1S4

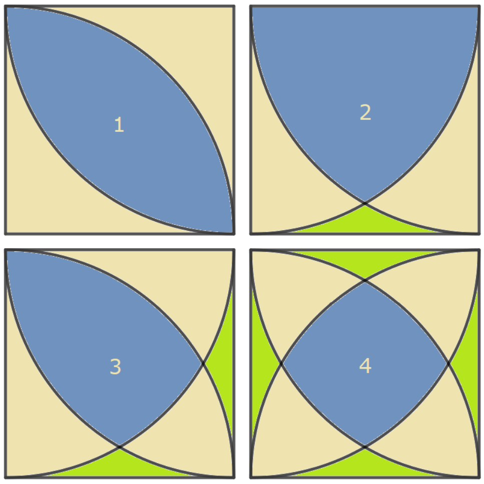
DM n°3 : Géométrie

Exercice 1 (Périmètres et aires (*))

Estimer à l'œil le classement des 4 domaines bleus

- selon les aires croissantes
- selon les périmètres croissants

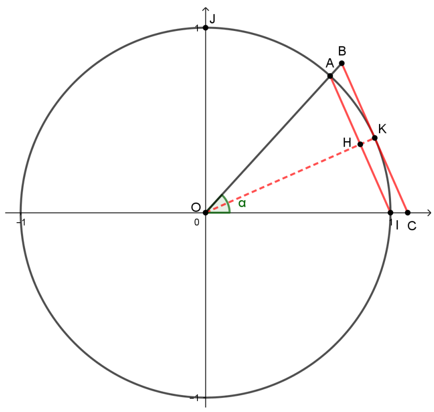
Calculer les périmètres et les aires de ces domaines (prendre les côtés des carrés égaux à 1), pour confirmer ou corriger les classements estimés.
Ajouter le(s) domaine(s) vert(s) d'un carré au domaine bleu modifie de quelle façon le classement des aires ?



Exercice 2 (La méthode d'Archimède (*))

On considère deux polygones réguliers, l'un inscrit dans le cercle trigonométrique (dont les sommets appartiennent au cercle) et l'autre tangent extérieurement au même cercle (dont les côtés sont tangents au cercle). Chaque polygone possède n côtés et chaque côté correspond à un angle au centre, en degré, égal à : $\alpha = \frac{360}{n}$.

1a). Montrer que la longueur d'un côté du polygone intérieur est : $2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{180}{n}\right)$.
b). Montrer que la longueur d'un côté du polygone extérieur est : $2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{180}{n}\right)$.
2). En déduire les périmètres et les aires de ces deux polygones en fonction de n.
3a). Écrire avec votre calculatrice ou un ordinateur un programme qui donne le périmètre et l'aire de ces deux polygones en fonction de la valeur de n.
b). Modifier l'algorithme précédent pour qu'il détermine un encadrement de π à 10^{-3} près dans les deux cas.



Exercice 3 (Dichotomie (**))

On cherche à résoudre l'équation $\cos x = x$ sur l'intervalle $I = [0; \frac{\pi}{2}]$.
Pour cela on définit la fonction f par : $f(x) = \cos x - x$ que l'on admettra strictement décroissante sur I et on résout l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie. On pose $a = 0$ et $b = \frac{\pi}{2}$.

a) Vérifier que $f(a) \times f(b) < 0$.
On en déduit que l'équation admet une solution notée α.

b) Déterminer le signe de $f(a) \times f(\frac{a+b}{2})$.
En déduire que $\alpha \in [0; \frac{\pi}{4}]$.

c) On remplace b par $\frac{a+b}{2}$.
Déterminer le nouveau signe de $f(a) \times f(\frac{a+b}{2})$ et en déduire l'intervalle d'appartenance de α.

d) Compléter l'algorithme ci-contre.

e) Après avoir rentré la fonction dans votre calculatrice, programmer l'algorithme précédent, puis déterminer alors une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Saisir A, B et N
Pour I allant de ... à ...
| Si $f(a) \times f(\frac{a+b}{2}) < 0$ alors
| $B = \ldots$
| Sinon
| $A = \ldots$
| Fin du « Si »
Fin du « Pour »
Afficher A et B

Exercice 4 (Orthocentre (**))

Les points $A(-3,1)$, $B(1,5)$ et $C(3,-3)$ sont donnés par leurs coordonnées dans le repère orthonormé $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$. Faire une figure sur laquelle seront placés les constructions suivantes afin de vérifier les résultats obtenus par le calcul.

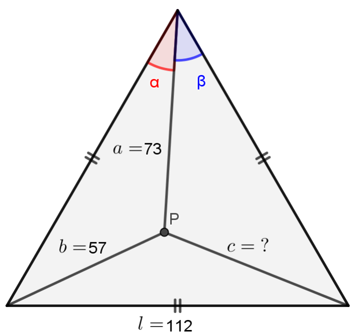
1. Écrire une équation de chacune des hauteurs du triangle ABC.
   Retrouver que ces hauteurs sont concourantes en un point H, nommé « orthocentre » du triangle, dont on déterminera les coordonnées.
2. Écrire une équation de chacune des médiatrices du triangle ABC.
   Retrouver que ces médiatrices sont concourantes en un point O, nommé « centre du cercle circonscrit », dont on déterminera les coordonnées.
3. Déterminer les coordonnées du point G, isobarycentre de $\{A,B,C\}$, puis montrer que les points O, G et H sont alignés sur une droite appelée « droite de Euler » du triangle.
4. Écrire une équation du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC, puis montrer que les points suivants appartiennent au cercle $\mathscr{C}$:
   - $H_{[BC]}$, $H_{[AC]}$ et $H_{[AB]}$, les symétriques de H par rapport aux côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$
   - $H_{A'}$, $H_{B'}$ et $H_{C'}$, les symétriques de H par rapport aux milieux A', B' et C' de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$
5. Soit E le milieu du segment $[HO]$. Montrer que E est le centre du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ puis que ce cercle contient aussi les points suivants. Ce cercle est appelé « cercle de Euler » ou « cercle des 9 points » du triangle.

- H_a, H_b et H_c, les pieds des hauteurs issues de A, B et C
- H_A, H_B et H_C, les milieux des segments $[HA]$, $[HB]$ et $[HC]$

Exercice 5 (Problème d'arithmétique (***))

Existe t'il un triangle équilatéral de côté l et un point P intérieur au triangle dont les distances aux sommets soient a, b et c tels que les nombres a, b, c et l soient des entiers ?

