sin\widehat{C}\left(\sin(\delta+\widehat{B})\right) + \sin^2\widehat{B}\sin\delta}{\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}} \\
&= \frac{\sin\widehat{A}\sin\widehat{C}\left(\sin\delta\cos\widehat{B} + \cos\delta\sin\widehat{B}\right) + (1-\cos^2\widehat{B})\sin\delta}{\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}} \\
&= \frac{\cos\delta\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\sin\widehat{C} + \sin\delta\left(\sin\widehat{A}\cos\widehat{B}\sin\widehat{C} + 1 - \cos^2\widehat{B}\right)}{\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}} \\
&= \cos\delta + \sin\delta \times \frac{1+\cos\widehat{B}\left(\sin\widehat{A}\sin\widehat{C} - \cos\widehat{B}\right)}{\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}}
\end{aligned}$$

Pour obtenir la forme symétrique souhaitée, il faut maintenant remplacer $\cos\widehat{B}$ par $\cos\left(\pi - (\widehat{A}+\widehat{C})\right) = -\cos\left(\widehat{A}+\widehat{C}\right) = -\left(\cos\widehat{A}\cos\widehat{C} - \sin\widehat{A}\sin\widehat{C}\right)$. On obtient :

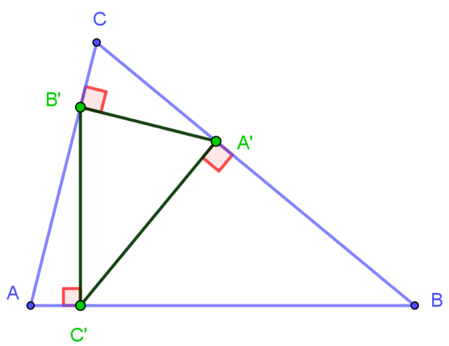
$$\begin{aligned}
k &= \cos\delta + \sin\delta \times \frac{1+\cos\widehat{B}\left(\sin\widehat{A}\sin\widehat{C} + \left(\cos\widehat{A}\cos\widehat{C} - \sin\widehat{A}\sin\widehat{C}\right)\right)}{\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}} \\
&= \cos\delta + \sin\delta \times \frac{1+\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}}{\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}}
\end{aligned}$$

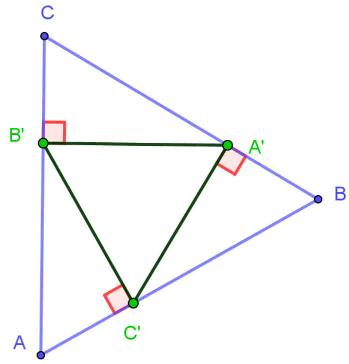
Voilà le résultat attendu.
Lorsque $\delta = \frac{\pi}{2}$ cela se simplifie en

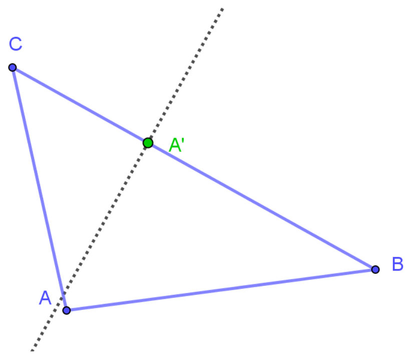
$$k = \frac{1+\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}}{\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}}$$

La figure n'est pas facile à faire : un triangle ABC étant donné, peut-on dans tous les cas construire le triangle $A'B'C'$ respectant la consigne avec $\delta = \frac{\pi}{2}$? Il semble que si on sait placer un sommet de $A'B'C'$ sur un des côtés de ABC, le reste de la construction ne pose pas de problème (il suffit de tracer les 3 perpendiculaires successivement). Déterminons la longueur CA' :
On a vu que $\frac{A'B'}{\sin\widehat{C}} = \frac{A'C}{\sin\delta}$, donc $CA' = \frac{A'B'\sin\delta}{\sin\widehat{C}} = \frac{AC\sin\delta}{k\sin\widehat{C}}$ et, lorsque $\delta = \frac{\pi}{2}$, on obtient $CA' = \frac{AC}{k\sin\widehat{C}}$.
Avec la valeur de k trouvée, cela devient $CA' = \frac{AC\left(\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\right)}{1+\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}}$.