1. Une réponse à ce problème a été donné dans la figure ci-contre mais il manque le nombre c. Pour le déterminer, commencer par calculer $\cos(\alpha)$ puis $\sin(\alpha)$. Montrer ensuite que $\sin(\alpha) = \frac{p}{q}\sqrt{3}$ avec p et q entiers. En déduire $\cos(\beta)$ puis c.
2. La méthode entrevue ici peut servir à chercher d'autres solutions à ce problème. Montrer que c doit être égal à
   $$\sqrt{\frac{l^2+a^2+b^2-\sqrt{3((2al)^2-(l^2+a^2-b^2)^2)}}{2}}$$
   (on ne cherchera pas à simplifier cette expression)

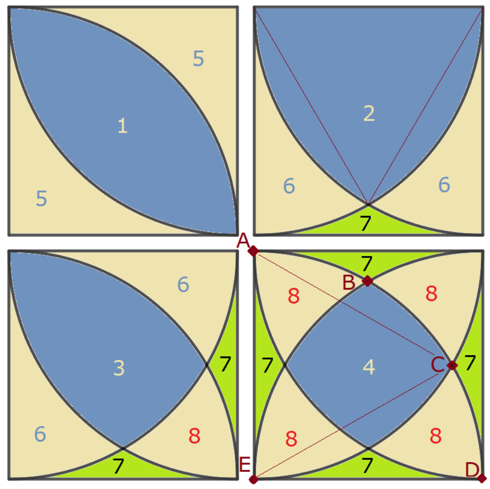


3. Préciser l'ensemble des contraintes portant sur a, b, c et l pour un point P à l'intérieur du triangle, puis programmer la recherche de tous les quadruplets (a,b,c,l) avec $l < 120$, qui satisfont l'ensemble de ces contraintes.

Correction de l'exercice 1 (Périmètres et aires (*))

Á l'œil, je rangerai les domaines bleus dans l'ordre $4, 3, 1, 2$ pour les aires (à moins que ce ne soit $4, 3, 2, 1$) et la même chose ($4, 3, 1, 2$ ou $4, 3, 2, 1$, j'hésite encore) pour les périmètres, bien que ce soit moins évident pour les périmètres que pour les aires. Voyons maintenant les calculs.

Considérons cette figure donnant des noms aux différents types de domaines ainsi qu'à certains points de cette figure.



Les angles qui interviennent dans ces calculs sont $\widehat{AEB} = \widehat{BEC} = \widehat{CED} = \frac{\pi}{6}$. Ces angles sont égaux car AEC et BED sont deux triangles équilatéraux (leurs angles sont égaux à $\frac{\pi}{3}$) inscrits dans un carré (ses angles sont égaux à $\frac{\pi}{2}$). Les périmètres des différents domaines sont, par conséquents, égaux à :

1. $2 \times \overset{\frown}{AD} = 2 \times (\frac{\pi}{2}) = \pi \approx 3,1416$
2. $2 \times \overset{\frown}{AC} + 1 = 2 \times (\frac{\pi}{3}) + 1 = \frac{2\pi}{3} + 1 \approx 3,0944$
3. $2 \times \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = 2 \times (\frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \approx 2,6180$
4. $4 \times \overset{\frown}{BC} = 4 \times (\frac{\pi}{6}) = \frac{2\pi}{3} \approx 2,0944$

Les périmètres des domaines sont donc rangés dans l'ordre $4, 3, 2, 1$ (d'après les valeurs approchées $2,0944 - 2,6180 - 3,0944 - 3,1416$).

Pour les aires, calculons séparément

- l'aire d'un carré de côté 1 : 1
- l'aire d'un secteur circulaire d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rayon 1 : $\frac{\pi}{2} \div 2 = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854$
- l'aire du domaine n°5 : $1 - \frac{\pi}{4} =\approx 0,2146$
- l'aire du domaine n°1 : $2 \times \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,5708$
- l'aire d'un triangle équilatéral comme EAC, de côté 1 : $\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,4330$
- l'aire d'un secteur circulaire d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rayon 1 : $\frac{\pi}{3} \div 2 = \frac{\pi}{6} \approx 0,5236$
- l'aire du domaine n°2 : $2 \times \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12} \approx 0,6142$
- l'aire du domaine n°6 : $\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{12} \approx 0,1712$
- l'aire du domaine n°7 : $1 - \frac{\pi}{4} - \left(\frac{3\sqrt{3} - \pi}{12}\right) = \frac{12 - 2\pi - 3\sqrt{3}}{12} \approx 0,0434$
- l'aire du domaine n°8 : $1 - \frac{\pi}{4} - 2\left(\frac{12 - 2\pi - 3\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{\pi - 12 + 6\sqrt{3}}{12} \approx 0,1278$
- l'aire du domaine n°3 : $\frac{\pi}{2} - 1 - \left(\frac{\pi - 12 + 6\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{12} \approx 0,4430$
- l'aire du domaine n°4 : $\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{12} - \left(\frac{\pi - 12 + 6\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{2\pi + 6 - 6\sqrt{3}}{6} \approx 0,3151$

C'est un peu fastidieux et assez difficile à suivre, d'autant qu'il y a différentes façons de procéder pour arriver à ces résultats. Mais la conclusion est que les aires des domaines sont donc rangées dans l'ordre $4, 3, 1, 2$ (d'après les valeurs approchées $0,3151 - 0,4430 - 0,5708 - 0,6142$).

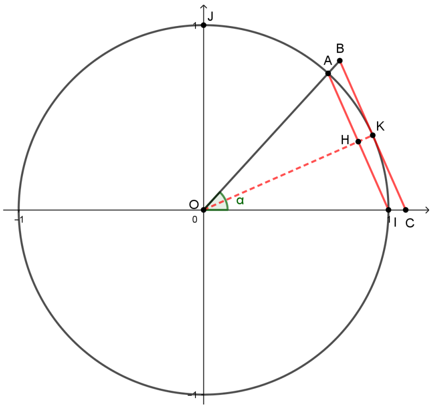
Si on ajoute les domaines verts au domaine bleu d'un même carré, on obtient :

1. l'aire du domaine n°1 : $2 \times \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,5708$
2. l'aire du domaine n°2 avec un ajout vert : $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 \times \left(\frac{12 - 2\pi - 3\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{\pi + 6 - 3\sqrt{3}}{6} \approx 0,6576$
3. l'aire du domaine n°3 avec deux ajouts verts : $\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{12} + 2 \times \left(\frac{12 - 2\pi - 3\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{24 + \pi - 12\sqrt{3}}{12} \approx 0,5297$
4. l'aire du domaine n°4 avec quatre ajouts verts : $\frac{4\pi + 12 - 12\sqrt{3}}{12} + 4 \times \left(\frac{12 - 2\pi - 3\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{15 - \pi - 6\sqrt{3}}{3} \approx 0,4887$

Conclusion finale : il n'y a pas de changement, les aires des domaines bleu+vert(s) sont donc rangées dans l'ordre $4, 3, 1, 2$ (d'après les valeurs approchées $0,4887 - 0,5297 - 0,5708 - 0,6576$).

Correction de l'exercice 2 (La méthode d'Archimède (*))

1a). D'après les notations de la figure, la longueur d'un côté du polygone intérieur est AI. Le triangle OAI est isocèle en O, d'angle principal α. H étant le milieu de $[AI]$, la médiane $[OH]$ est en même temps hauteur et médiatrice. Dans le triangle OHI rectangle en H, on a $HI = OI\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Or $OI = 1$ (cercle trigonométrique) et $AI = 2HI$. On en déduit $AI = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.
Comme il y a n côtés, $\alpha = \frac{180}{n}$ (en degrés) $= \frac{2\pi}{n}$ (en radians).
On en tire la relation de l'énoncé $AI = 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ (pour une calculatrice en mode en radians).



b). De même, la longueur d'un côté du polygone extérieur est BC. Le triangle OBC est isocèle en O, d'angle principal α. K étant le milieu de $[BC]$, la médiane $[OK]$ est en même temps hauteur et médiatrice. Dans le triangle OKC rectangle en K, on a $KC = KI\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Comme $KI = 1$ (cercle trigonométrique) et $BC = 2KC$, on en déduit $BC = 2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et pour n côtés, $\alpha = \frac{180}{n}$ (en degrés) $= \frac{\pi}{n}$ (en radians). Pour une calculatrice en mode en radians, la relation est $BC = 2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

2). Les polygones ayant n côtés, on en déduit le périmètre du polygone intérieur $PI_n = 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ et celui du polygone extérieur $PE_n = 2n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

L'aire du triangle isocèle OAI est égale à $\frac{AI\times OH}{2}$ avec $OH = OI\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ puisque $OI = 1$. On en déduit l'aire du polygone intérieur $AI_n = n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$, relation qui se simplifie avec la formule de duplication du sinus $[\sin(2a) = 2\sin a\cos a]$ en $AI_n = \frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.
De la même façon, on écrit que l'aire du triangle isocèle OBC est égale à $\frac{BC\times OK}{2}$ avec $OK = 1$. On en déduit l'aire du polygone extérieur $AE_n = n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

3a). Le programme qui donne le périmètre et l'aire de ces deux polygones en fonction de n est très simple à écrire. Il suffit de demander n et d'afficher les valeurs PI_n, PE_n, AI_n et AE_n calculées à partir des formules ci-dessus. Le programme en Python ci-dessous répond à cette question. J'ai ajouté les demi-périmètres car ce sont eux qui encadrent la valeur de π, le périmètre du cercle étant 2π. Les deux aires par contre, encadrent directement π, l'aire du disque étant égale à π. On constate que pour des polygones à $n = 10$ côtés, l'encadrement obtenu est encore très imprécis puisqu'on obtient $3,09017 < \pi < 3,2492$ avec les périmètres (amplitude de $3,2492 - 3,09017 = 0,15903$) et $2,93893 < \pi < 3,2492$ avec les aires (amplitude de $3,2492 - 2,93893 = 0,31027$). Pour cette valeur de n, on constate donc également que l'encadrement de π est meilleur avec les demi-périmètres qu'avec les aires. Pour la suite, je ne garderai donc que l'encadrement avec les demi-périmètres.

```
from math import *

def perimetres(n):
    Pi=2*n*sin(pi/n)
    Pe=2*n*tan(pi/n)
    return Pi,Pe

def aires(n):
    Ai=n*sin(2*pi/n)/2
    Ae=n*tan(pi/n)
    return Ai,Ae
```

```
quel est le nombre de côtés? 6
perimetre interieur       = 6.0   perimetre exterieur       = 6.9282
demi perimetre interieur = 3.0   demi perimetre exterieur = 3.4641
aire interieure           = 2.59808   aire exterieure       = 3.4641

quel est le nombre de côtés? 10
perimetre interieur       = 6.18034  perimetre exterieur       = 6.49839
demi perimetre interieur = 3.09017  demi perimetre exterieur = 3.2492
aire interieure           = 2.93893  aire exterieure           = 3.2492
```

```
n=int(input("quel est le nombre de côtés? "))
i,e=perimetres(n)
print("perimetre interieur      =",round(i,5),  " perimetre exterieur      =",round(e,5))
print("demi perimetre interieur =",round(i/2,5)," demi perimetre exterieur =",round(e/2,5))
i,e=aires(n)
print("aire interieure          =",round(i,5),  " aire exterieure          =",round(e,5))
```

b). Pour déterminer un encadrement de π à 10^{-3} près, on a remarqué que les deux périmètres déterminés encadrent le périmètre du cercle qui est égal à 2π. On a donc $PI_n < 2\pi < PE_n$, après division par 2, on obtient l'encadrement de π suivant : $n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) < \pi < n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Si on veut que l'encadrement de π obtenu soit à 10^{-3} près, cela suppose que la différence entre les deux bornes doit devenir inférieure à 10^{-3}. Si on veut donner une valeur approchée de π (au lieu d'un encadrement) on prend la moyenne $\frac{PI_n+PE_n}{2}$ entre les deux bornes. Dans ce cas, on pourrait se contenter d'une différence entre les deux bornes inférieure à 2×10^{-3} puisqu'alors l'écart entre π et la valeur donnée sera inférieur à 10^{-3}.

```
from math import *

def perimetres(n):
    Pi=2*n*sin(pi/n)
    Pe=2*n*tan(pi/n)
    return Pi,Pe

n,d,dMAX=2,1,0.0001
while d>dMAX:
    n+=1
    i,e=perimetres(n)
    d=e-i
print("Avec des polygones à",n,"côtés,")
print("l'amplitude de l'encadrement est inférieure pour la 1ère fois à",dMAX)
print("demi perimetre interieur  =",round(i/2,5)," demi perimetre exterieur =",round(e/2,5))
print("amplitude de l'encadrement=",round((e-i)/2,5)," centre de l'encadrement=",round((e+i)/4,5))
```

```
Avec des polygones à 56 côtés,
l'amplitude de l'encadrement est inférieure pour la 1ère fois à 0.01
demi perimetre interieur  = 3.13995  demi perimetre exterieur = 3.14489
amplitude de l'encadrement= 0.00495  centre de l'encadrement= 3.14242

Avec des polygones à 177 côtés,
l'amplitude de l'encadrement est inférieure pour la 1ère fois à 0.001
demi perimetre interieur  = 3.14143  demi perimetre exterieur = 3.14192
amplitude de l'encadrement= 0.00049  centre de l'encadrement= 3.14168

Avec des polygones à 557 côtés,
l'amplitude de l'encadrement est inférieure pour la 1ère fois à 0.0001
demi perimetre interieur  = 3.14158  demi perimetre exterieur = 3.14163
amplitude de l'encadrement= 5e-05  centre de l'encadrement= 3.1416
```

En exécutant le programme ci-dessus, on constate qu'il faut aller jusqu'à un polygone à 177 côtés pour que l'amplitude de l'encadrement devienne inférieure à 10^{-3} pour la 1re fois. Cette valeur étant assez importante, on se doute que ce n'est pas avec cette méthode que l'on obtiendra la très grande précision sur la valeur de π qui est aujourd'hui atteinte (quelques milliards de décimales). Pour gagner une décimale supplémentaire, il faut pousser jusqu'à des polygones à 577 côtés. On pense qu'Archimède, à son époque (donc sans les moyens modernes de calcul), avait été jusqu'à des polygones à 96 côtés. En fait, il avait mis au point un algorithme qui doublait à chaque fois le nombre de côtés des polygones, passant de 6 à 12 côtés, puis à 24, 48 et enfin 96. Á chaque étape, il gagnait ainsi en précision. L'encadrement qu'il obtint est $\frac{223}{71}<\pi<\frac{22}{7}$, soit une amplitude de $\frac{1}{497}\approx 0,002$.