Pour un triangle ABC, on peut ainsi placer A' et, de là, trouver les points B' et C'. Lorsque ABC est obtus la construction ne conduit pas à un triangle $A'B'C'$ (figure de droite).







Correction de l'exercice 3 (Triangle équilatéral (*))

$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \frac{-2\pi}{3} + x$

$(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \frac{2\pi}{3} + x$

Appliquons le théorème d'Al-Kashi aux triangles OMA, OMB et OMC :
$MA^2 = OM^2 + OA^2 - 2OM \cdot OA \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos x = 2r^2(1 - \cos x)$. $MB^2 = OM^2 + OB^2 - 2OM \cdot OB \cos(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos\left(\frac{x-2\pi}{3}\right) = 2r^2\left(1 - \cos\left(\frac{x-2\pi}{3}\right)\right)$. $MC^2 = OM^2 + OC^2 - 2OM \cdot OC \cos(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM}) = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos\left(\frac{x+2\pi}{3}\right) = 2r^2\left(1 - \cos\left(\frac{x+2\pi}{3}\right)\right)$. Pour simplifier cette expression, utilisons la propriété de linéarisation $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$:

$MA^2 = 2r^2(1 - \cos x) = 2r^2\left(2\sin^2 \frac{x}{2}\right) = \left(2r \sin \frac{x}{2}\right)^2 \Longrightarrow MA = 2r \sin \frac{x}{2}$ (car $MA > 0$).

$MB^2 = 2r^2\left(1 - \cos\left(\frac{x-2\pi}{3}\right)\right) = 2r^2\left(2\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(2r \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right)^2 \Longrightarrow MB = 2r \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ (car $MB > 0$).

$MC^2 = 2r^2\left(1 - \cos\left(\frac{x+2\pi}{3}\right)\right) = 2r^2\left(2\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(2r \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right)^2 \Longrightarrow MC = 2r \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ (car $MC > 0$).

Pour prendre la racine carrée de ces expressions, il faut se poser la question du signe.

On sait que $x \in [0, \frac{2\pi}{3}]$.

On a donc $\frac{x}{2} \in [0, \frac{\pi}{3}]$ et donc $\sin \frac{x}{2} > 0$ d'où $MA^2 = \left(2r \sin \frac{x}{2}\right)^2 \Longrightarrow MA = 2r \sin \frac{x}{2}$.

Pour $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{3}, 0]$, on a $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) < 0$ et $MB^2 = \left(2r \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right)^2 \Longrightarrow MB = -2r \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.

Pour $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$, on a $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) > 0$ et $MB^2 = \left(2r \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right)^2 \Longrightarrow MC = 2r \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$.

Finalement, la propriété $MA + MB = MC$ s'écrit $2r \sin \frac{x}{2} - 2r \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 2r \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$.

Simplifiée par $2r$, il reste donc $\sin \frac{x}{2} = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$.