Correction de l'exercice 3 (Dichotomie (**))

a) Avec $f(x)=\cos x-x$, $a=0$ et $b=\frac{\pi}{2}$, $f(a)\times f(b)=(\cos 0-0)\left(\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=1\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}<0$. Cela signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. Or on nous dit que la fonction f est strictement décroissante sur $I=[0;\frac{\pi}{2}]$. Cela implique que $f(a)>0$ tandis que $f(b)<0$. La fonction étant définie en tout point de I, on peut en conclure qu'il existe une valeur $x=\alpha$ pour laquelle $f(x)=f(\alpha)=0$. C'est cette valeur que l'on cherche à déterminer.

b) Avec $a=0$ et $\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{4}$, $f(a)\times\left(\frac{a+b}{2}\right)=(\cos 0-0)\left(\cos\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}\approx-0,0783<0$. Cela signifie que $f(a)$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ sont de signes contraires. La fonction f étant strictement décroissante sur I, cela implique que $f(a)>0$ tandis que $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$. La fonction étant définie en tout point de I, on peut en conclure que le nombre α pour lequel $f(\alpha)=0$ est compris entre $a=0$ et $\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{4}$.

c) La valeur $\frac{a+b}{2}$ a été affectée à la borne supérieure de l'encadrement (la variable b) dans les deux questions précédentes. On a fait cela car le produit $f(a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ était négatif. Si ce produit devient positif, il faudra en conclure que la valeur $\frac{a+b}{2}$ doit être affectée à la borne inférieure de l'encadrement (la variable a).
Ainsi que l'énoncé le suggère, examinons une étape supplémentaire du processus de dichotomie :
La nouvelle valeur $\frac{a+b}{2}$ vaut cette fois $\frac{\pi}{8}$. On calcule le produit $f(a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Il vaut cette fois $(\cos 0-0)\left(\cos\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}-\frac{\pi}{4}\approx 0,531>0$. Comme ce produit est positif, on en déduit que les images par f de $a=0$ et de $\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{8}$ sont du même signe, positif car f est strictement décroissante sur I. On doit en conclure que $\alpha>\frac{\pi}{8}$.
Finalement, à l'issue de cette 3e étape, on peut affirmer que $\frac{\pi}{8}<\alpha<\frac{\pi}{4}$. On affecte alors la valeur de $\frac{\pi}{8}$ à la borne inférieure de l'encadrement (la variable a) ; la variable b contient toujours le nombre $\frac{\pi}{4}$.

On recommence alors le processus : calculer $f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, déterminer son signe. S'il est négatif on affecte $\frac{a+b}{2}$ à b sinon à a, etc. jusqu'à ce que l'écart entre a et b soit assez petit.

d) L'algorithme de dichotomie que l'on vient de dérouler sur 3 étapes peut être maintenant complété. J'ai mis les affectations précédemment décrites et justifiées.

Saisir A, B et N
Pour I allant de 1 à N
| Si $f(A) \times f(\frac{A+B}{2}) < 0$ alors
| $B = \frac{A+B}{2}$
| Sinon
| $A = \frac{A+B}{2}$
| Fin du « Si »
Fin du « Pour »
Afficher A et B

e) Le gros défaut de cet algorithme est d'être un peu trop simpliste : il faut savoir à l'avance combien d'étapes seront nécessaires (la variable N). Or, cela n'est pas connu à l'avance. Un petit calcul permettrait pourtant de le savoir : à chaque étape l'amplitude de l'encadrement est divisé par 2. Donc il suffit de déterminer pour quelle valeur de N l'amplitude $\frac{b-a}{2^N}$ devient assez petite. Comme la question est de déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près, on peut se fixer comme valeur d'arrêt pour N la 1re fois que l'amplitude $\frac{b-a}{2^N}$ devient inférieure à 10^{-3}.

Le programme ci-dessous implémente la version initiale de l'algorithme (celle du livre) et, en dessous, j'ai mis une amélioration qui utilise une boucle « While » plutôt que la boucle « For » de l'énoncé : Plutôt que de calculer au départ le nombre de tours de boucle qu'il faut, on teste à chaque tour l'amplitude de l'intervalle et on s'arrête (on sort de la boucle) dès que la condition d'arrêt n'est plus vérifiée. C'est plus simple et tout aussi efficace.

Dans tous les cas, on voit qu'il faut 11 étapes pour obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-3} : $0,738612 < \alpha < 0,739379$. L'écart entre ces deux valeurs étant de $0,000767$ environ, n'importe quelle valeur de l'intervalle (par exemple $0,739$) s'écarte de la vraie valeur de moins de 10^{-3}.

```python
from math import *

def f(x): return cos(x)-x

n=int(input("Combien d'étapes? "))
a,b=0,pi/2
for i in range(n) :
    if f(a)*f((a+b)/2)<0 :
        b=(a+b)/2
    else :
        a=(a+b)/2
print("a=",round(a,6)," b=",round(b,6)," b-a=",round(b-a,6))
```

```
Combien d'étapes? 5
a= 0.736311   b= 0.785398   b-a= 0.049087
Combien d'étapes? 10
a= 0.737845   b= 0.739379   b-a= 0.001534
Combien d'étapes? 12
a= 0.738995   b= 0.739379   b-a= 0.000383
Combien d'étapes? 11
a= 0.738612   b= 0.739379   b-a= 0.000767
```

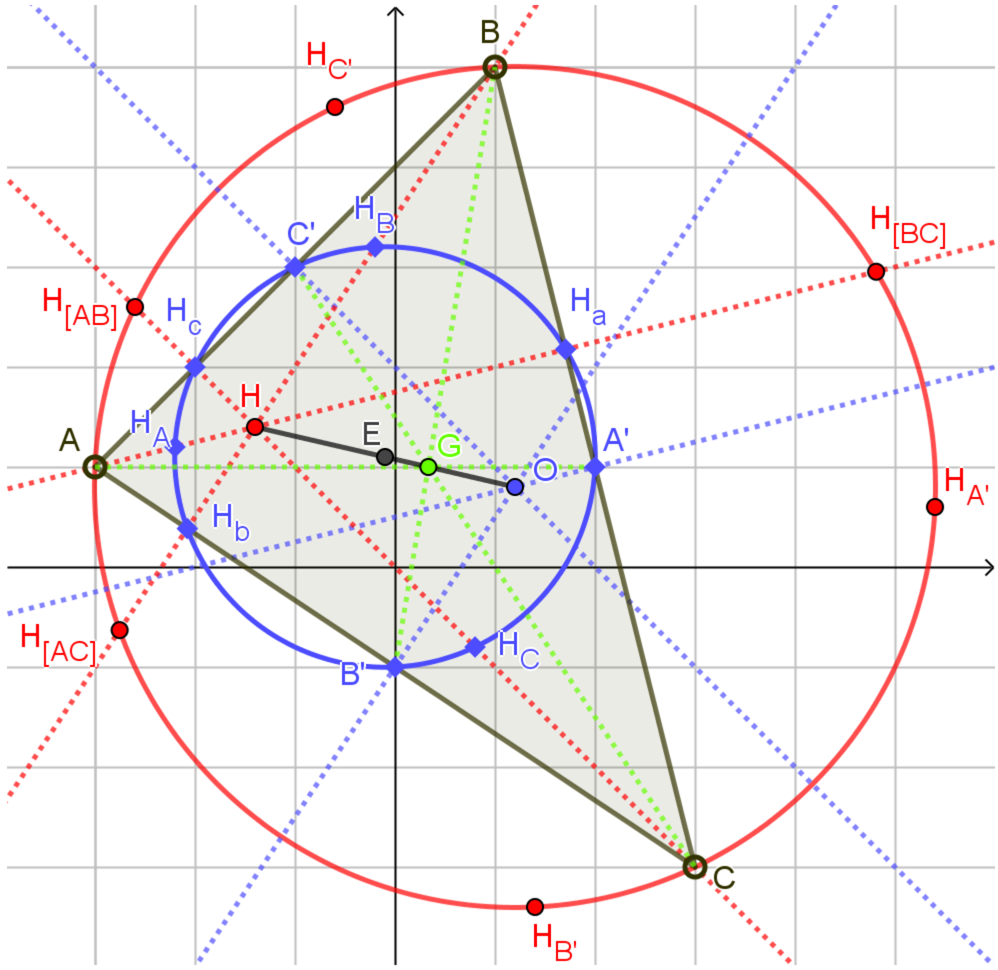
```python
n,dMAX=0,0.001
a,b=0,pi/2
while b-a>dMAX :
    if f(a)*f((a+b)/2)<0 : b=(a+b)/2
    else : a=(a+b)/2
    n+=1
print("n=",n,"a=",round(a,6)," b=",round(b,6)," b-a=",round(b-a,6))
```

```
n= 11 a= 0.738612   b= 0.739379   b-a= 0.000767
```

NB : pour l'équation de cet énoncé, on peut déterminer la valeur α avec un autre algorithme. En réitérant l'opération $\cos(a)$ à partir de la valeur obtenue, on finit par tomber sur α. Essayez avec votre calculatrice, en partant de n'importe quelle valeur de a, par exemple $a = 0$. Au début on trouve $\cos 0 = 1$ puis $\cos 1 \approx 0,54$ et après $\cos(\cos 1) \approx 0,86$ et ainsi de suite. Les valeurs obtenues sont, alternativement, des bornes inférieures et supérieures qui encadrent de plus en plus près la solution de l'équation $\cos x = x$. Bien sûr, l'algorithme de dichotomie est beaucoup plus général et s'adapte à toutes les équations de type $f(x) = 0$ dans la mesure où on peut identifier un intervalle de départ $[a; b]$ pour lequel la fonction f est strictement monotone (croissante ou décroissante).

Correction de l'exercice 4 (Orthocentre (**))

Coordonnées des sommets : $A(-3, 1)$, $B(1, 5)$ et $C(3, -3)$.
Coordonnées des milieux : $A'(2, 1)$ de $[BC]$, $B'(0, -1)$ de $[AC]$ et $C'(-1, 3)$ de $[AB]$.
Composantes des vecteurs : $\overrightarrow{AB}(4, 4)$, $\overrightarrow{BC}(2, -8)$ et $\overrightarrow{CA}(-6, 4)$.



Un point $M(x,y)$ appartient à la hauteur issue de A si $\overrightarrow{AM}(x+3,y-1) \perp \overrightarrow{BC}(2,-8)$, soit si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \iff 2(x+3)-8(y-1)=0 \iff x-4y+7=0$.
De même, l'équation des hauteurs issue de B : $3x-2y+7=0$ et issue de C : $x+y=0$.
Si les hauteurs sont concourantes, les coordonnées d'un point vérifient les 3 égalités simultanément :

$$\begin{cases} x-4y+7=0 \\ 3x-2y+7=0 \\ x+y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{-7}{5} \\ y=\frac{7}{5} \end{cases}$$

L'orthocentre du triangle est donc le point $H(\frac{-7}{5};\frac{7}{5})$.

Un point $M(x,y)$ appartient à la médiatrice de $[BC]$ si $\overrightarrow{A'M}(x-2,y-1) \perp \overrightarrow{BC}(2,-8)$, soit si $\overrightarrow{A'M}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \iff 2(x-2)-8(y-1)=0 \iff x-4y+2=0$.
De même, l'équation des médiatrices de $[CA]$: $3x-2y-2=0$ et de $[AB]$: $x+y=2$.
Si les médiatrices sont concourantes, les coordonnées d'un point vérifient les 3 égalités simultanément :

$$\begin{cases} x-4y+2=0 \\ 3x-2y-2=0 \\ x+y=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{6}{5} \\ y=\frac{4}{5} \end{cases}$$

Le centre du cercle circonscrit au triangle est donc le point $O(\frac{6}{5};\frac{4}{5})$.

L'isobarycentre G de $\{A,B,C\}$ a pour coordonnées $(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3})$, donc $G(\frac{1}{3};1)$.
Les points O, G et H sont alignés car $\overrightarrow{OH}(\frac{-13}{5},\frac{3}{5})$ est colinéaire à $\overrightarrow{OG}(\frac{-13}{15},\frac{1}{5})$. On peut le vérifier en calculant le déterminant de ces vecteurs, mais on peut surtout remarquer que $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$, ce qui prouve l'alignement des points O, G, H dans cet ordre sur la droite de Euler du triangle.

Un point $M(x, y)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC si $OM^2 = OA^2 \iff \left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\left(y-\frac{4}{5}\right)^2 = \left(-3-\frac{6}{5}\right)^2+\left(1-\frac{4}{5}\right)^2 \iff \left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\left(y-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{442}{25}$.
Déterminons les coordonnées des points et assurons nous qu'elles vérifient l'équation de $\mathscr{C}$:

- $H_{[BC]}(x; y)$ est sur la hauteur issue de A et le milieu de $[HH_{[BC]}]$ est sur (BC). Or l'équation de (BC) est $4x+y-9=0$ et le milieu de $[HH_{[BC]}]$ a pour coordonnées $(\frac{x+\frac{-7}{5}}{2}; \frac{y+\frac{7}{5}}{2})$. Les coordonnées cherchées vérifient le système :

$$\begin{cases} 4\left(\frac{x+\frac{-7}{5}}{2}\right)+\left(\frac{y+\frac{7}{5}}{2}\right)-9=0 \\ x-4y+7=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 20x+5y-111=0 \\ x-4y+7=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{409}{85} \\ y=\frac{251}{85} \end{cases}$$