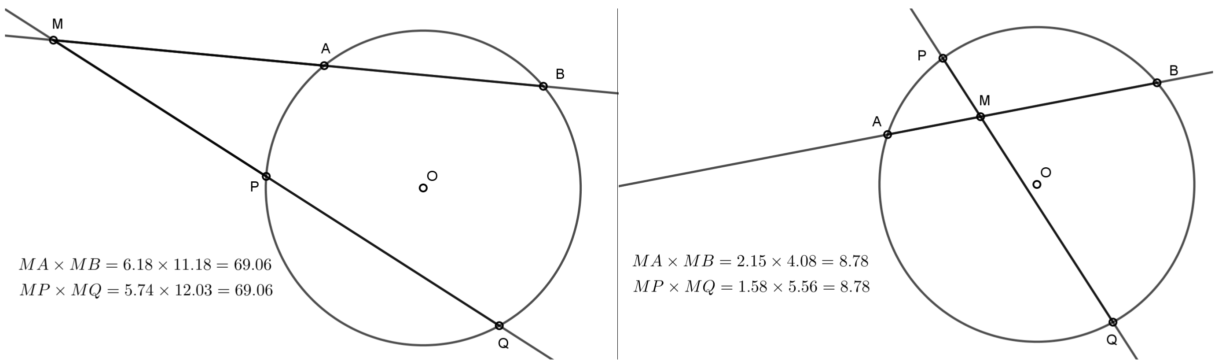
Or $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ Cela se simplifie en $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

On en déduit que $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ (car $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$).

Correction de l'exercice 4 (Axe radical de deux cercles (**))

1. Réaliser une construction géométrique et conjecturer

Après avoir réalisé la figure demandée et après avoir manipulé cette figure en déplaçant le point M, on peut conjecturer que les produits $MA \times MB$ et $MP \times MQ$ sont toujours égaux. Cela semble vrai quelle que soit la position de M, qu'il soit à l'intérieur (à droite) ou à l'extérieur (à gauche) du cercle $\mathscr{C}$. Bien sûr, ce produit varie quand M se déplace ; l'égalité est obtenue pour une position de M fixe : toutes les droites passant par M qui coupent le cercle en deux points A et B ont le même produit $MA \times MB$.



2. Par construction, O étant le milieu du segment $[AA']$, on a $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A'O} = -\overrightarrow{OA'}$.

Le segment $[AA']$ étant un diamètre du cercle $\mathscr{C}$, le triangle ABA' est rectangle en B.

Décomposons alors le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$ en $\overrightarrow{MA} \cdot \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA'}\right) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BA'}$.

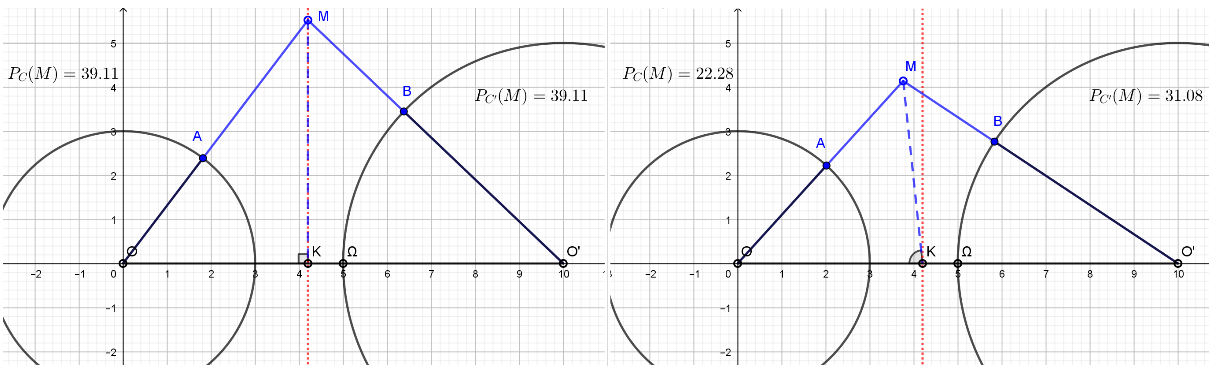
Le dernier produit scalaire est nul car $(MA) \perp (BA')$, et donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

D'une façon évidente, comme $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA'}$, le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'}\right)$ s'écrit $\left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA'}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'}\right)$. Développons ce produit scalaire :

$\left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA'}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'}\right) = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA'}^2$.