  Vérifions que $H_{[BC]}(\frac{409}{85}; \frac{251}{85})$ est sur $\mathscr{C}$: $\left(\frac{409}{85}-\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{251}{85}-\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{307}{85}\right)^2+\left(\frac{183}{855}\right)^2 = \frac{442}{25}$. Donc oui, $H_{[BC]} \in \mathscr{C}$.
- De même, $H_{[AC]}$ est sur la hauteur issue de B et le milieu de $[HH_{[AC]}]$ est sur (AC). L'équation de (AC) est $2x+3y+3=0$; le milieu de $[HH_{[AC]}]$ a toujours pour coordonnées $(\frac{x+\frac{-7}{5}}{2}; \frac{y+\frac{7}{5}}{2})$ et on trouve finalement $H_{[AC]}(\frac{-179}{65}; \frac{-41}{65})$. Vérification que $H_{[AC]} \in \mathscr{C}$: $\left(\frac{-179}{65}-\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{-41}{65}-\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{-257}{65}\right)^2+\left(\frac{-93}{65}\right)^2 = \frac{442}{25}$.
- De même, on trouve que $H_{[AB]}(\frac{-13}{5}; \frac{13}{5})$ et que ces coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{C}$.
- Le segment $[HH_{A'}]$ a pour milieu $A'(2, 1)$.
  Les coordonnées de $H_{A'}(x; y)$ vérifient le système : $\begin{cases} \frac{1}{2}\left(x-\frac{7}{5}\right)=2 \\ \frac{1}{2}\left(y+\frac{7}{5}\right)=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{27}{5} \\ y=\frac{3}{5} \end{cases}$.
  Vérification que $H_{A'} \in \mathscr{C}$: $\left(\frac{27}{5}-\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{21}{5}\right)^2+\left(\frac{-1}{5}\right)^2 = \frac{442}{25}$.
- De même, $H_{B'}(\frac{7}{5}, \frac{-17}{5}) \in \mathscr{C}$ et $H_{C'}(\frac{-3}{5}, \frac{23}{5}) \in \mathscr{C}$

Le cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC contient donc bien les 6 points (en rouge) qui sont les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés et aux milieux des côtés, ce qui se voyait sur la figure mais qui nécessitait une preuve. Le calcul analytique fournit cette preuve qui se généralise pour tous les triangles. On peut reprocher à cette méthode son côté fastidieux mais elle a ses avantages : en fournissant les coordonnées des points elle peut être programmée. Pour traiter le cas général (bien plus intéressant), recommencer avec les points $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$.

Le milieu E du segment $[HO]$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}-\frac{7}{5}\right); \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{5}\right)\right)$, soit donc $E(\frac{-1}{10}; \frac{11}{10})$.
Ce point E est-il bien le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$?
Pour le vérifier, montrons que $A'E = B'E = C'E$, ou plutôt que $A'E^2 = B'E^2 = C'E^2$:

- $A'E^2 = (2+\frac{1}{10})^2+(1-\frac{11}{10})^2 = \frac{441}{100}+\frac{1}{100} = \frac{221}{50}$
- $B'E^2 = (0+\frac{1}{10})^2+(-1-\frac{11}{10})^2 = \frac{1}{100}+\frac{441}{100} = \frac{221}{50}$
- $C'E^2 = (-1+\frac{1}{10})^2+(3-\frac{11}{10})^2 = \frac{81}{100}+\frac{361}{100} = \frac{221}{50}$

Le cercle de centre E passant par A', passe donc bien par B' et C' ; on le notera $\mathscr{C}'$. Ce cercle a pour équation $(x-x_E)^2+(y-y_E)^2 = (x_{A'}-x_E)^2+(y_{A'}-y_E)^2 \iff (x+\frac{1}{10})^2+(y-\frac{11}{10})^2 = \frac{221}{50}$.
Déterminons les coordonnées des points et assurons nous qu'elles vérifient l'équation de $\mathscr{C}'$:

- H_a est le milieu de $[HH_{[BC]}]$ qui a pour coordonnées $(\frac{x+\frac{-7}{5}}{2}; \frac{y+\frac{7}{5}}{2})$ avec $x = \frac{409}{85}$ et $y = \frac{251}{85}$ (voir plus haut). On en déduit $H_a(\frac{29}{17}; \frac{37}{17})$. Vérification que $H_a \in \mathscr{C}'$: $(\frac{29}{17}+\frac{1}{10})^2+(\frac{37}{17}-\frac{11}{10})^2 = \frac{221}{50}$.
- De même, $H_b(\frac{-27}{13}, \frac{5}{13}) \in \mathscr{C}'$ et $H_c(-2, 2) \in \mathscr{C}'$.
- H_A étant le milieu du segment $[HA]$ a pour coordonnées $(\frac{-11}{5}; \frac{6}{5})$.
  Vérification que $H_A \in \mathscr{C}'$: $(\frac{-11}{5}+\frac{1}{10})^2+(\frac{6}{5}-\frac{11}{10})^2 = \frac{221}{50}$.
- De même, $H_B(\frac{-1}{5}, \frac{16}{5}) \in \mathscr{C}'$ et $H_C(\frac{4}{5}, \frac{-4}{5}) \in \mathscr{C}'$.

Le cercle $\mathscr{C}'$ circonscrit au triangle $A'B'C'$ contient donc bien les 6 points (en bleu) qui sont les projections orthogonales de l'orthocentre sur les côtés du triangle et les milieux des segments joignant l'orthocentre à ses sommets. Si on remarque que l'orthocentre du triangle $A'B'C'$ est le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC, on va alors trouver d'autres points sur ce cercle : les symétriques de O par rapport aux côtés et aux milieux des côtés du triangle $A'B'C'$; mais 3 de ces nouveaux points sont déjà connus, je vous laisse trouver lesquels.

Correction de l'exercice 5 (Problème d'arithmétique (***))
Calculons $\cos(\alpha)$ avec le théorème d'Al-Kashi :$\cos(\alpha)=\frac{a^2+l^2-b^2}{2al}=\frac{73^2+112^2-57^2}{2\times73\times112}=\frac{457}{511}$
On en déduit que :
$\sin^2(\alpha)=1-\cos^2(\alpha)=1-\left(\frac{457}{511}\right)^2=\frac{52272}{261121}$ et donc $\sin(\alpha)=\sqrt{\frac{52272}{261121}}=\sqrt{\frac{132^2\times3}{511^2}}=\frac{132\times\sqrt{3}}{511}$
De l'autre côté, de la même manière, on a $\cos(\beta)=\frac{a^2+l^2-c^2}{2al}=\frac{73^2+112^2-c^2}{2\times73\times112}=\frac{17873-c^2}{16352}$
Mais comme $\beta=\frac{\pi}{3}-\alpha$ (triangle équilatéral), on va calculer autrement le cosinus de β :
$\cos(\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(\alpha)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(\alpha)$
soit $\cos(\beta)=\frac{\cos(\alpha)}{2}+\frac{\sqrt{3}\sin(\alpha)}{2}=\frac{457}{2\times511}+\frac{(\sqrt{3})^2\times132}{2\times511}=\frac{853}{1022}$
D'où $\frac{17873-c^2}{16352}=\frac{853}{1022}\iff c^2=17873-16352\times\frac{853}{1022}=4225=65^2$ et donc $c=65$.

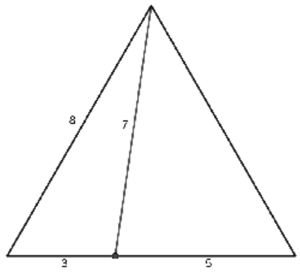
Généralisons cette recherche du 4ᵉ nombre (c) connaissant les 3 premiers (a, b et l) :
$\cos(\alpha)=\frac{a^2+l^2-b^2}{2al}$
$\sin(\alpha)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}=\sqrt{1-\left(\frac{a^2+l^2-b^2}{2al}\right)^2}=\frac{\sqrt{(2al)^2-(a^2+l^2-b^2)^2}}{2al}$
$\cos(\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{\cos(\alpha)}{2}+\frac{\sqrt{3}\sin(\alpha)}{2}$ mais aussi $\cos(\beta)=\frac{a^2+l^2-c^2}{2al}$
On en déduit que $\frac{a^2+l^2-c^2}{2al}=\frac{\cos(\alpha)}{2}+\frac{\sqrt{3}\sin(\alpha)}{2}=\frac{a^2+l^2-b^2}{4al}+\frac{\sqrt{3}\sqrt{(2al)^2-(a^2+l^2-b^2)^2}}{4al}$
en multipliant par $4al$, on obtient $2(a^2+l^2-c^2)=a^2+l^2-b^2+\sqrt{3}\sqrt{(2al)^2-(a^2+l^2-b^2)^2}$
d'où $a^2+b^2+l^2-\sqrt{3}\sqrt{(2al)^2-(a^2+l^2-b^2)^2}=2c^2$
et, finalement $c^2=\frac{a^2+b^2+l^2-\sqrt{3}\sqrt{(2al)^2-(a^2+l^2-b^2)^2}}{2}$,
il suffit d'en prendre la racine carrée pour obtenir notre 4ᵉ longueur.
Les contraintes portant sur les 4 nombres sont :

- a, b, c et l sont des entiers non nuls (une solution avec $a=0$ par exemple n'est pas intéressante car alors P est confondu avec un sommet)
- $a<l$, $b<l$ et $c<l$ pour que le point soit à l'intérieur du triangle. Sans perte de solutions, on peut supposer que les nombres sont rangés dans cet ordre $a\leqslant b\leqslant c$ (l'égalité n'est pas écartée)
- les inégalités triangulaires doivent être respectées pour que le point P existe vraiment. On doit avoir $a+b\geqslant l$, $b+c\geqslant l$ et $a+c\geqslant l$ (l'égalité n'est pas intéressante à priori car alors le point P est sur un bord, mais on peut ne pas refuser ces solutions qui ne sont pas forcément triviales)

Il ne reste plus qu'à construire un programme qui examine toutes les possibilités.
Je fais croître l en partant de $l=1$ sans trop d'espoir pour cette valeur, mais dans l'ignorance d'une valeur plus pertinente pour le début.
Je choisis ensuite a dans l'intervalle $]1;l[$ et puis b dans l'intervalle $[a;l[$, de manière à respecter l'inégalité $a+b\geqslant l$ (je n'écarte pas la possibilité de l'égalité).
Je calcule alors la valeur de c avec la formule trouvée et je vérifie que ce nombre est un entier. Si c'est bien le cas, alors j'ordonne les 4 nombres pour qu'ils soient bien dans l'ordre (à priori il n'y a que c à classer) et j'affiche la solution.
Le programme continue de cette manière en essayant toutes les combinaisons.
Vous noterez que je n'ai pas programmé toutes les contraintes mais, pour effectuer le calcul de c, on doit prendre deux fois la racine carrée d'un nombre. Or, cette opération n'est possible que si le nombre est positif. J'ai donc mis deux tests dans la fonction qui calcule c pour éliminer les cas où un de ces nombres se révèlerait négatif. Je suppose, sans l'avoir démontré, que ces tests reviennent à écarter les cas qui ne satisfont pas les deux autres inégalités triangulaires.

```
from math import *
def distance(a,b,l):
    if 3*((2*a*l)**2-(l**2+a**2-b**2)**2)>0 and (l**2+a**2+b**2-sqrt(3*((2*a*l)**2-(l**2+a**2-b**2)**2)))>0:
        return sqrt((l**2+a**2+b**2-sqrt(3*((2*a*l)**2-(l**2+a**2-b**2)**2)))/2)
    else : return -1

n=0
solutions=list()
for L in range(1,120):#coté du triangle
    #print("triangle de côté {}".format(L))
    for A in range(1,L):#première distance
        for B in range(A,L):#deuxième distance
            if A+B<L:continue
            C=distance(A,B,L)#troisième distance
            if C>0 and int(C)==C:
                long=[A,B,int(C),L]
                long.sort()
                if long not in solutions:
                    n+=1
                    print("solution n°{} : {}".format(n,long))
                    solutions.append(long)
```




```
solution n°1 : [3, 5, 7, 8]
solution n°2 : [7, 8, 13, 15]
solution n°3 : [6, 10, 14, 16]
solution n°4 : [5, 16, 19, 21]
solution n°5 : [9, 15, 21, 24]
solution n°6 : [14, 16, 26, 30]
solution n°7 : [12, 20, 28, 32]
solution n°8 : [11, 24, 31, 35]
solution n°9 : [7, 33, 37, 40]
solution n°10 : [15, 25, 35, 40]
solution n°11 : [10, 32, 38, 42]
solution n°12 : [21, 24, 39, 45]
solution n°13 : [13, 35, 43, 48]
solution n°14 : [18, 30, 42, 48]
solution n°15 : [16, 39, 49, 55]
solution n°16 : [21, 35, 49, 56]
solution n°17 : [28, 32, 52, 60]
solution n°18 : [15, 48, 57, 63]
solution n°19 : [24, 40, 56, 64]
solution n°20 : [9, 56, 61, 65]
solution n°21 : [22, 48, 62, 70]
solution n°22 : [27, 45, 63, 72]
solution n°23 : [35, 40, 65, 75]
solution n°24 : [32, 45, 67, 77]
solution n°25 : [14, 66, 74, 80]
solution n°26 : [17, 63, 73, 80]
solution n°27 : [30, 50, 70, 80]
solution n°28 : [20, 64, 76, 84]
solution n°29 : [33, 55, 77, 88]
solution n°30 : [42, 48, 78, 90]
solution n°31 : [40, 51, 79, 91]
solution n°32 : [11, 85, 91, 96]
solution n°33 : [26, 70, 86, 96]
solution n°34 : [36, 60, 84, 96]
solution n°35 : [19, 80, 91, 99]
solution n°36 : [39, 65, 91, 104]
solution n°37 : [25, 80, 95, 105]
solution n°38 : [33, 72, 93, 105]
solution n°39 : [49, 56, 91, 105]
solution n°40 : [32, 78, 98, 110]
solution n°41 : [42, 70, 98, 112]
solution n°42 : [55, 57, 97, 112]
solution n°43 : [57, 65, 73, 112]
```