Les deux termes du milieu étant égaux (car $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$), ils s'annulent et on obtient l'égalité $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA'}^2 = OM^2 - R^2$ et, d'après la question a), $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = OM^2 - R^2$.
Ce qui vient d'être fait pour les points A et B peut s'appliquer à n'importe quelle sécante au cercle passant par M, et en particulier à la droite (PQ). Ainsi, comme on l'avait remarqué sur la figure et conjecturé dans la question 1d, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = OM^2 - R^2 = P_{\mathscr{C}}(M)$.
Lorsque la sécante au cercle passant par M devient une tangente au cercle, les deux points d'intersection fusionnent en un seul, notons le T. Comme la tangente (MT) est perpendiculaire au rayon correspondant (TO), d'après le théorème de Pythagore, le carré scalaire $\overrightarrow{MT}^2 = MT^2 = MO^2 - OT^2$. On retrouve là l'expression de la puissance du point M par rapport au cercle $\mathscr{C}$, ce nombre que l'on note dorénavant $P_{\mathscr{C}}(M)$.
Remarque : cet exercice détaille la démonstration de la propriété vue dans l'exercice 2.10. *Dans cet exercice du poly, ce qui nous importait était les deux applications qui suivaient. Le présent exercice du livre nous donne une autre application avec la notion d'axe radical de deux cercles.*

3.a) Le point $M(x, y)$ est sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 3 si et seulement si $x^2 + y^2 = 3^2 = 9$. De même, le point $M(x, y)$ est sur le cercle $\mathscr{C}'$ de centre $O'(10, 0)$ et de rayon 5 si et seulement si $(x - 10)^2 + y^2 = 5^2 = 25$.
b) D'une part, comme $\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MO'} = \overrightarrow{O'O}$ d'après la relation de Chasles, et $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'} = 2\overrightarrow{M\Omega}$ car Ω est le milieu de $[OO']$, on a $\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MO'}\right) = 2\overrightarrow{M\Omega} \cdot \overrightarrow{O'O}$.
D'autre part, en développant le produit scalaire, on obtient
$\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MO'}\right) = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MO'} + \overrightarrow{MO'} \cdot \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MO'}^2$.
Les deux termes du milieu s'annulant, cela se réduit à $\overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{MO'}^2 = MO^2 - MO'^2$.
Comme M est un point tel que $P_{\mathscr{C}}(M) = P_{\mathscr{C}'}(M)$, on a $OM^2 - 3^2 = O'M^2 - 5^2$ soit $O'M^2 - OM^2 = 25 - 9 = 16$.
Finalement, $\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MO'}\right) = MO^2 - MO'^2 = -16$.
Les deux évaluations de ce même produit conduisent à l'égalité de l'énoncé $2\overrightarrow{M\Omega} \cdot \overrightarrow{O'O} = -16$ qui se réécrit $2\overrightarrow{M\Omega} \cdot \overrightarrow{OO'} = 16$ (car $\vec{u} \cdot (\overrightarrow{-v}) = -\vec{u} \cdot \vec{v}$).
Comme K est le projeté de M sur la droite (OO') et que $\Omega \in (OO')$, les produits scalaires $\overrightarrow{M\Omega} \cdot \overrightarrow{OO'}$ et $\overrightarrow{K\Omega} \cdot \overrightarrow{OO'}$ sont égaux. On en déduit que $\overrightarrow{K\Omega} \cdot \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{M\Omega} \cdot \overrightarrow{OO'} = \frac{16}{2} = 8$.
Les points M vérifiant $P_{\mathscr{C}}(M) = P_{\mathscr{C}'}(M)$ ont donc tous un même projeté orthogonal sur la droite (OO'). Cela signifie que $(MK) \perp (OO')$. La position du point K est donnée par l'équation $\overrightarrow{K\Omega} \cdot \overrightarrow{OO'} = 8$. Les vecteurs $\overrightarrow{K\Omega}$ et $\overrightarrow{OO'}$ ont le même sens, et $K\Omega \times OO' = 8 \iff K\Omega = \frac{8}{OO'} = \frac{8}{10} = 0{,}8$ donc $K(x = 5 - 0{,}8 = 4{,}2; y = 0)$ (on aurait aussi pu utiliser l'expression analytique du produit scalaire pour déterminer les coordonnées de K).
Le point M appartenant à la perpendiculaire à (OO') passant par K, cette droite $\mathscr{D}$ a pour équation $x = x_K = 4{,}2$.