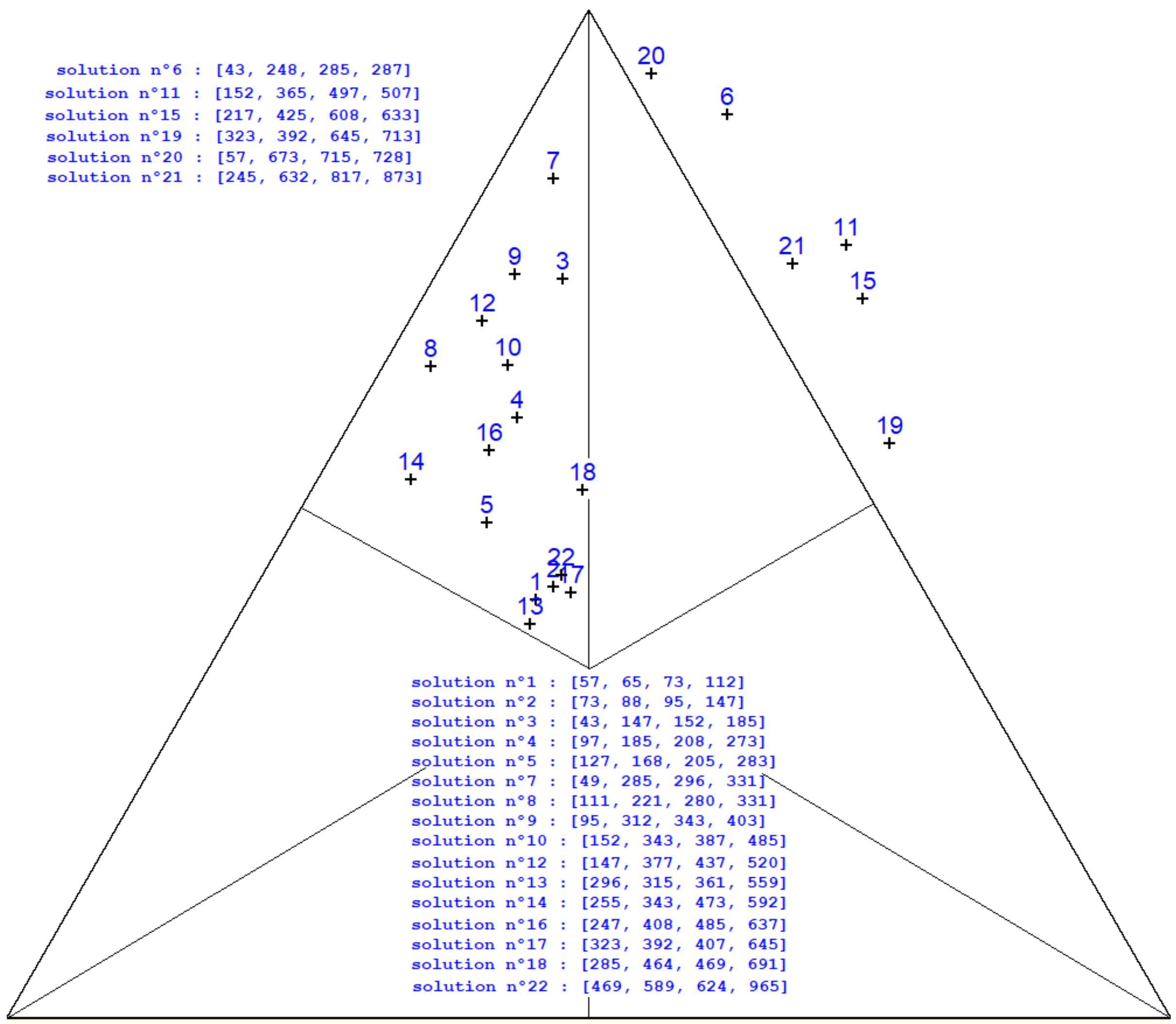
L'exécution de ce programme montre qu'il existe beaucoup de solutions :

- la 1re solution ($a=3, b=5, c=7, l=8$) est toujours intéressante mais elle correspond à un point P sur le bord du triangle. La solution proposée par le texte (elle est extraite d'une publication de *American Mathematical Monthly*) porte le n°43
- pour $l<1000$ je trouve 678 solutions (le programme est assez long pour aboutir) dont voici la dernière : $a=295, b=704, c=889, l=999$
- toutes les valeurs entières ne conviennent pas pour l, la liste des valeurs pour lesquelles il y a des solutions commence par : $8, 15, 16, 21, 24, 30, 32, 35, 40, 42, 45, 48, 55, 56, 60, 63, 64, 65, 70, 72, 75, 77, 80, 84, 88, 90, 91, 96, 99$ Cette liste se retrouve dans l'encyclopédie des nombres entiers de Sloane [1] où elle porte le n°229839 mais, en réalité, il ne s'agit que des valeurs pour lesquelles le point P est sur un côté. Si on ne retient que les solutions où le point P est vraiment à l'intérieur du triangle et non sur le bord (il faut ajouter quelques tests), la 1re est celle de l'énoncé (cela explique son choix par l'*AMM*). Les suivantes sont $a=73, b=88, c=95, l=147$ et $a=43, b=147, c=152, l=185$. Ces vraies solutions sont beaucoup plus rares : je n'en trouve plus que 50 pour $l<1000$, la plus grande étant $a=333, b=663, c=840, l=993$. La liste est présente dans l'OEIS sous le n°61281 ; une formule y est associée à cette situation : $3(a^4+b^4+c^4+d^4)=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$, je vous laisse découvrir pourquoi. On peut être encore plus restrictif si on élimine les solutions non-primitives comme la 4e ($a=114, b=130, c=146, l=224$) qui est juste un agrandissement de la 1re d'un facteur 2. En éliminant les solutions non-primitives (il faut ajouter un petit module « PGCD »), il n'en reste plus que 22 pour $l<1000$, la plus grande étant $a=469, b=589, c=624, l=965$. La liste des valeurs pour lesquelles il y a ce type de vraies solutions primitives commence par : $112, 147, 185, 273, 283, 287, 331, 403, 485, 507, 520, 559, 592, 633, 637, 645, 691, 713, 728, 873, 965$. Cette liste n'est pas présente dans l'OEIS.

Pour finir, voici une représentation des proportions de ces 22 triangles-solutions. J'ai réalisé cette figure pour visualiser les solutions trouvées, éventuellement observer des particularités. En réalité je m'aperçois surtout qu'une partie des solutions n'est pas à l'intérieur du triangle comme je m'y attendais. Cela me montre une lacune dans mon système de contraintes : il faut être plus restrictif encore pour éliminer ces solutions extérieures. J'ai ajouté cette condition supplémentaire : $a+b+c<2*l$ et les 6 fausses solutions sont éliminées. Sauriez-vous justifier cette contrainte supplémentaire, ou la prendre

1. https://oeis.org

en défaut ?


solution n°6 : [43, 248, 285, 287]
solution n°11 : [152, 365, 497, 507]
solution n°15 : [217, 425, 608, 633]
solution n°19 : [323, 392, 645, 713]
solution n°20 : [57, 673, 715, 728]
solution n°21 : [245, 632, 817, 873]
20
6
7
21
11
9
3
15
12
8
10
4
16
19
14
18
5
22
2
1
17
13
solution n°1 : [57, 65, 73, 112]
solution n°2 : [73, 88, 95, 147]
solution n°3 : [43, 147, 152, 185]
solution n°4 : [97, 185, 208, 273]
solution n°5 : [127, 168, 205, 283]
solution n°7 : [49, 285, 296, 331]
solution n°8 : [111, 221, 280, 331]
solution n°9 : [95, 312, 343, 403]
solution n°10 : [152, 343, 387, 485]
solution n°12 : [147, 377, 437, 520]
solution n°13 : [296, 315, 361, 559]
solution n°14 : [255, 343, 473, 592]
solution n°16 : [247, 408, 485, 637]
solution n°17 : [323, 392, 407, 645]
solution n°18 : [285, 464, 469, 691]
solution n°22 : [469, 589, 624, 965]