Réciproquement, un point quelconque M de $\mathscr{D}$ a pour coordonnées $M(4{,}2; y)$.
Montrons qu'alors $P_{\mathscr{C}}(M) = P_{\mathscr{C}'}(M)$.

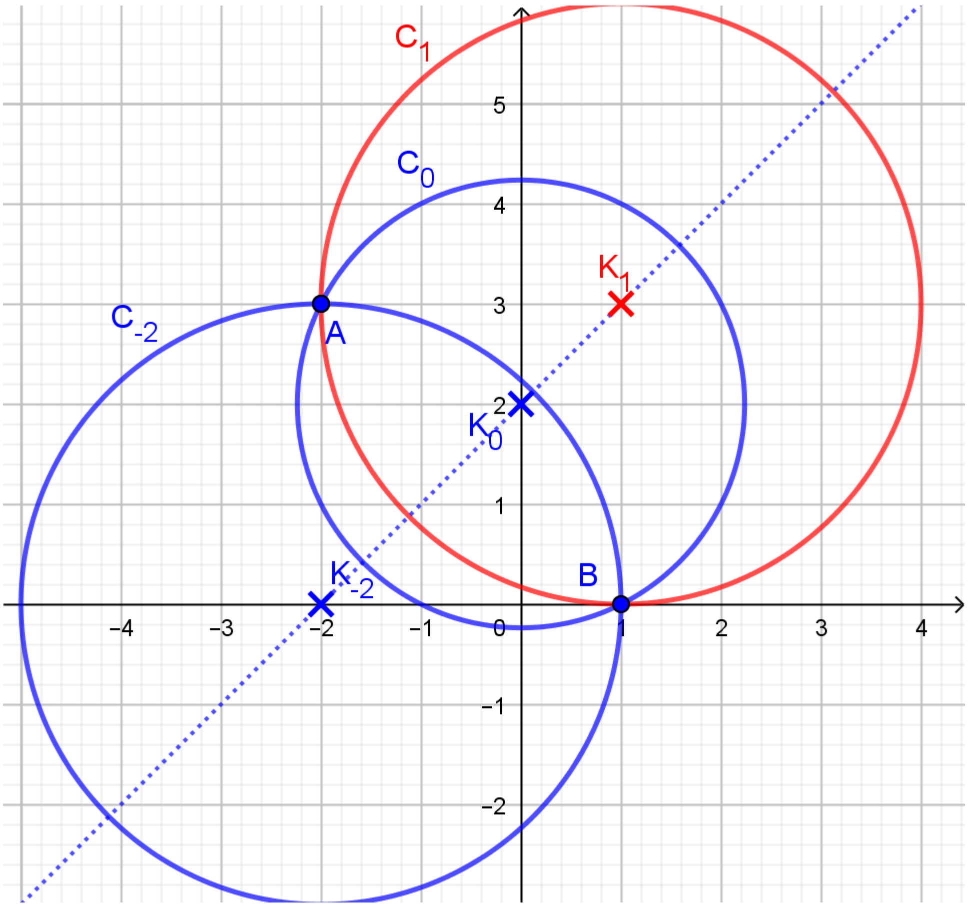
- $P_{\mathscr{C}}(M) = OM^2 - 9 = (4{,}2 - 0)^2 + (0 - 0)^2 - 9 = 4{,}2^2 - 9 = 8{,}64$

- $P_{\mathscr{C}'}(M) = O'M^2 - 25 = (4,2-10)^2 + (0-0)^2 - 25 = 5,8^2 - 25 = 8,64$

En effet, les puissances de M par rapport aux deux cercles sont égales. Il y a équivalence entre $P_{\mathscr{C}}(M) = P_{\mathscr{C}'}(M)$ et $M \in \mathscr{D}$; la droite $\mathscr{D}$ est appelée axe radical des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Correction de l'exercice 5 (Une famille de courbes (*))

a) Un point M appartient à $\mathscr{C}_0$ si et seulement si :
$x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0 \iff x^2 + (y-2)^2 - 2^2 - 1 = 0 \iff x^2 + (y-2)^2 = 5$
Cette équation est celle d'un cercle de rayon $\sqrt{5}$ dont le centre a pour coordonnées $(0; 2)$.
Un point M appartient à $\mathscr{C}_{-2}$ si et seulement si :
$x^2 + 4x + y^2 - 4 - 1 = 0 \iff (x+2)^2 - 2^2 + y^2 - 5 = 0 \iff (x+2)^2 + y^2 = 9$
Cette équation est celle d'un cercle de rayon 3 dont le centre a pour coordonnées $(-2; 0)$.



b) Généralisons les résultats précédents pour un réel m quelconque. L'équation de la courbe $\mathscr{C}_m$ s'écrit :

$$\begin{aligned} x^2 - 2mx + y^2 - 2(m+2)y + 2m - 1 = 0 &\iff (x-m)^2 - m^2 + (y-(m+2))^2 - (m+2)^2 + 2m - 1 = 0 \\ &\iff (x-m)^2 + (y-(m+2))^2 - 2m^2 - 4 - 4m + 2m - 1 = 0 \\ &\iff (x-m)^2 + (y-(m+2))^2 = 2m^2 + 2m + 5 \end{aligned}$$

Cette équation est celle d'un cercle de centre $K_m(m; m+2)$ et de rayon $R_m = \sqrt{2m^2 + 2m + 5}$.
On peut vérifier que pour $m = 0$ et $m = -2$ on retrouve bien les résultats précédents. On peut aussi déterminer les valeurs éventuelles de m pour lesquelles ce cercle n'existe pas : pour qu'il existe, il faut que $2m^2 + 2m + 5 > 0$. Or le discriminant de l'équation $2m^2 + 2m + 5 = 0$ est négatif (il vaut -36). Le polynôme ne s'annulant pas, il garde le signe de son coefficient d'ordre 2 – ce coefficient est $2 > 0$, donc un signe positif – pour toutes les valeurs de m. Il n'y a donc pas de valeurs interdites.

c) Les points d'intersection de $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_{-2}$ vérifient simultanément les égalités $x^2 + (y-2)^2 = 5$ et $(x+2)^2 + y^2 = 9$. On a donc $y^2 = 9 - (x+2)^2$ et $y = \pm\sqrt{9 - (x+2)^2}$ (les deux signes étant également possibles.

Prenons $y = \sqrt{9-(x+2)^2}$ et remplaçons y par cette expression dans la 1^re^ équation que l'on développe $x^2+y^2-4y+4=5 \iff x^2+y^2-4y=1$. On obtient alors une équation à une inconnue du second degré :
$x^2+9-(x+2)^2-4\sqrt{9-(x+2)^2}=1 \iff 9-4x-4-4\sqrt{9-(x+2)^2}=1 \iff \sqrt{9-(x+2)^2}=1-x$.
On a déjà résolu des équations de ce type : on ne trouvera des solutions éventuelles que si $1-x>0 \iff x<1$ et si $9-(x+2)^2>0 \iff (x+2)^2<3^2 \iff -3<x+2<3 \iff -5<x<1$, donc finalement si $-5<x<1$.
Á cette condition, on élève l'égalité au carré pour obtenir $9-(x+2)^2=(1-x)^2$.
Cette dernière équation équivaut à $9-x^2-4x-4=1+x^2-2x \iff 2x^2+2x-4=0 \iff x^2+x-2=0$.
Cette équation a deux solutions qui sont $x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}$, soit 1 et -2. On obtient alors les ordonnées avec l'égalité $y=\sqrt{9-(x+2)^2}$: pour $x=1$ on obtient $y=\sqrt{9-9}=0$ et pour $x=-2$ on obtient $y=\sqrt{9-0}=3$.
En prenant $y=-\sqrt{9-(x+2)^2}$, on obtient l'équation $x^2+9-(x+2)^2+4\sqrt{9-(x+2)^2}=1 \iff \sqrt{9-(x+2)^2}=x-1$ qui conduit aux mêmes solutions, sauf que, comme il faut avoir $x-1>0 \iff x>1$, la solution pour $x=-2$ n'est pas valable (elle serait négative et indiquerait un 3^e^ point d'intersection entre les deux cercles, ce qui ne se peut pas). Les points $A(-2;3)$ et $B(1;0)$ sont donc l'intersection de $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_{-2}$. Montrons que A et B appartiennent à tous les cercles $\mathscr{C}_m$:

- $A \in \mathscr{C}_m$ car on a
  $(-2)^2-2m(-2)+3^2-2(m+2)\times3+2m-1=4+4m+9-6m-12+2m-1=13+6m-6m-13=0$
- $B \in \mathscr{C}_m$ car on a
  $(1)^2-2m\times1+0^2-2(m+2)\times0+2m-1=1-2m+2m-1=0$

d) Les points $K_m(m;m+2)$ ont des coordonnées qui vérifient $x=m$ et $y=m+2=x+2$.
Cette dernière égalité est la forme réduite d'une équation de droite $(y=x+2)$ parallèle à la 1^re^ bissectrice (je l'ai tracé en pointillés sur l'illustration).

e) Un cercle $\mathscr{C}_m$ sera tangent à l'axe des abscisses si et seulement si son intersection avec cette droite d'équation $y=0$ se réduit à un point.
Lorsque $y=0$, l'équation de $\mathscr{C}_m$ devient $x^2-2mx+0^2-2(m+2)\times0+2m-1=0 \iff x^2-2mx+2m-1=0 \iff (x-m)^2=m^2-2m+1=(m-1)^2$.
Cette équation a généralement deux solutions qui sont $x-m=m-1 \iff x=2m-1$ et $x-m=-(m-1) \iff x=1$ (on reconnait dans cette dernière valeur le point B). Les deux solutions se confondent pour une seule valeur de m qui est $2m-1=1 \iff m=1$. Dans ce cas, le cercle $\mathscr{C}_1$ a pour centre $K_1(1;3)$ et pour rayon $R_1=\sqrt{2+2+5}=3$; j'ai tracé ce cercle en rouge sur l'illustration.

Existe t'il de même un cercle $\mathscr{C}_q$ tangent à l'axe des ordonnées ?
Formulé ainsi, on a tendance à penser non. Prouvons-le.
Un cercle $\mathscr{C}_m$ sera tangent à l'axe des ordonnées si et seulement si son intersection avec cette droite d'équation $x=0$ se réduit à un point.
Lorsque $x=0$, l'équation de $\mathscr{C}_m$ devient $y^2-2(m+2)y+2m-1=0 \iff (y-(m+2))^2-(m+2)^2+2m-1=0 \iff (y-(m+2))^2=m^2+2m+5$.
Cette équation a généralement deux solutions qui sont $y=m+2\pm\sqrt{m^2+2m+5}$. Pour que les deux fusionnent en une seule, il faudrait que $m+2+\sqrt{m^2+2m+5}=m+2-\sqrt{m^2+2m+5} \iff \sqrt{m^2+2m+5}=-\sqrt{m^2+2m+5}$. Le seul nombre qui a une racine égale à son opposée est 0, il faudrait donc que $m^2+2m+5=0$. Or, ceci n'arrive jamais car le discriminant de cette équation est $-16<0$. Il n'y a donc aucun cercle $\mathscr{C}_m$ tangent à l'axe des ordonnées, comme on l'avait finement pressenti.